MARCEL BERGER

Quelques formules de variation pour une structure riemannienne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 3 (1970), p. 285-294

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_285_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 285 à 294.

QUELQUES FORMULES DE VARIATION POUR UNE STRUCTURE RIEMANNIENNE

PAR MARCEL BERGER.

1. INTRODUCTION. — Soient M une variété compacte (il ne s'agira dans cet article que de variétés compactes) et $\mathcal{R}$ l'ensemble des structures riemanniennes C^∞ sur M; pour étudier $\mathcal{R}$ on peut définir une fonction $I : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$, dont on cherchera les points critiques. La fonction la plus simple est

$$A : \quad g \mapsto A(g) = \int_M \tau_g \cdot v_g,$$

où v_g désigne la mesure canonique de la structure riemannienne g et τ_g sa courbure scalaire. Comme A n'est pas homogène de degré zéro, il est sage de se limiter à l'ensemble $\mathcal{R}^1$ des g de volume total égal à 1 : $\int_M v_g = 1$. Il est classique [5], si $n = \dim M > 2$, que les points critiques de A sur $\mathcal{R}^1$ sont les variétés riemanniennes d'Einstein, i. e. pour lesquelles la courbure de Ricci ρ_g est proportionnelle à g. Note : on ne se préoccupe pas ici de faire de $\mathcal{R}$ ou de $\mathcal{R}^1$ une variété de dimension infinie [*voir* [4]), car nous ne calculerons que des dérivées directionnelles.

Dans cet article, nous essayons de donner un début de réponse à quelques questions suggérées par ce qui précède.

D'abord, ayant en vue un *indice* éventuel pour le point critique g de $\mathcal{R}^1$ pour la fonction $A : \mathcal{R}^1 \to \mathbf{R}$, nous calculons la variation seconde de A, c'est-à-dire que nous calculons, pour une famille à un paramètre $g(t)$ de structures riemanniennes de $\mathcal{R}^1$, la dérivée seconde $A''(0) = \frac{d^2(A(g))}{dt^2}(0)$. Le résultat est la formule (4.2); on en déduit, dans le n° 4, qu'il est faux que sur $\mathcal{R}^1$ la fonction A ou la fonction — A ait un indice fini. Rappelons par contre que la *nullité* d'un tel point critique est toujours finie : *voir* [2], corollaire 7.2. Le calcul de $A''(o)$ est fait à l'aide de la formule classique (3.1) donnant $A'(o)$, formule que nous avons rappelée dans le n° 3. On trouvera dans ce n° 3 un résultat élémentaire, la proposition 3.2.

Ensuite nous essayons d'étudier, sur $\mathcal{R}^1$, d'autres fonctions que A. Ce sont B, C, D définies ainsi : si R désigne le tenseur de courbure de g (dans ce qui suit on supprime l'indice g dans v_g, τ_g, ρ_g), alors

$$(1.1) \qquad B = \int_M \tau^2 v, \qquad C = \int_M |\rho|^2 v, \qquad D = \int_M |R|^2 v.$$

La fonction D semble assez naturelle, c'est vraiment *toute la courbure* de (M, g). Les formules (5.1), (5.2), (6.1) fournissent la valeur des variations premières $B'(o)$, $C'(o)$, $D'(o)$. Il serait intéressant de déterminer les structures riemanniennes critiques pour B, ou C, ou D.

Dans le n° 7, on trouvera la remarque suivante : la formule donnant $A'(o)$ ne fait intervenir que le tenseur de courbure de g, tandis que celles donnant $B'(o)$, $C'(o)$, $D'(o)$ font aussi intervenir la dérivée covariante de ce tenseur de courbure; il se trouve que $(B - 4C + D)'(o)$ ne fait plus intervenir la dérivée covariante de la courbure. Il faudrait expliquer ce phénomène.

Enfin, nous utilisons, dans le n° 8, les valeurs obtenues pour $B'(o)$, $C'(o)$, $D'(o)$ pour répondre, dans le cas très simple de la dimension quatre, à une question très générale de Singer.

Je remercie ici A. Weinstein et I. Singer pour des conversations qui ont été essentielles pour le présent travail.

2. Notations et formulaires. — On trouvera plusieurs des notations et résultats ci-dessous dans [1], [2] ou [7].

Soit $\underline{g} : t \mapsto \underline{g}(t)$ une famille C^∞ à un paramètre de structures riemanniennes sur la variété compacte C^∞M. On pose $\underline{h} = \underline{g}' = \frac{d\underline{g}}{dt}$. Les $\underline{g}(t)$, $\underline{h}(t)$ appartiennent tous à l'espace $S^2(M)$ des formes différentielles bilinéaires *symétriques* sur M. On peut définir la trace $\tilde{\underline{h}} = \text{trace}_{\underline{g}}\underline{h}$, qui, pour chaque t, est une fonction sur M. Les lettres *soulignées* désigneront systématiquement les éléments dépendant de t (famille à un paramètre) tandis que les lettres *non soulignées* désigneront les valeurs en $t = o$ correspondantes; ainsi $\underline{g}(o) = g$, $\underline{h}(o) = h$, $\tilde{\underline{h}}(o) = \tilde{h}$, ... On notera $\underline{\nabla}$ la dérivée covariante associée à $\underline{g}$. On utilisera des indices correspondant à des bases (locales ou ponctuelles); par exemple, pour une base orthonormée, on a $\tilde{h} = \sum_i h_{ii}$. Enfin ' désignera la *dérivée par rapport à t*.

D'après [(7], p. 39-40), si l'on pose

$$(2.1)\qquad Z:\quad Z_a{}^b{}_c = \frac{1}{2}(\nabla_a h^b{}_c + \nabla_c h^b{}_a - \nabla^b h_{ac}), \qquad Z_{abc} = \sum g_{bl} Z_a{}^l{}_c$$

on a, pour la dérivée en t du tenseur de courbure R de g,

$$(2.2)\qquad (R_{abcd})' = \nabla_c Z_{bad} - \nabla_d Z_{bac} + \sum_l h_{al} R^l{}_{bcd}$$

(le signe choisi pour R est ici tel que $R_{1212} = 1$ pour la sphère S^2, sa structure riemannienne canonique et une base orthonormée.

Soient $\rho : \rho_{ab} = \sum_l R_{alb}{}^l$ la courbure de Ricci de g et

$$\tau = \operatorname{trace}_g \rho \quad \left(\text{i. e. } \tau = \sum_l \rho_l{}^l = \sum_{l,m} R_{lm}{}^{lm}\right)$$

sa courbure scalaire; pour écrire plaisamment les dérivées ρ', τ' associées à une g, nous aurons besoin des notations suivantes. D'abord quatre opérateurs $S^2(M) \to S^2(M)$:

$$(2.3)\qquad \bar\Delta = -\operatorname{trace}_g \nabla\nabla, \qquad \text{i. e. } (\bar\Delta s)_{ab} = -\sum_l \nabla^l \nabla_l S_{ab};$$

$$(2.4)\qquad K:\quad (Ks)_{ab} = \sum_l (\rho_{al} s^l{}_b + \rho_{bl} h^l{}_a) - 2\sum_{l,m} R_{albm} s^{lm};$$

$$(2.5)\qquad L:\quad (Ls)_{ab} = -2\sum_{l,m} R_{albm} s^{lm}, \qquad \Delta = \bar\Delta + K.$$

Soient $A^1(M)$ l'espace des formes différentielles linéaires de M et $A^0(M) = C^\infty(M)$ l'espace des fonctions sur M. On a la différentielle ordinaire $d : A^0(M) \to A^1(M)$, son adjoint formel $\delta : A^1(M) \to A^0(M)$ $\left(\text{qui vaut } \delta\alpha = -\sum_l \nabla^l \alpha_l\right)$, le laplacien ordinaire sur les fonctions

$$\Delta : \quad A^0(M) \to A^0(M) : \Delta = \delta d, \qquad \text{soit } \Delta f = -\sum_l \nabla^l d_l f.$$

Le hessien est $\operatorname{Hess} = \nabla df : A^0(M) \to S^2(M)$ (ainsi $\Delta = -\operatorname{trace}_g \operatorname{Hess}$). D'autres opérateurs sont

$$\delta :\quad S^2(M) \to A^1(M) : \qquad (\delta h)_a = -\sum_l \nabla_l h^l{}_a,$$

$$\delta^* :\quad A^1(M) \to S^2(M) : \qquad (\delta^*\alpha)_{ab} = \frac{1}{2}(\nabla_a \alpha_b + \nabla_b \alpha_a).$$

Pour ces derniers, δ^* est l'adjoint formel de δ, et par ailleurs, si ξ désigne le champ de vecteurs sur M dual de la forme α, on a $2\delta^*\alpha = \mathcal{L}_\xi g$, où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie.

Rappelons que (M, g) étant compacte, on peut y définir un produit scalaire local puis global sur tout espace tensoriel déduit de l'espace tangent TM. Si $(.|.)$ est le produit scalaire local, le produit scalaire global sera noté $\langle ., . \rangle = \int_M (.|.) v_g$, où v_g désigne la mesure canonique de (M, g) (on écrira aussi v sans indice); on note aussi $|.|^2 = (.|.)$, $\|\ \|^2 = \langle ., . \rangle$. Par exemple, pour $u, v \in S^2(M)$: $(u, v) = \sum_{l,m} u_{lm} v^{lm}$. Aussi $\tilde{h} = (h|g)$. Deux opérateurs $L : A(M) \to B(M)$, $L^\star : B(M) \to A(M)$ sont *adjoints formels* l'un de l'autre si $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^\star v \rangle$ pour tous u, v. Par exemple :

$$(\mathrm{Hess})^\star = \delta\delta. \tag{2.6}$$

On introduit encore ([2], n° 6.c), où $A^2(M)$ sont les formes alternées de degré 2 :

$$\sigma : \quad S^2(M) \to A^2(M) \otimes A^1 M, \qquad \sigma^\star : \quad A^2(M) \otimes A^1(M) \to S^2(M)$$

qui sont adjoint formels l'un de l'autre et définis par

$$(\sigma h)_{abc} = \nabla_a h_{bc} - \nabla_b h_{ac}, \qquad (\sigma^\star k)_{ab} = -\sum_l (\nabla^l k_{lab} + \nabla^l k_{lba}). \tag{2.7}$$

En outre :

$$\sigma^\star \sigma + 2\delta^\star \delta = 2\bar{\Delta} + K. \tag{2.8}$$

On pose

$$\check{\rho} : \quad \rho_{ab} = \sum_l \rho_{al} \rho^l{}_b, \qquad \check{R} : \quad \check{R}_{ab} = \sum_{l,m} R_{almn} R_b{}^{lmn}. \tag{2.9}$$

Enfin, pour $u, s, w \in S^2(M)$:

$$(u|s|w) = \sum_{a,b,c} u_a{}^b s_b{}^c w_c{}^a, \qquad \langle u, s, w \rangle = \int_M (u|s|w) . v_g.$$

Par exemple : $(\check{\rho}|.) = (\rho|\rho|.)$.

Alors, on a les formules suivantes relatives aux dérivées en o d'une famille g :

$$v' = \frac{1}{2} \tilde{h} v = \frac{1}{2} (h|g) . v. \tag{2.10}$$

De (2.2) et de calculs directs, on déduit

$$\tau' = \Delta\tilde{h} + \delta\delta h - (h|\rho); \tag{2.11}$$

$$\rho' = \frac{1}{2}(\Delta h - 2\delta^\star \delta h - \mathrm{Hess}\,\tilde{h}); \tag{2.12}$$

$$(|\rho|^2)' = 2(\rho|\rho') - 2(\check{\rho}|h); \tag{2.13}$$

$$(|R|^2)' = 2(R|R') - 4(\check{R}|h); \tag{2.14}$$

$$(u|s)' = (u'|s) + (u|s') - 2(u|s|h); \tag{2.15}$$

$$\delta\rho = \frac{1}{2} d\tau, \qquad \text{d'où} \qquad \delta^\star \delta\rho = -\frac{1}{2}\Delta\tau; \tag{2.16}$$

$$\Delta\rho = \bar{\Delta}\rho + 2\check{\rho} + L\rho. \tag{2.17}$$

3. Calcul de A′. — On a posé

$$A(g) = \int_M \tau . v = \int_M \tau_g . v_g$$

et l'on cherche à calculer $\underline{A}' = A'(\underline{g})$ pour une famille à un paramètre $\underline{g}$. De (2.10) et (2.11) on déduit

$$\underline{A}' = \frac{1}{2}\langle \underline{h}, \tau . \underline{g}\rangle + \langle \Delta\tilde{\underline{h}} + \delta\delta\underline{h} - (\underline{h} \mid \underline{\rho}), 1\rangle = \left\langle \underline{h}, \frac{\tau}{2}\cdot\underline{g}\right\rangle - \langle \underline{h}, \underline{\rho}\rangle = \left\langle \underline{h}, \frac{\tau}{2}\underline{g} - \underline{\rho}\right\rangle;$$

$$\underline{A}' = \left\langle \underline{h}, \frac{\tau}{2}\cdot\underline{g} - \underline{\rho}\right\rangle. \tag{3.1}$$

Avec (3.1) on retrouve d'abord que si $n = 2$ l'invariant A est indépendant de g, car en dimension 2 : $\rho = \frac{\tau}{2}\cdot g$ (la constante est donnée par la formule de Gauss-Bonnet) et vaut $4\pi\chi(M)$, où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M. Dans tout ce numéro et le suivant on supposera donc $n \geqq 3$.

Rappelons le résultat classique que l'on déduit de la formule (3.1) : on recherche les g critique pour la fonction A. Tel que, le problème est mal posé car A n'est pas homogène de degré 0 (on trouverait comme solutions les g telles que $\tau = 0$). Il faut normaliser g, ce qu'on fait en exigeant que le volume total de $g = \int_M v_g = 1$. Si l'on a ceci quel que soit t pour $\underline{g}(t)$, alors il faut se restreindre aux h tels que $\langle h, 1\rangle = \int_M \tilde{h} . v_g = 0$ [d'après (2.10)]. L'histoire des multiplicateurs de Lagrange montre que g critique parmi les g de volume 1 est équivalent à : il existe un scalaire λ tel que $\frac{\tau}{2}\cdot g - \rho = \lambda . g$. En prenant la trace, on trouve $\rho = \frac{\tau}{n}\cdot g$, $\lambda = \frac{n-2}{2n}\cdot$ De telles variétés riemanniennes (i. e. $\rho = k . g$, k scalaire) sont dites d'Einstein. Dans ce qui suit nous précisons un peu ce qui a été dit dans le n° 7 de [2] :

Proposition 3.2. — *Soit $\underline{g}$ une famille à un paramètre de structures riemanniennes toutes d'Einstein, i. e. pour tout t, $g(t)$ est d'Einstein, et en outre de volume constant* 1, *i. e. pour tout t :* $\int_M v_{\underline{g}(t)} = 1$. *Alors $\underline{\tau}$ est constante en t. En particulier, il ne peut jamais exister sur une variété compacte une famille de structures riemanniennes d'Einstein pour laquelle $\underline{\tau}(t)$ prenne des signes différents* (où par signe on entend +, —, 0).

Puisque $\underline{\tau}$ est, pour tout t, constante sur M, il en est de même de $\underline{\tau}'$; intégrons (2.11) sur M :

$$\langle \underline{\tau}', 1\rangle = \left\langle \Delta\underline{h} + \delta\delta\underline{h} - \left(\underline{h} \mid \frac{\tau}{n}\cdot\underline{g}\right), 1\right\rangle = -\frac{\tau}{n}\langle \tilde{\underline{h}}, 1\rangle = 0$$

d'après la condition de volume constant [utiliser (2.10)]; ainsi pour tout t la constante $\underline{\tau}'(t)$ vaut-elle zéro.

4. Calcul de $A''(o)$. — Comme à l'accoutumée, nous calculerons la variation seconde $A''(o)$ avec des hypothèses simplificatrices, mais n'altérant pas, bien sûr, la signification du résultat. Pour la famille à un paramètre g, posons $k = \underline{h}'(o) = \underline{g}''(o)$. Comme, pour tout $t : \langle \underline{\tilde{h}}, 1 \rangle = o$ (condition de volume constant), on obtient en dérivant ceci en $t = o$, à l'aide de (2.15)

$$(4.1) \qquad \langle \tilde{k}, 1 \rangle = \| h \|^2 - \frac{1}{2} \| \tilde{h} \|^2.$$

L'hypothèse simplificatrice essentielle consiste à se restreindre à des familles $\underline{g}$ telles que $h = \underline{g}'(o)$ vérifie $\delta h = o$. Ceci n'entache pas la signification du résultat d'après [2], n° 3. On obtient, en dérivant en $t = o$ la formule (3.1) valable pour tout t, et en utilisant, dans un calcul direct assez long (2.10), (2.15), (2.12), (2.6),

$$(4.2) \qquad A''(o) = \frac{1}{2}\left(\| d\tilde{h} \|^2 - \frac{\tau}{n} \cdot \| \tilde{h} \|^2 \right) - \frac{1}{2}\left(\langle \Delta h, h \rangle - \frac{2\tau}{n} \cdot \| h \|^2 \right).$$

Montrons par un exemple que, considérée comme point critique de A ou de — A, une structure riemannienne d'Einstein g n'est pas nécessairement d'un indice fini. La variété M sera le tore de dimension 3, T^3, et la structure riemannienne d'Einstein la structure plate canonique g_0 de T^3. Il faut exhiber un sous-espace de dimension infinie de $S^2(M)$ pour lequel $A''(o)$ est $> o$, puis de même un pour lequel $A''(o)$ est $< o$.

Prenons d'abord des h du type suivant : pour les « coordonnées » périodiques canoniques x_1, x_2, x_3 de T^3, h est tel que tous les h_{ij} sont nuls à l'exception de deux seulement : $h_{11} = h_{22} = f$, où f est une fonction quelconque de x_3 seulement. On a alors par construction : $\delta h = o$, $\tau = o$, $\tilde{h} = 2f$, donc si l'on pose $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} : | dh |^2 = 4f'^2$. Comme $R = o$ (structure plate), on a $\Delta = \bar{\Delta}$, donc $\langle \Delta h, h \rangle = \langle \bar{\Delta} h, h \rangle = \| \nabla h \|^2$. Mais seuls $\nabla_3 h_{11} = \nabla_3 h_{22} = f'$ sont nuls dans ∇h, donc $| \nabla h |^2 = 2f'^2$.

En conclusion : $A''(o) = \langle 1, 2f'^2 - f'^2 \rangle > o$ dès que f n'est pas constante. Si l'on prend de plus f de moyenne nulle : $\langle 1, f \rangle = o$, on obtiendra bien un espace de dimension infinie sur lequel $A''(o) > o$ et répondant à toutes les exigences nécessaires.

Prenons maintenant h tel que tous les h_{ij} soient nuls sauf le seul $h_{12} = f$, où f est encore une fonction de x_3 seulement. Ici $\tilde{h} = o$, $\delta h = o$, et donc $A''(o) < o$, dès que f n'est pas constante.

On peut remarquer que $A''(o)$ est la différence de deux termes; le premier est toujours positif ou nul, *voir* par exemple la démonstration du lemme 7.1 de [2]. Le second est certainement négatif ou nul si $\tau = o$. Enfin on sait ([2], corollaire 7.2) que g est, pour A, toujours un point critique de *nullité finie*.

5. Calcul de $B'(0)$ et $C'(0)$. — De (2.10), (2.11), (2.12), (2.15), (2.16), (2.17), (2.6) : on déduit directement

$$B'(0) = \left\langle h,\ 2\,\Delta\tau.g + 2\,\mathrm{Hess}\,\tau - 2\,\tau.\rho + \frac{1}{2}\tau^2 g \right\rangle; \tag{5.1}$$

$$C'(0) = \left\langle h,\ \bar{\Delta}\rho + \mathrm{Hess}\,\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau.g + \mathrm{L}\rho + \frac{1}{2}|\rho|^2 g \right\rangle = \ldots \tag{5.2}$$

$$= \left\langle h,\ \Delta\rho + \mathrm{Hess}\,\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau.g - 2\check{\rho} + \frac{1}{2}|\rho|^2 g \right\rangle.$$

6. Calcul de $D'(0)$. — De (2.10), (2.14) on déduit

$$D'(0) = 2\langle R, R'\rangle + \frac{1}{2}\langle h, |R|^2.g\rangle - 4\langle h, \check{R}\rangle.$$

Nous devons calculer $\langle R, R'\rangle$. Dans le calcul ci-dessous, on a commis des abus d'écriture consistant à écrire les signes de sommation devant les produits scalaires globaux $\langle .,\ .\rangle$, alors que ces signes devraient figurer à l'intérieur. Les coordonnées s'entendent dans des coordonnées locales quelconques ; en fait, il s'agit d'êtres intrinsèques mais dont l'écriture sans coordonnées nécessiterait une pléïade d'opérateurs variés, de leurs adjoints formels. L'opération type effectuée, permise par la formule de Stokes, porte sur deux tenseurs quelconques S, T et se présente comme

$$\sum_a \langle \nabla_a S^{a\ldots}_{\ldots},\ T^{\ldots}_{\ldots}\rangle = \sum_a \langle S^{a\ldots}_{\ldots},\ \nabla_a T^{\ldots}_{\ldots}\rangle.$$

Ceci précisé, on a [*voir* (2.1) et (2.2)].

$$\sum_{a,b,c,d} \langle R_{abcd},\ \nabla^c Z^{bda}\rangle = \sum_{a,b,c,d} \langle -\nabla_c R_{ab}{}^c{}_d,\ Z^{bda}\rangle,$$

$$\langle R, R'\rangle = \sum_{a,b,c\,d} \left\langle R_{abcd},\ \nabla^c Z^{bad} - \nabla^d Z^{bac} + \sum_l R^{lbcd} h_l{}^a \right\rangle = \ldots$$

$$= \langle \check{R}, h\rangle + \sum_{a,b,c,d} [\langle -\nabla_c R_{ab}{}^c{}_d,\ Z^{bad}\rangle + \langle \nabla_d R_{abc}{}^d,\ Z^{bac}\rangle] = \ldots$$

$$= \langle \check{R}, h\rangle + 2\sum_{a,b,c,d} \langle \nabla_d R_{abc}{}^d,\ Z^{bac}\rangle.$$

De l'identité de Bianchi, on déduit $\sum_d \nabla_d R_{abc}{}^d = \nabla_b \rho_{ac} - \nabla_a \rho_{bc}$; donc en utilisant (2.7), (2.8), (2.9) :

$$\langle R, R'\rangle = \langle \check{R}, h\rangle + 2\sum_{a,b,c} \left\langle \nabla_b \rho_{ac} - \nabla_a \rho_{bc},\ \frac{1}{2}(\nabla^b h^{ac} + \nabla^c h^{ab} - \nabla^a h^{bc}) \right\rangle,$$

$$\langle R, R'\rangle = \langle \check{R}, h\rangle + \sum_{a,b,c} \langle \nabla_b \rho_{ac} - \nabla_a \rho_{bc},\ \nabla^b h^{ac} - \nabla^a h^{bc}\rangle = \ldots$$

$$= \langle \check{R}, h\rangle + \langle \sigma\rho, \sigma h\rangle = \langle \check{R}, h\rangle + \langle h, \sigma^\star \sigma\rho\rangle = \ldots$$

$$= \langle h,\ \check{R} + 2\,\bar{\Delta}\rho - 2\,\partial^\star\partial\rho + \mathrm{K}\rho\rangle = \langle h,\ 2\,\bar{\Delta}\rho + \mathrm{Hess}\,\tau + \check{R} + \mathrm{K}\rho\rangle.$$

En ajoutant, il vient la formule cherchée

$$(6.1)\qquad D'(0) = \left\langle h, 4\Delta\rho + 2\,\mathrm{Hess}\,\tau + 2L\rho - 2\check{R} + 4\check{\rho} + \frac{1}{2}|R|^2 g \right\rangle.$$

7. Le deuxième invariant d'Hermann Weyl. — Dans [9], H. Weyl a introduit, pour une structure riemannienne des invariants H_e (e pair, $e \leqq n = \dim M$); les H_e sont des fonctions sur M, dont la valeur en chaque point est un polynôme en le tenseur de courbure en ce point. Pour $e = 2$, $H_e = 2\tau$, le double de la courbure scalaire. Plus généralement, si n est pair : $H_n = k(n).f_n$, où $k(n)$ est un scalaire ne dépendant que de n, et f_n la fonction sur M qui figure dans l'intégrale de la formule de Gauss-Bonnet généralisée, i. e. pour toute structure riemannienne sur M on a

$$(7.1)\qquad \chi(M) = \int_M f_n . v,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété compacte M (*voir*, par exemple, [6], p. 318-319). On a, en particulier ([9], p. 470),

$$(7.2)\qquad H_4 = \sum_{a,b,c,d,e,f,g,h} \mathrm{sign}\begin{pmatrix} efgh \\ abcd \end{pmatrix} R_{ac}{}^{ef} R_{cd}{}^{gh}$$

(coordonnées locales quelconques). On voit de suite que

$$(7.3)\qquad H_4 = 4(\tau^2 - 4|\rho|^2 + |R|^2),$$

donc on a

$$(7.4)\qquad k_4 = \int_M H_4 . v = 4(B - 4C + D).$$

On peut songer à calculer, pour une variation $\underline{g}$ de structures riemanniennes, la dérivé k'_4. De (5.1), (5.2), (6.1), on tire

$$(7.5)\qquad k'_4 = \left\langle h, \frac{1}{8} . H_4 . g - 2(\check{R} + L\rho - 2\check{\rho} + \tau.\rho) \right\rangle.$$

Il est plaisant de constater que k'_4 est le produit scalaire de h avec un élément de $S^2(M)$ qui est un polynôme en la courbure mais, à la différence de B′, C′, D′, ne fait plus intervenir les dérivées covariantes de la courbure. Il serait intéressant de voir si ce phénomène reste vrai pour tous les k'_e, de l'expliquer alors. Il faudrait aussi caractériser les variétés riemanniennes rendant critique la fonction k_4. C'est peut-être un problème plus naturel que de caractériser les variétés rendant critique la fonction B, ou C, ou D (toutes choses que nous n'avons pas su faire). Pour le cas de B, *voir* [1], p. 40 et le n° 8.*c* de [2].

8. A propos d'un problème de Singer. — La formule de Gauss-Bonnet (7.1) fournit un invariant riemannien, fonction sur M, et en chaque

point polynôme en le tenseur de courbure, dont l'intégrale est un invariant topologique de M. En regardant les choses comme dans [(6], p. 318-319), on peut dire que l'on possède sur M une n-forme différentielle alternée, polynôme en le tenseur de courbure, dont le représentant, par le théorème de De Rham, dans le groupe de cohomologie réelle $H^n(M; R)$, ne dépend que de M et non de la structure riemannienne considérée. Il y en a d'autres : à savoir pour chaque k tel que $4k \leq n$, les formes différentielles alternées (de degré $4k$) P_{4k}, polynômes en le tenseur de courbure, et dont le représentant dans $H^{4k}(M; R)$ est la $k^{\text{ième}}$-classe de Pontriagin de la variété compacte M (*voir* [6], chap. XII, nº 4). En particulier, si les entiers k_i $(i = 1, \ldots, s)$ sont tels que $4k_1 + \ldots + 4k_s = n$, le scalaire $f_{k_1 \ldots k_s}$ tel que

$$P_{4k_1} \wedge \ldots \wedge P_{4k_s} = f_{k_1 \ldots k_s} v$$

est un polynôme en le tenseur de courbure, dont l'intégrale sur M est un invariant topologique, indépendant de la structure riemannienne considérée sur M. Noter enfin que les polynômes en le tenseur de courbure du genre de f sont des invariants orthogonaux, en ce sens que $f(m)$, pour tout $m \in M$, est invariant par le groupe orthogonal de $T_m M$ opérant sur les polynômes en le tenseur de courbure $R(m)$.

I. Singer a posé la question suivante : y a-t-il d'autres invariants de ce type autres que ceux engendrés linéairement par H_n et les $f_{k_1 \ldots k_s}$? La même question se pose en permettant même aux polynômes d'être en le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes.

Nous avons mentionné ce problème pour remarquer que *les formules* (5.1), (5.2), (6.2) *permettent de résoudre cette question dans le cas simple* $n = 4$. Voici la démonstration de ce fait, basée sur les pages 63-65 de [8], *voir* aussi [3].

Pour des raisons de degré d'homogénéité, notre polynôme doit être quadratique en le tenseur de courbure et linéaire en $\nabla\nabla R$; le morceau en $\nabla\nabla R$ donne le laplacien $\Delta\tau$, donc toujours zéro après intégration. Les seuls invariants orthogonaux quadratiques sont τ^2, $|\rho|^2$, $|R|^2$ (invariants par tout le groupe orthogonal) et P_4, la 1^{re} classe de Pontriagin (invariante par le groupe des rotations seulement, mais ci-dessus, par simplification, nous avions employé le seul mot groupe orthogonal). On sait déjà que P_4 et $\tau^2 - 4|\rho|^2 + |R|^2$ fournissent effectivement des invariants; pour montrer qu'il n'y en pas d'autres, il suffit de considérer une combinaison linéaire quelconque $bB + cC + dD$.

Si $bB + cC + dD$ est un invariant, en particulier pour n'importe quelle structure riemannienne sur n'importe quelle variété compacte M de dimension 4, on a $bB'(0) + cC'(0) + dD'(0) = 0$ pour toute variation $\underline{g}$, en particulier pour tout $h \in S^2(M)$. C'est donc que nécessairement

$$(8.1)\quad (c+4d)\,\bar{\Delta}\rho + (2b+c+2d)\,\mathrm{Hess}\,\tau + \left(2b+\frac{2}{c}\right)\Delta\tau . g$$
$$+\frac{1}{2}(b\tau^2 + c\,|\rho|^2 + d\,|\mathrm{R}|^2).g - 2d\check{\mathrm{R}} + (c+2d)\,\mathrm{L}\rho + 4d\check{\rho} - 2b\tau\rho = 0.$$

Spécialisons g dans (8.1), avec $M = S^1 \times S^3$, munie de sa structure riemannienne canonique; on a $\nabla R = 0$, donc tous les termes $\bar{\Delta}\rho$, $\mathrm{Hess}\,\tau$, $\Delta\tau$ sont nuls. Puis on a en chaque point des bases orthonormées e_1, e_2, e_3, e_4 telles que R ait comme seules composantes non nulles :

$$R_{1212} = R_{2323} = R_{2424} = R_{3434} = 1.$$

Un calcul direct, utilisant seulement les définitions des êtres entrant dans (8.1), montre que $3b + c + d = 0$.

En spécialisant de même avec $S^2 \times S^2$, munie de la structure riemannienne produit de celle de courbure constante 1 sur le premier facteur et 2 sur le second, on trouve cette fois-ci $2b + c + 2d = 0$. En conclusion, il est nécessaire, si $b\mathrm{B} + c\mathrm{D} + d\mathrm{D}$ est un invariant, que $b = d$ et $c = -4b$, soit $b(\mathrm{B} - 4\mathrm{C} + \mathrm{D})$, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. Berger, *Sur les variétés d'Einstein compactes* (*Comptes rendus de la 3e réunion des mathématiciens d'expression latine*, Namur, 1965).

[2] M. Berger et D. Ebin, *Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifolds* (*J. of Diff. Geometry*, vol. 3, 1969, p. 379-392).

[3] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne* (à paraître).

[4] D. Ebin, *The manifolds of riemannian metrics* (à paraître).

[5] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (*Nachr. Ges. Wiss. Gött.*, 1915, p. 395-407).

[6] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience, John Wiley.

[7] A. Lichnérowicz, *Propagateurs et commutateurs en relativité générale* (Public. Scient. I. H. E. S., nº 10).

[8] H. P. Mc Kean et I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the laplacian* (*J. Diff. Geometry*, vol. 1, 1967, p. 43-69).

[9] H. Weyl, *On the volume of tubes* (*Amer. J. Math.*, vol. 61, 1939, p. 461-472).

(Manuscrit reçu le 16 juin 1970.)

Marcel Berger,
11 *bis*, avenue de Suffren,
75-Paris, 7e.