

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PH. REVOY

## Sur les deux premiers invariants d'une forme quadratique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 2 (1971), p. 311-319

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1971\\_4\\_4\\_2\\_311\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_2_311_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES DEUX PREMIERS INVARIANTS D'UNE FORME QUADRATIQUE

PAR PH. REVOY.

### TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
1. L'ensemble X d'une extension quadratique.....	311
2. L'ensemble X d'une algèbre de Clifford.....	313
3. Le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ .....	315
4. Le théorème fondamental.....	316
5. Conséquences.....	317
6. Bibliographie.....	319

#### 1. L'ensemble X d'une extension quadratique.

Soit  $B$  une extension quadratique séparable de l'anneau commutatif et unitaire  $A$ , c'est-à-dire une  $A$ -algèbre commutative projective de rang 2 en tant que  $A$ -module, et séparable. Si  $\sigma$  désigne l'unique  $A$ -automorphisme de  $B$  différent de l'identité, la norme  $N : B \rightarrow A$  définie par  $N(x) = x\sigma(x)$  est une forme quadratique non dégénérée sur le  $A$ -module  $B$ , comme le montre un calcul local. En effet, localement  $B$  est de la forme  $A[x]$  avec  $x^2 = x + m$  et  $1 + 4m$  est inversible dans  $A$  pour des raisons de séparabilité; la norme  $N(u + vx)$ ,  $u$  et  $v \in A$ , est alors égale à  $u^2 + uv - mv^2$  qui est bien une forme quadratique non dégénérée. L'algèbre de Clifford  $C(B, N)$  est alors une  $A$ -algèbre centrale séparable et  $C_0(B, N)$ , partie homogène de degré 0 de  $C(B, N)$  est une extension quadratique de  $A$ ; si  $u \in C_1(B, N)$  est l'image de l'unité de  $B$  dans  $C(B, N)$ ,  $u^2 = N(u) = 1$  et les applications  $x \mapsto xu$  de  $C_1(B, N) = B$  dans  $C_0(B, N)$  et  $y \mapsto yu$  de  $C_0(B, N)$  dans  $C_1(B, N)$  sont des isomorphismes réciproques de  $A$ -modules. On vérifie, par exemple par un calcul local, que les multiplications sur  $B$  et  $C_0(B, N)$  coïncident. Ainsi  $C_0(B, N)$  est isomorphe à  $B$  en tant que  $A$ -algèbre.

Soit alors

$$X(B) = \{ x \in C_0(B, N) \mid xy + yx = 0, \forall y \in C_1(B, N) \}.$$

L'algèbre  $C(B, N)$  est munie d'une forme quadratique canonique  $Q$  de la façon suivante : soit  $z \mapsto \bar{z}$  l'unique  $A$ -anti-automorphisme de  $C(B, N)$  dont l'ensemble des invariants est le centre  $A$  de  $C(B, N)$  et  $Q(z) = z\bar{z}$ . Pour cette forme,  $C_0(B, N)$  et  $C_1(B, N)$  sont orthogonaux et

$$(C(B, N), Q) = (C_0(B, N), N) \perp (B, -N).$$

Cela signifie en passant à la forme bilinéaire associée à  $Q$  que  $xy = y\sigma(x)$  pour  $x \in C_0(B, N)$  et  $y \in C_1(B, N)$ . On voit donc que

$$X(B) = \{ x \in C_0(B, N) = B \mid x + \sigma(x) = 0 \} = \text{Ker}(\text{I}_B + \sigma)$$

en identifiant  $B$  et  $C_0(B, N)$ . En particulier, si  $2 = 0$  dans  $A$ ,  $\sigma + \text{I}_B = \sigma - \text{I}_B$  et donc  $X(B) = B^\sigma = A$ . Si  $2$  est inversible dans  $A$ ,

$$B = \text{Ker}(\text{I}_B - \sigma) \oplus \text{Ker}(\text{I}_B + \sigma) = A \oplus X(B)$$

car  $\text{I}_B + \sigma$  et  $\text{I}_B - \sigma$  sont à un facteur  $\frac{1}{2}$  près, des projecteurs orthogonaux dont la somme est l'identité de  $B$ . Dans le cas général,  $X(B)$  est un  $A$ -module projectif de type fini et de rang 1, comme on le voit par localisation. Si  $x$  et  $x'$  sont dans  $X(B)$ , la relation  $xy + yx = 0, \forall y \in C_1(B, N)$  montre que, quel que soit  $y$  dans  $B = C_1(B, N)$ ,  $(xx')y = y(xx')$ ; donc  $xx'$  est dans le centre de  $C(B, N)$  donc dans l'anneau  $A$  [remarquons qu'ici nous utilisons le fait que  $B$  et  $C_0(B, N)$  sont des  $A$ -algèbres isomorphes]. L'application  $A$ -linéaire  $\mu_B : X(B) \otimes X(B) \rightarrow A$  définie par  $\mu_B(x \otimes x') = x.x'$  est un isomorphisme car c'est vrai localement : si  $B = A[x]$  avec  $x^2 = x + m$ ,  $X(B)$  est le  $A$ -module libre engendré par  $1 - 2x$  et  $(1 - 2x)^2 = 1 + 4m$  est inversible dans  $A$ . Si  $2$  est inversible dans  $A$ , la multiplication sur  $B = A \oplus X(B)$  est donnée de la manière suivante :

$$(a, x)(a', x') = (aa' + \mu_B(x \otimes x'), ax' + a'x)$$

et le module quadratique  $(B, N)$  possède la décomposition orthogonale

$$(B, N) = (A, m) \perp (X(B), -\bar{\mu}_B),$$

où  $m$  désigne la forme quadratique sur  $A$  définie par  $m(a) = a^2$  et  $-\bar{\mu}_B$  la forme quadratique sur  $X(B)$

$$-\bar{\mu}_B(x) = -\mu_B(x \otimes x) = -x^2 = N(x)$$

car  $\sigma(x) = -x$  dans  $X(B)$ .

## 2. L'ensemble X d'une algèbre de Clifford.

Soient (P, Q) un A-module quadratique, P projectif de type fini et de rang pair et Q non dégénérée, et C son algèbre de Clifford [2]. On pose

$$X(C) = \{x \in C_0 \mid xy + yx = 0, \forall y \in P\},$$

$C_0$  désignant la sous-algèbre formée par les éléments homogènes de degré 0. Il est clair que les éléments de  $X(C)$  commutent avec les éléments de  $C_0$ , donc que  $X(C)$  est dans le centre  $Z(C_0)$  de l'algèbre  $C_0$ , qui est une extension quadratique séparable de l'anneau A. De plus, si  $x \in Z(C_0)$  et  $y \in P$ ,  $xy = y\sigma(x)$  dans C,  $\sigma$  désignant toujours l'automorphisme distinct de l'identité de  $Z(C_0)$  : pour montrer cela, considérons l'anti-automorphisme canonique de  $T(P)$  défini par

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto x_n \otimes \dots \otimes x_1.$$

Il induit un anti-automorphisme de C qui laisse invariants les éléments de P et qui conserve globalement  $C_0$  et, en particulier, son centre  $Z(C_0)$ . Il est alors facile de vérifier que sa restriction à  $Z(C_0)$  est l'automorphisme  $\sigma$  de  $Z(C_0)$ , d'où la relation indiquée. Se reportant à la définition de  $X(C)$ , on voit que

$$X(C) = \text{Ker}(\sigma + \mathbf{1}_{Z(C_0)}) = X(Z(C_0)).$$

Soient alors B et B' deux extensions quadratiques séparables de A. On sait définir sur l'ensemble  $\mathfrak{B}(A)$  des classes d'isomorphismes d'extensions quadratiques séparables de A une structure de groupe [1] :  $B \star B'$  est la classe de l'algèbre  $(B \otimes B')^{\sigma \otimes \sigma'}$ . Considérons alors dans  $B \otimes B'$  le sous-A-module

$$\begin{aligned} X(B) \otimes X(B') : (\sigma \otimes \sigma')(x \otimes x') &= (-x) \otimes (-x') = x \otimes x' \\ \text{si } x \in X(B) \text{ et } x' \in X(B'). \end{aligned}$$

Donc  $X(B) \otimes X(B')$  est un sous-module de  $B \star B'$ . De plus, l'automorphisme  $\sigma \star \sigma'$  de  $B \star B'$  distinct de l'identité n'est autre que la restriction à  $B \star B'$  de  $\sigma \otimes \mathbf{1}_{B'}$  ou de  $\mathbf{1}_B \otimes \sigma'$ . En conséquence,

$$(\sigma \star \sigma')(x \otimes x') = -x \otimes x'$$

si  $x \otimes x'$  est dans  $X(B) \otimes X(B')$ ; donc  $X(B) \otimes X(B')$  s'identifie à un sous-module de  $X(B \star B')$ . Si  $\varphi$  désigne cette injection, le diagramme suivant

est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X(B) \otimes X(B') \otimes X(B) \otimes X(B') & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & X(B \star B') \otimes X(B \star B') \\
 \downarrow t & & \downarrow \mu_{B \star B'} \\
 X(B) \otimes X(B) \otimes X(B') \otimes X(B') & & \\
 \downarrow \mu_B \otimes \mu_{B'} & & \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

$\mu_B$ ,  $\mu_{B'}$  et  $\mu_{B \star B'}$  désignent les applications vues au paragraphe 1,  $t$  est la transposition des facteurs dans le produit tensoriel et  $m$  la multiplication dans l'anneau  $A$ . Ceci nous montre que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $A$ -modules et que  $\mu_{B \star B'} = \mu_B \otimes \mu_{B'}$  par cet isomorphisme.

Rappelons que  $\mathcal{H}_0(A)$  désigne le groupe des classes d'algèbres de Clifford de modules de rang pair [2] et désignons par  $\mathcal{Q}(A)$  le groupe formé par les paires  $(P, \alpha)$ ,  $P$   $A$ -module projectif de rang 1 et  $\alpha : P \otimes P \rightarrow A$  isomorphisme de  $A$ -modules, défini dans [3]. On a alors la

**PROPOSITION 1.** — *Les applications  $C \mapsto Z(C_0)$ ,  $C \mapsto (X(C), \mu)$  et  $B \mapsto (X(B), \mu_B)$  induisent un triangle commutatif de groupes abéliens :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}_0(A) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(A) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{X}(A) &
 \end{array}$$

Dans [2], on démontre que si  $C$  et  $C'$  sont deux algèbres de Clifford de modules projectifs de rang pair,

$$Z((C \hat{\otimes} C')_0) = Z(C_0) \star Z(C'_0);$$

pour le reste, la proposition résume les résultats de la partie 2. Remarquons que  $\mathcal{H}_0(A) \rightarrow \mathcal{Q}(A)$  est surjective d'après la partie 1 et que si 2 est inversible dans  $A$ ,  $\mathcal{Q}(A) \rightarrow \mathcal{X}(A)$  est un isomorphisme ([3]). On peut donner une troisième définition de l'invariant  $X$  d'un module quadratique  $(P, Q)$ . Si  $P$  est un module projectif de rang constant  $n$ ,  $\Lambda^n P$  est un module projectif de rang 1; si le rang de  $P$  n'est pas constant, soit  $r$  la fonction rang de  $P$ ,  $r : \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbf{N}$ . On définit alors  $\Lambda^r P$  et c'est bien un  $A$ -module projectif de rang 1. Si  $\Phi$  est la forme bilinéaire symétrique à  $Q$ ,  $\Lambda^r \Phi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\Lambda^r P$  non dégénérée.  $\Lambda^r \Phi$  induit un isomorphisme  $\Lambda^r \Phi : \Lambda^r P \rightarrow (\Lambda^r P)^*$  auquel on peut associer un isomorphisme

$$\Lambda^r P \otimes \Lambda^r P \xrightarrow{1 \otimes \Lambda^r \Phi} \Lambda^r P \otimes \Lambda^r P^* \xrightarrow{\tau} A,$$

le second isomorphisme  $\tau$  étant l'isomorphisme  $x \otimes x^* \rightarrow x^*(x)$ . Supposons le module projectif  $P$  de rang pair, c'est-à-dire  $r = 2r'$  : on vérifie alors que

$$(X(C), \mu) \simeq (\Lambda^r P, (-1)^{r'} \tau \circ (1 \otimes \Lambda^r \Phi)).$$

La vérification se fait localement et pour cela on peut décomposer  $P$  en somme orthogonale de sous-modules de rang 2 et vérifier le résultat si le rang de  $P$  est égal à 2. Alors  $P$  a une base  $\{e_1, e_2\}$ ,  $X(C)$  est libre et engendré par l'élément

$$x = \Phi(e_1, e_2) - 2e_2e_1 \quad \text{et} \quad x^2 = \Phi^2(e_1, e_2) - 4Q(e_1)Q(e_2) = -\det \Phi,$$

alors que si  $y$  est le générateur  $e_1 \wedge e_2$  de  $\Lambda^2 P$ ,

$$\tau \circ (1 \otimes \Lambda^2 \Phi)(e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \wedge e_2) = \det \Phi.$$

### 3. Le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ .

Soient maintenant  $C$  et  $C'$  deux algèbres de Clifford de modules projectifs rang pair  $P$  et  $P'$  munis de formes quadratiques  $Q$  et  $Q'$  non dégénérées. L'algèbre  $C \hat{\otimes} C'$  est l'algèbre de Clifford de  $(P \oplus P', Q \oplus Q')$  somme orthogonale des deux modules quadratiques. Soient alors  $P'' = X(C) \otimes P'$  et  $Q''$  la forme quadratique définie sur  $P''$  par

$$Q''(x \otimes m') = \mu(x \otimes x) Q'(m') = x^2 \cdot Q'(m');$$

$Q''$  est non dégénérée car localement cela revient à multiplier  $Q'$  par un élément inversible de  $A$ . L'injection naturelle  $i : P'' = X(C) \otimes P' \rightarrow C \hat{\otimes} C'$  vérifie la relation

$$[i(x \otimes m')]^2 = (x \otimes m')(x \otimes m') = x^2 m'^2 = Q''(x \otimes m')$$

donc se prolonge en un homomorphisme de  $A$ -algèbres de  $C'' = C(P'', Q'')$  dans  $C \hat{\otimes} C'$  qui est injectif, car c'est l'identité sur  $A$  et [que]  $C''$  est une  $A$ -algèbre centrale séparable. Le commutant de  $C''$  dans  $C \hat{\otimes} C'$  contient  $C \otimes 1$ , car si  $m \in P$  et  $x \otimes m' \in X(C) \otimes P'$ ,

$$(m \otimes 1) \cdot (x \otimes m') = mx \otimes m', \quad (x \otimes m') \cdot (m \otimes 1) = -xm \otimes m'$$

car le produit  $C \hat{\otimes} C'$  est un produit tensoriel d'algèbres  $\mathbf{Z}_2$ -graduées et  $m$  et  $m'$  sont homogènes de degré 1. Comme  $x \in X(C)$ ,  $xm + mx = 0$  dans  $C$  et donc

$$(m \otimes 1) \cdot (x \otimes m') = (x \otimes m')(m \otimes 1)$$

et  $C \otimes 1$  est la sous-algèbre de  $C \hat{\otimes} C'$  engendrée par les éléments  $m \otimes 1$  pour  $m \in P$ . Comme  $C$  est séparable ainsi que  $C \hat{\otimes} C'$ , et que  $C'$  et  $C''$  sont de même rang [ $P'' = X(C) \otimes P'$  a même rang que  $P'$ ], on en déduit que  $C$  est exactement égale au commutant de  $C''$  dans  $C \hat{\otimes} C'$  ([1], chap. III, § 4, cor. 4.3, p. 107), donc  $C \hat{\otimes} C' = C \otimes C''$ , d'où le résultat de [2], p. 283. Remarquons que si  $P_1 = P \otimes X(C')$  et  $Q_1(m \otimes x') = x'^2 Q(m)$ , alors  $C \hat{\otimes} C'$  est isomorphe à  $C_1 \otimes C'$ , où  $C_1 = C(P_1, Q_1)$ , c'est-à-dire qu'on peut modifier l'un ou l'autre des deux facteurs de  $C \hat{\otimes} C'$ .

**COROLLAIRE** ([2], [3]). — Si  $2 = 0$  dans  $A$ ,  $C \otimes C' = C \hat{\otimes} C'$  et la suite exacte de groupes abéliens  $0 \rightarrow N(A) \rightarrow \mathcal{H}_0(A) \rightarrow \mathcal{Z}(A) \rightarrow 0$  se scinde. Si  $Z(C_0)$  où  $Z(C'_0)$  est 0 dans  $\mathcal{Z}(A)$ , on a de même  $C \otimes C' \simeq C \hat{\otimes} C'$ .

En effet, dans les deux cas,  $(X(C), \mu)$  est isomorphe à  $(A, m)$ , donc  $(P'', Q'') \simeq (P', Q')$  et  $C'' \simeq C'$  (si  $2 = 0$ , il y a égalité). On peut, si  $2 = 0$ , le vérifier directement : si  $x \in P$ ,  $x' \in P'$ ,

$$(1 \otimes x')(x \otimes 1) = -x \otimes x' = x \otimes x' = (x \otimes 1)(1 \otimes x'),$$

d'où le résultat.

#### 4. Le théorème fondamental.

**THÉORÈME** [3]. — Soient  $(P, Q)$  et  $(P', Q')$  deux  $A$ -modules projectifs de rang pair munis de formes quadratiques non dégénérées,  $C$  et  $C'$  leurs algèbres de Clifford et  $B$  et  $B'$  les extensions quadratiques  $Z(C_0)$  et  $Z(C'_0)$  correspondants. Alors

$$C \hat{\otimes} C' \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') \simeq C \otimes C' \otimes C(B \oplus B', N \oplus N'),$$

et les algèbres  $C(B, N)$  et  $C(B', N')$  sont des algèbres triviales dans le groupe de Brauer de  $A$ .

En effet,  $(X(C), \mu_C)$  est isomorphe à  $(X(B), \mu_B)$  et  $(X(C'), \mu_{C'})$  à  $(X(B'), \mu_{B'})$  d'après la partie 2. On applique alors le théorème  $\otimes = \hat{\otimes}$  successivement en utilisant ces deux isomorphismes :

$$\begin{aligned} C \hat{\otimes} C' \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') &\simeq C \otimes C(P' \otimes X(C), Q'') \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') \\ &\simeq C \otimes (C' \hat{\otimes} C(B, N)) \otimes C(B', N') \simeq C \otimes C' \otimes C(B \otimes X(C'), N \otimes \bar{\mu}_C) \otimes C(B', N') \\ &\simeq C \otimes C' \otimes (C(B, N) \hat{\otimes} C(B', N')) \simeq C \otimes C' \otimes C(B \oplus B', N \oplus N'). \end{aligned}$$

La dernière assertion se démontre de la façon suivante : on sait [4] qu'une algèbre centrale séparable de rang 4 est triviale si elle possède un

idempotent non trivial, c'est-à-dire linéairement indépendant avec 1. Si 2 est inversible dans A, soit  $u$  l'image de l'unité de B dans  $C_1(B, N)$  : alors  $e = \frac{1}{2}(1 + u)$  est un idempotent non trivial de  $C(B, N)$ . Dans le cas général, considérons la trace  $\text{Tr} : B \rightarrow A$ . C'est une forme linéaire sur le A-module B; elle est surjective car c'est vrai localement : si  $B = A[x]$  avec  $x^2 = x + m$ ,  $\text{Tr}(x) = 1$ . Soit donc  $y \in B$  tel que  $\text{Tr}(y) = 1$ ; appelons  $y_0$  et  $y_1$  ses images dans  $C_0(B, N)$  et  $C_1(B, N)$  respectivement. Alors  $e = y_0 + y_1$  est un idempotent non trivial :

$$(y_0 + y_1)^2 = y_0^2 + y_1^2 + y_0 y_1 + y_1 y_0$$

et

$$\begin{aligned} y_0 y_1 + y_1 y_0 &= (y_0 + \sigma(y_0)) y_1 = \text{Tr}(y) y_1 = y_1, \\ y_0^2 + y_1^2 &= y_0^2 + N(y_0) = y_0 \text{Tr} y = y_0. \end{aligned}$$

En conséquence  $C(B, N)$  et  $C(B', N')$  sont deux A-algèbres triviales dans le groupe de Brauer de A.

## 5. Conséquences.

1. Considérons la suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow N(A) \rightarrow \mathcal{H}_0(A) \rightarrow \mathcal{Q}(A) \rightarrow 0.$$

Un élément de  $\mathcal{H}_0(A)$  est un couple  $(C, B)$  où C est la classe de l'algèbre de Clifford dans le groupe de Brauer de A et B l'extension quadratique  $Z(C_0)$ ; si on note  $B \cup B'$  la classe de l'algèbre  $C(B \oplus B', N \oplus N')$  dans le groupe de Brauer de A, en fait dans le sous-groupe  $N(A)$  de  $\mathcal{B}r(A)$ ,

$$(C, B) + (C, B') = (C + C' + B \cup B', B \star B'),$$

d'après le théorème précédent ([3] et [5]).

2. Supposons 2 inversible dans A; nous avons vu, dans la première partie, que  $(B, N)$  possède la décomposition orthogonale

$$(B, N) = (A, m) \perp (X(B), -\bar{\mu}_B);$$

alors

$$(B \oplus B', N \oplus N') = (A \oplus A, m \oplus m) \perp (X(B) \oplus X(B'), -(\bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'})).$$



Donc

$$\begin{aligned} C(B \oplus B', N \oplus N') &\simeq C(A \oplus A, m \oplus m) \hat{\otimes} C(X(B) \oplus X(B'), -(\bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'})) \\ &= C(A \oplus A, m \oplus m) \otimes C(X(B) \oplus X(B'), \bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'}) \end{aligned}$$

d'après le théorème  $\otimes = \hat{\otimes}$  car l'invariant  $X$  associé à  $(A \oplus A, m \oplus m)$  est  $(A, -m)$ ; comme  $C(A \oplus A, m \oplus m)$  est triviale dans le groupe de Brauer de  $A$ , on a, dans  $\mathcal{B}r(A)$ ,  $B \cup B' = C(X(B) \oplus X(B'), \bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'})$ . On retrouve ainsi les résultats de Wall dans le cas des corps de caractéristique différente de 2 [5].

3. Supposons que  $-1$  soit un carré dans  $A$ , sans que 2 soit nécessairement inversible. Alors, si  $\mathfrak{W}(A)$  désigne le groupe de Witt de l'anneau  $A$  [1],  ${}_2\mathfrak{W}(A) = 0$ ; en effet, si  $(P, Q)$  est un  $A$ -module quadratique,  $(P, Q)$  et  $(P, -Q)$  sont isométriques; donc

$$(P, Q) \perp (P, Q) \simeq (P, Q) \perp (P, -Q) \simeq H(P)$$

l'espace hyperbolique associé à  $P$  [1]. En particulier,  ${}_2\mathcal{H}(A) = 0$  car  $\mathcal{H}(A)$  est un quotient du groupe  $\mathfrak{W}(A)$ .

Plus généralement, sans supposer que  $-1$  soit un carré dans  $A$ , soit  $A[i]$  l'extension de  $A$  obtenue en ajoutant à  $A$  une racine carrée de  $-1$ , extension qui n'est séparable que si 2 est inversible dans  $A$ . Soit  $(P, Q)$  un  $A$ -module quadratique de rang pair:  $C(P \oplus P, Q \oplus Q)$  est dans  ${}_2\mathcal{H}_0(A)$ , donc dans le sous-groupe  $N(A)$ . De plus,  $(P, Q) \perp (P, Q)$  devient hyperbolique par extensions des scalaires à  $A[i]$ ; donc  $C(P \oplus P, Q \oplus Q)$  devient triviale par cette extension des scalaires et  ${}_2\mathcal{H}_0(A) \subset \mathcal{B}r_2(A[i]/A)$  groupe des éléments d'ordre 2 du groupe de Brauer relatif de  $A$  par rapport à  $A[i]$ . De plus, si 2 est inversible dans  $A$ , la remarque précédente montre que ce sous-groupe de  $\mathcal{B}r_2(A[i]/A)$  est formé de quaternions du fait de la formule  $C \hat{\otimes} C - {}_2C = B \cup B$  et du fait que  ${}_2C = 0$  dans  $\mathcal{B}r(A)$ . On a donc la proposition :

PROPOSITION 2 :

- (i) Si  $-1$  est un carré dans  $A$ ,  ${}_2\mathfrak{W}(A) = 0$ ;
- (ii) Quel que soit l'anneau  $A$ ,  ${}_2\mathcal{H}_0(A)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{B}r_2(A[i]/A)$ ;
- (iii) Si 2 est inversible dans  $A$ ,  ${}_2\mathcal{H}_0(A)$  est formé de quaternions.

*Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Certains résultats de ce papier ont été obtenus indépendamment par Dario Picco (non publiés).

## 6. BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. BASS, *Lectures on topics in algebraic K-theory*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1967.
- [2] A. MICALI et O. E. VILLAMAYOR, *Sur les algèbres de Clifford*, I (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 1, 1968, p. 271-304).
- [3] A. MICALI et O. E. VILLAMAYOR, *Sur les algèbres de Clifford*, II (*Journal für R. und A. Math.*, 242, (1970), p. 61-90).
- [4] A. MICALI et O. E. VILLAMAYOR, *Algèbres de Clifford et groupe de Brauer* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 4, 1971, fasc. 2, p. 285-310).
- [5] C. T. C. WALL, *Graded Brauer groups* (*J. R. und A. Math.*, vol. 213, 1964, p. 187-199).

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1970.)

PH. REVOY,  
U.E.R. de Mathématiques,  
Université des Sciences  
et Techniques du Languedoc,  
34-Montpellier.

