ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DIXMIER

Polarisations dans les algèbres de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 3 (1971), p. 321-335

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_3_321_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 321 à 335.

POLARISATIONS DANS LES ALGÈBRES DE LIE

PAR JACQUES DIXMIER.

Introduction et notations.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif k, $\mathfrak{g}^\star$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. La transposée de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'appelle représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$. Si $f \in \mathfrak{g}^\star$, notons B_f la forme bilinéaire alternée $(x, y) \mapsto f([x, y])$ sur $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de B_f. [Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(f)$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur de f dans G, donc $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}(f)$ est la dimension de la G-orbite de f dans $\mathfrak{g}^\star$.] Posons $m_\mathfrak{g} = \inf_{f \in \mathfrak{g}^\star} \dim \mathfrak{g}(f)$. L'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^\star$ tels que $\dim \mathfrak{g}(f) = m_\mathfrak{g}$ est un ouvert de Zariski dans $\mathfrak{g}^\star$ (son complémentaire est en fait un cône algébrique, comme il est facile de le voir).

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est dit subordonné à f s'il est totalement isotrope pour B_f. Dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels subordonnés à f, les éléments maximaux sont ceux de dimension $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$; ils contiennent $\mathfrak{g}(f)$. On appelle polarisation de $\mathfrak{g}$ en f une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ totalement isotrope pour B_f et de dimension $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$.

Supposons $k = \mathbf{R}$. Soit $x \mapsto \bar{x}$ la conjugaison canonique dans $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ (on notera par l'indice $\mathbf{C}$ la complexification des espaces vectoriels réels, des formes linéaires réelles, etc.). En théorie des représentations, on s'intéresse aux polarisations $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ en $f_\mathbf{C}$ telles que $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$. D'autre part, soit H_f la forme hermitienne $(x, y) \mapsto if_\mathbf{C}([x, y])$ sur $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$. Une polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ en $f_\mathbf{C}$ est dite positive si la restriction de H_f à $\mathfrak{p}$ est une forme hermitienne positive.

Les résultats suivants sont connus :

1° Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble et $k = \mathbf{C}$. Il existe, pour toute $f \in \mathfrak{g}^*$, une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f ([3], th. 7.5).

2° Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble et $k = \mathbf{R}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Il n'existe pas toujours de polarisation de $\mathfrak{g}$ en f. Mais il existe une polarisation positive $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$ telle que $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ ([6]; *cf.* aussi [7]).

3° Supposons $k = \mathbf{C}$. Pour certaines $\mathfrak{g}$ et certaines f, il n'existe aucune polarisation de $\mathfrak{g}$ en f.

B. Kostant a fait les conjectures suivantes :

Conjecture 1 : Supposons $k = \mathbf{C}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$. Il existe une polarisation résoluble de $\mathfrak{g}$ en f.

Conjecture 2 : Supposons $k = \mathbf{R}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$. Il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$ telle que $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Nous verrons qu'il en est bien ainsi : théorèmes 1 et 2. (Le théorème 1 a été obtenu indépendamment par M. Duflo.)

D'autre part, on verra qu'on peut construire une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, extension de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ par une algèbre de Heisenberg de dimension 5, et une $f \in \mathfrak{g}^*$, telle que $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$ et qu'il n'existe aucune polarisation positive de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$. M. Duflo m'a fait remarquer qu'un autre contre-exemple s'obtient ainsi : soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4, 1) \supset \mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{so}(4)$, x un élément régulier de $\mathfrak{h}$, f la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ déduite de x grâce à la forme de Killing; alors il n'existe aucune polarisation positive de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$; cela résulte de [5], p. 276, remarque, ou d'un calcul direct.

Remarquons enfin qu'on peut construire une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 5 sur $\mathbf{C}$, et une $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$ et qu'il existe une polarisation semi-simple de $\mathfrak{g}$ en f.

On emploiera, outre les notations introduites ci-dessus, les notations suivantes :

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et si $x \in \mathfrak{g}$, on notera $\mathfrak{g}^x$ le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}$. Soient V un espace vectoriel, B une forme bilinéaire alternée sur V, et $W \subset V$; on notera $W^\perp$ l'orthogonal de W pour B. On appellera algèbre de Heisenberg une algèbre de Lie admettant une base $(x_1, \ldots, x_{2d+1})$, avec d entier > 0 et

$$[x_1, x_2] = [x_3, x_4] = \ldots = [x_{2d-1}, x_{2d}] = x_{2d+1},$$

les autres crochets des éléments de base étant nuls ou déduits des précédents par antisymétrie. Toutes les algèbres de Lie sont supposées de dimension finie. Pour tout espace vectoriel réel V, la conjugaison canonique dans $V_{\mathbf{C}}$ sera notée $x \mapsto \bar{x}$.

1. Le cas complexe.

Lemme 1. — *Soient k un corps commutatif infini, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ qui est une algèbre de Heisenberg, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{n}$, f un élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $f(\mathfrak{c}) \neq 0$, $\mathfrak{k} = (\mathrm{Ker} f) \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, et $f' = f | \mathfrak{g}'$.*

(i) *$\mathfrak{g}'$ est l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour B_f.*

(ii) $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}'(f')$.

(iii) *Si* $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$, *on a* $\dim \mathfrak{g}'(f') = m_{\mathfrak{g}'}$.

(iv) *On a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{k}$.

L'assertion (i) est claire. La restriction de B_f à $\mathfrak{k}$ est évidemment non dégénérée, d'où (iv) et (ii). Supposons $\dim \mathfrak{g}(f) = m_{\mathfrak{g}}$. Soit U l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}'$ non nulles sur $\mathfrak{c}$; c'est un ouvert de Zariski dans $\mathfrak{g}'^*$. Soit $f'_1 \in \mathrm{U}$. Soit f_1 le prolongement linéaire de f'_1 à $\mathfrak{g}$ qui s'annule sur $\mathfrak{k}$. D'après ce qui précède, on a

$$\mathfrak{g}(f_1) = \mathfrak{g}'(f'_1), \qquad \text{donc} \quad \dim \mathfrak{g}'(f'_1) = \dim \mathfrak{g}(f_1) \geqq \dim \mathfrak{g}(f) = \dim \mathfrak{g}'(f').$$

L'inégalité $\dim \mathfrak{g}'(f'_1) \geqq \dim \mathfrak{g}'(f')$, valable pour toute $f'_1 \in \mathrm{U}$, prouve que $\dim \mathfrak{g}'(f') = m_{\mathfrak{g}'}$.

Lemme 2. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, r le rang de $\mathfrak{g}$, β la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\dim \mathfrak{g}^x = r$. Il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{g}^x$ et $\beta(x, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$.*

Soit $(x_1, x_2, \ldots)$ une suite d'éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ tendant vers x. Alors $\mathfrak{g}^{x_i}$ est, pour tout $i \geqq 1$, une sous-algèbre de Cartan contenant x_i. Soit $\mathfrak{b}_i$ une sous-algèbre de Borel contenant $\mathfrak{g}^{x_i}$. Par extraction de suite partielle, on peut supposer, d'après la compacité de la grassmannienne de $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{g}^x$ tendent vers une limite quand $i \to +\infty$. Alors la limite de $\mathfrak{g}^{x_i}$ est commutative, de dimension r, et contient x, donc cette limite est $\mathfrak{g}^x$. Il est clair que la limite $\mathfrak{b}$ des $\mathfrak{b}_i$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}^x$. Soient $y, z \in \mathfrak{b}$. Il existe $y_i, z_i \in \mathfrak{b}_i$ tels que $y_i \to y$, $z_i \to z$. Il est bien connu que $\beta(\mathfrak{g}^{x_i}, [y_i, z_i]) = 0$. Donc $\beta(x, [y, z]) = 0$ à la limite.

THÉORÈME 1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie complexe, et* $f \in \mathfrak{g}^\star$ *telle que* $\dim \mathfrak{g}(f)$ *soit minimum. Il existe une polarisation résoluble de* $\mathfrak{g}$ *en* f.

Nous raisonnerons par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

1° Supposons d'abord qu'il existe un idéal commutatif $\mathfrak{a} \neq 0$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f(\mathfrak{a}) = 0$. Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ le morphisme canonique, et f' la forme linéaire sur $\mathfrak{g}'$ telle que $f = f' \circ \pi$. Il est immédiat que $\mathfrak{g}(f) \supset \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{g}(f)/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}'(f')$. Soient $f'_1 \in \mathfrak{g}'^\star$ et $f_1 = f'_1 \circ \pi \in \mathfrak{g}^\star$. On a $\dim \mathfrak{g}(f_1) \geqq \dim \mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{g}(f_1)/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}'(f'_1)$, donc $\dim \mathfrak{g}'(f'_1) \geqq \dim \mathfrak{g}'(f')$. On peut donc appliquer à $\mathfrak{g}'$ et f' l'hypothèse de récurrence. Il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{p}'$ en f'. Alors $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(\mathfrak{p}')$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, et l'on a

$$\dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'(f')) + \dim \mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)).$$

(H_1) *Nous supposerons donc désormais que f ne s'annule sur aucun idéal commutatif de* $\mathfrak{g}$ *distinct de* 0.

2° Supposons qu'il existe un idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) \neq 0$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $f([x, \mathfrak{a}]) = 0$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ distincte de $\mathfrak{g}$. Soit $f' = f \mid \mathfrak{g}'$. On a

$$\mathfrak{g}'(f') = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{a} \qquad \text{et} \qquad \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f) = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'(f')$$

d'après [4], lemme 1.3 (ce lemme concerne le cas des algèbres de Lie réelles, mais sa démonstration vaut quel que soit le corps de base). Soit $\mathfrak{a}'$ le noyau de $f \mid \mathfrak{a}$. On a $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$, et $[\mathfrak{g}', \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}'$, donc $\mathfrak{a}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}'$. Soient $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{a}'$, $\pi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}''$ le morphisme canonique, et f'' la forme linéaire sur $\mathfrak{g}''$ telle que $f' = f'' \circ \pi$. On a $\mathfrak{g}'(f')/\mathfrak{a}' = \mathfrak{g}''(f'')$. Soit U l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}''$ dont le noyau ne contient pas $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$. Soient $f''_1 \in \mathrm{U}$, $f'_1 = f''_1 \circ \pi$, et $f_1 \in \mathfrak{g}^\star$ un prolongement de f'_1. On a $f_1(\mathfrak{a}) \neq 0$ et $f_1(\mathfrak{a}') = 0$, donc il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que $f_1 \mid \mathfrak{a} = \lambda f \mid \mathfrak{a}$. Par suite, l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $f_1([x, \mathfrak{a}]) = 0$ est égal à $\mathfrak{g}'$. D'après ce qui précède appliqué à f_1 au lieu de f, on a $\mathfrak{g}'(f'_1) = \mathfrak{g}(f_1) + \mathfrak{a}$. D'autre part, $\mathfrak{g}(f_1) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{a}$. Donc

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}'(f'_1) &= \dim \mathfrak{g}(f_1) + \dim \mathfrak{a} - \dim(\mathfrak{g}(f_1) \cap \mathfrak{a}) \\ &\geqq \dim \mathfrak{g}(f) + \dim \mathfrak{a} - \dim(\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{a}) \\ &= \dim \mathfrak{g}'(f'). \end{aligned}$$

Par suite, $\dim \mathfrak{g}''(f''_1) \geqq \dim \mathfrak{g}''(f'')$. Cela est établi pour toute $f''_1 \in \mathrm{U}$, et U est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}''^\star$. On a donc $\dim \mathfrak{g}''(f''_1) \geqq \dim \mathfrak{g}''(f'')$ pour toute $f'' \in \mathfrak{g}''^\star$ et l'on peut appliquer à $\mathfrak{g}''$ et f'' l'hypothèse de récurrence. Il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{p}''$ en f''. Soit $\mathfrak{p}' = \pi^{-1}(\mathfrak{p}'')$. Alors $\mathfrak{p}'$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}'$ subordonnée à f', de dimension

$$\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}'' + \dim\mathfrak{g}''(f'')) + \dim\mathfrak{a}' = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}' + \dim\mathfrak{g}'(f')) = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}(f)).$$

Ainsi, $\mathfrak{p}'$ est une polarisation résoluble de $\mathfrak{g}$ en f.

(H_2) *Nous supposerons donc désormais que, pour tout idéal commutatif* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{g}$, *on a* $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) = 0$.

3° Il résulte de (H_1) et (H_2) que, pour tout idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ est central; en outre, $\dim\mathfrak{a} \leq 1$, car $\mathfrak{a} \cap \mathrm{Ker}(f)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, nul d'après (H_1). Soient $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{n}$. D'après [2], lemme 10, $\mathfrak{n}$ est de dimension 0 ou 1, ou est une algèbre de Heisenberg. En outre, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$ d'après ce qui précède. On peut alors distinguer trois cas :

(a) Si $\dim(\mathfrak{n}) = 0$, $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

(a') Si $\dim(\mathfrak{n}) = 1$, on a $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n} = \mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{r}$ est nilpotent, d'où $\mathfrak{r} = \mathfrak{n} = \mathfrak{c}$; alors $\mathfrak{g}$ est produit d'une algèbre semi-simple et de $\mathfrak{c}$.

(b) Si $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg, nous poserons $\dim\mathfrak{n} = 2d + 1$. On a $f(\mathfrak{c}) \neq 0$ d'après (H_1).

Nous introduirons alors $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}$, f' comme dans le lemme 1.

Il suffit de prouver le théorème dans les cas (a) et (b) [le cas (a') résulte aussitôt du cas (a)].

4° Dans le cas (a), la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ s'identifie, grâce à la forme de Killing β, à la représentation adjointe. Utilisons les notations du lemme 2. Alors f s'identifie à un élément x de $\mathfrak{g}$ tel que $\dim\mathfrak{g}^x = r$. Il existe donc une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}^x$ et telle que $\beta(x, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$. Ainsi $\mathfrak{b}$ est subordonnée à f. Comme $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel, on a

$$\dim\mathfrak{b} = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}^x + \dim\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}(f) + \dim\mathfrak{g}).$$

Le théorème est donc démontré pour $\mathfrak{g}$ semi-simple.

5° Nous nous placerons désormais dans le cas (b). D'après le lemme 1, on peut appliquer à $\mathfrak{g}'$ et f' l'hypothèse de récurrence. Il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{g}'$ en f'.

Soit c un élément non nul de $\mathfrak{c}$. Il existe une forme bilinéaire alternée non dégénérée B sur $\mathfrak{k}$ telle que $[x, y] = \mathrm{B}(x, y)\,c$ pour $x, y \in \mathfrak{k}$. Soit ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{k}$. Pour $x, y \in \mathfrak{k}$ et $z \in \mathfrak{g}'$, on a

$$B([z, x], y)c + B(x, [z, y])c = [[z, x], y] + [x, [z, y]] = [z, [x, y]] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$$

donc $B(\rho(z)x, y) + B(x, \rho(z)y) = 0$. Comme $\mathfrak{p}'$ est résoluble, il existe, d'après le théorème de Lie, un sous-espace vectoriel $\mathfrak{k}_1$ de $\mathfrak{k}$, de dimension d, stable pour $\rho(\mathfrak{p}')$, et tel que $B(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1) = 0$. Posons

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' + \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{p}' \oplus \mathfrak{k}_1.$$

On a

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{p} &= \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'(f')) + d = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - 2d + \dim \mathfrak{g}(f)) + d \\ &= \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] + [\mathfrak{p}', \mathfrak{k}_1] + [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1] \subset [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] + \mathfrak{k}_1 + B(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1)c \subset [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] + \mathfrak{k}_1.$$

Cela prouve d'abord que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et ensuite que $f([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) \subset f'([\mathfrak{p}', \mathfrak{p}']) + f(\mathfrak{k}) = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{p}$ est subordonnée à f. Enfin, $\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n})$ est isomorphe à un quotient de $\mathfrak{p}'$, donc est résoluble, de sorte que $\mathfrak{p}$ est résoluble.

2. Le cas réel.

LEMME 3. — *On reprend les hypothèses et les notations du lemme* 1. *On suppose de plus que k est de caractéristique* 0, *et que $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$.*

(i) *Le radical de $\mathfrak{g}'$ est $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$, et $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie produit de $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$ et d'une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{s}$.*

(ii) *$\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$.*

(iii) *Soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$. On a*

$$\begin{gathered}\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{c}, \\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}, \qquad [\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = 0, \qquad [\mathfrak{s}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{s}, \mathfrak{c}] = 0 \\ [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{t}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{c}] = 0\end{gathered}$$

Rappelons que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{k}. \tag{1}$$

On a $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{k}$, donc

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}) \oplus \mathfrak{k}, \tag{2}$$

et $\mathfrak{g}'/(\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r})$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}'+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}=\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ [d'après (1)], donc semi-simple. Par suite : 1° $\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}$ est le radical de $\mathfrak{g}'$; 2° si $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{s}$ est aussi une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$. On a, d'après (2) :

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus(\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r})\oplus\mathfrak{k},\qquad \mathfrak{g}'=\mathfrak{s}\oplus(\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}). \tag{3}$$

Soit ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{r}$. Comme $\mathfrak{c}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{n}$, on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{c}]\subset\mathfrak{c}$. En particulier,

$$\rho(\mathfrak{s})(\mathfrak{c})=0 \tag{4}$$

puisque $\dim\mathfrak{c}=1$. D'autre part, $\rho(\mathfrak{s})(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{k}$ par définition de $\mathfrak{g}'$. Puisque ρ est complètement réductible, et que ρ laisse stable $\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{w}$ supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}$ et stable pour ρ. La somme $\mathfrak{w}+\mathfrak{c}+\mathfrak{k}$ est directe d'après (2). On a

$$[\mathfrak{s},\mathfrak{w}]\subset\mathfrak{w}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]\subset\mathfrak{w}\cap\mathfrak{n}=\mathfrak{w}\cap(\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{k})=0. \tag{5}$$

Donc $[\mathfrak{s},\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}]=[\mathfrak{s},\mathfrak{c}+\mathfrak{w}]=0$ d'après (4) et (5). On a prouvé (i) et (ii).

Soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}$. On a $\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{r}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{c}$ d'après (2), et $\mathfrak{g}'=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{c}$ d'après (3). Il est clair que $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{s}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]=\mathfrak{c}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{c}]=0$. Comme $[\mathfrak{g}',\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k}$, on a $[\mathfrak{s},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{t},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k}$. Comme $[\mathfrak{s},\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{r}]=0$ d'après (i), on a $[\mathfrak{s},\mathfrak{t}]=[\mathfrak{s},\mathfrak{c}]=0$. D'autre part,

$$[\mathfrak{t},\mathfrak{t}]\subset\mathfrak{g}'\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]\subset\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{n}=(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{c})\cap(\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{c})=\mathfrak{c}.$$

On a prouvé (iii).

LEMME 4. — *Soient k un corps commutatif, $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie sur k, V un espace vectoriel sur k de dimension finie, B une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V, σ une représentation linéaire complètement réductible de $\mathfrak{s}$ dans V laissant B invariante. Soit I l'ensemble des classes de $\mathfrak{s}$-modules simples de dimension finie. Soient $\sigma=\bigoplus_{i\in I}\sigma_i$ la décomposition de σ en représentations isotypiques, V_i l'espace de σ_i. Pour tout $i\in I$, soit τ_i une représentation de classe i.*

(i) *Soit σ' une sous-représentation irréductible de σ, opérant dans un espace V'. La restriction de B à V' est nulle ou non dégénérée.*

(ii) *Soient σ', σ'' des sous-représentations irréductibles de σ, opérant dans des espaces V', V''. Si σ'' n'est pas équivalente à ${}^t\sigma'$, V' et V'' sont orthogonaux pour B.*

(iii) *Soit I_1 l'ensemble des $i\in I$ tels que $\tau_i\sim{}^t\tau_i$. Si $i\in I_1$ et $j\in I-\{i\}$, V_i et V_j sont orthogonaux pour B.*

(iv) *Soit* $I_2 = I - I_1$. *Choisissons une partition* $I_2 = I'_2 \cup I''_2$ *et une bijection* ω *de* I'_2 *sur* I''_2 *telles que* $\tau_{\omega(i)} \sim {}^t\tau_i$ *pour tout* $i \in I'_2$. *Si* $i \in I'_2$ *et* $j \in I - \{i, \omega(i)\}$, $V_i \oplus V_{\omega(i)}$ *et* V_j *sont orthogonaux pour* B. *En outre,* V_i *et* $V_{\omega(i)}$ *sont totalement isotropes maximaux pour* B *dans* $V_i \oplus V_{\omega(i)}$.

Soient σ' et V' comme dans (i). Alors $V' \cap V'^{\perp}$ est stable pour σ, donc nul ou égal à V'. Dans le premier (resp. deuxième) cas, la restriction de B à V' est non dégénérée (resp. nulle).

Soient σ', σ'', V', V'' comme dans (ii). Alors $V'^{\perp}$ est stable pour σ, et B définit une forme bilinéaire non dégénérée sur $V' \times (V/V'^{\perp})$. La représentation déduite de σ dans $V/V'^{\perp}$ est donc équivalente à ${}^t\sigma'$. Comme σ'' est non équivalente à ${}^t\sigma'$, on a $V'' \subset V'^{\perp}$.

Soient $i \in I_1$ et $j \in I - \{i\}$. Alors ${}^t\tau_i$ est non équivalente à τ_j, donc V_i et V_j sont orthogonaux d'après (ii).

Soient $i \in I'_2$ et $j \in I - \{i, \omega(i)\}$. D'après (ii), V_i et $V_{\omega(i)}$ sont totalement isotropes, et V_j est orthogonal à V_i et $V_{\omega(i)}$. Il en résulte d'abord que la restriction de B à $V_i \oplus V_{\omega(i)}$ est non dégénérée; comme V_i et $V_{\omega(i)}$ sont totalement isotropes et supplémentaires dans $V_i \oplus V_{\omega(i)}$, V_i et $V_{\omega(i)}$ sont totalement isotropes maximaux dans $V_i \oplus V_{\omega(i)}$.

LEMME 5. — *Soient* $\mathfrak{s}$ *une algèbre de Lie semi-simple réelle,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{m}$ *une algèbre de Lie résoluble réelle,* V *un espace vectoriel réel de dimension finie,* B *une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur* V, ρ *une représentation linéaire de* $\mathfrak{s} \times \mathfrak{m}$ *dans* V *laissant* B *invariante. Il existe une suos-algèbre de Borel* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ *contenant* $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ *et un sous-espace vectoriel* W *de* $V_{\mathbf{C}}$, *avec les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$;

(ii) W *est totalement isotrope maximal pour* $B_{\mathbf{C}}$;

(iii) $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}})\, W \subset W$;

(iv) $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}})\,(W + \overline{W}) \subset W + \overline{W}$.

1° Soit σ la restriction de ρ à $\mathfrak{s}$. Soit Δ (resp. Θ) l'ensemble des racines de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ (resp. des poids de $\sigma_{\mathbf{C}}$) relativement à $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$. Il existe une base $(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$ et un entier $s \leq r$ possédant les propriétés suivantes : 1° $u_1, \ldots, u_s$ sont réelles sur $\mathfrak{h}$; 2° $u_{s+1}, \ldots, u_r$ sont purement imaginaires sur $\mathfrak{h}$; 3° si $\mathfrak{h}_*$ désigne le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$ engendré par $u_1, \ldots, u_r$, on a $\Delta \subset \mathfrak{h}_*$, donc $\Theta \subset \mathfrak{h}_*$. Si $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r \in \mathfrak{h}_*$ (où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}$), on a

$$\overline{u} = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_s u_s - \lambda_{s+1} u_{s+1} - \ldots - \lambda_r u_r.$$

Ordonnons lexicographiquement $\mathfrak{h}_*$ grâce à la base $(u_1, \ldots, u_r)$. Soit $\mathfrak{h}_{*2}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{h}_*$ dont les s premières coordonnées sont nulles, et $\mathfrak{h}_{*1}$ le complémentaire de $\mathfrak{h}_{*2}$ dans $\mathfrak{h}_*$. Soient Δ^+, Δ_1^+, Δ_2^+, Θ^+, Θ_1^+, Θ_2^+ l'ensemble des éléments > 0 de Δ, $\Delta \cap \mathfrak{h}_{*1}$, $\Delta \cap \mathfrak{h}_{*2}$, Θ, $\Theta \cap \mathfrak{h}_{*1}$, $\Theta \cap \mathfrak{h}_{*2}$. Pour $\alpha \in \Delta$ (resp. Θ) soit $\mathfrak{s}_\alpha$ (resp. V_α) le sous-espace vectoriel correspondant de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ (resp. $V_{\mathbf{C}}$). On a $\dim \mathfrak{s}_\alpha = 1$, $\dim V_\alpha \geq 1$. Chaque V_α est stable pour $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}})$.

Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_{\mathbf{C}} + \Sigma_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{s}_\alpha$. Alors $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ contenant $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$. On a

$$\overline{\Delta} = \Delta, \qquad \overline{\Delta_1^+} = \Delta_1^+, \qquad \overline{\Delta_2^+} = -\Delta_2^+.$$

Donc

$$\mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h}_{\mathbf{C}} + \Sigma_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{s}_\alpha + \Sigma_{\alpha \in \Delta_2^+} \mathfrak{s}_\alpha + \Sigma_{\alpha \in \Delta_2^+} \mathfrak{s}_{-\alpha} = \mathfrak{b} + \Sigma_{\alpha \in \Delta_2^+} \mathfrak{s}_{-\alpha}.$$

Soient $\alpha \in \Delta^+$ et $\beta \in \Delta_2^+$. Si $\alpha - \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, on a $[\mathfrak{s}_\alpha, \mathfrak{s}_{-\beta}] = 0$. Supposons $\alpha - \beta \in \Delta \cup \{0\}$. Si $\alpha \in \Delta_1^+$, on a $\alpha - \beta \in \Delta^+$, donc $[\mathfrak{s}_\alpha, \mathfrak{s}_{-\beta}] \subset \mathfrak{b}$. Si $\alpha \in \Delta_2^+$, on a $\alpha - \beta \in \Delta_2^+ \cup (-\Delta_2^+) \cup \{0\}$, donc $[\mathfrak{s}_\alpha, \mathfrak{s}_{-\beta}] \subset \mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}}$. On voit de façon analogue que, si $\gamma \in \Delta_2^+$, on a $[\mathfrak{s}_{-\beta}, \mathfrak{s}_{-\gamma}] \subset \overline{\mathfrak{b}}$. Ainsi, $\mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$.

Il s'agit maintenant de construire W avec les propriétés (ii), (iii), (iv) du lemme.

2° Dans cette partie de la démonstration, nous supposerons que $0 \notin \Theta$. Soient $W = \Sigma_{\alpha \in \Theta^+} V_\alpha$. D'après le lemme 4 appliqué à $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ au lieu de $\mathfrak{s}$, W est totalement isotrope maximal dans $V_{\mathbf{C}}$. L'ensemble $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}})$ laisse stable chaque V_α, donc W. Montrons que, pour $\alpha \in \Delta^+$, on a $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) W \subset W$. Soit $\beta \in \Theta^+$. Si $\alpha + \beta \notin \Theta$, on a $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) V_\beta = 0$. Supposons $\alpha + \beta \in \Theta$. On a $\alpha + \beta \in \Theta^+$, donc $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) V_\beta \subset V_{\alpha+\beta} \subset W$. Ainsi, $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}) W \subset W$.

L'ensemble $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}) = \rho_{\mathbf{C}}(\overline{\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}} \times \overline{\mathfrak{m}})$ laisse stable $\overline{W}$. Pour prouver (iv), il suffit donc de prouver que $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) \overline{W} \subset W + \overline{W}$ pour $\alpha \in \Delta^+$. Soit $\beta \in \Theta^+$. Si $\alpha + \overline{\beta} \notin \Theta$, on a $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) \overline{V}_\beta = 0$. Supposons $\alpha + \overline{\beta} \in \Theta$. Si $\beta \in \Theta_1^+$, on a $\alpha + \overline{\beta} \in \Theta^+$, donc $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) \overline{V}_\beta \subset W$. Si $\beta \in \Theta_2^+$ et $\alpha \in \Delta_1^+$, on a encore $\alpha + \overline{\beta} \in \Theta^+$. Enfin, si $\alpha \in \Delta_2^+$ et $\beta \in \Theta_2^+$, on a $\alpha + \beta \in \Theta_2^+ \cup (-\Theta_2^+)$. Donc $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_\alpha) \overline{V}_\beta \subset W + \overline{W}$.

3° Soient $\sigma = \bigoplus_{i \in I} \sigma_i$ la décomposition de σ en représentations isotypiques, V_i l'espace de σ_i. Chaque V_i est stable pour $\rho(\mathfrak{m})$. D'autre part, avec les notations du lemme 4, les V_i pour $i \in I_1$ et les $V_j \oplus V_{\omega(j)}$ pour $j \in I_2'$ sont deux à deux orthogonaux. On est donc ramené à construire W quand I est de la forme $\{i\}$ avec $i \in I_1$, ou de la forme $\{j, \omega(j)\}$ avec $j \in I_2'$. Dans ce deuxième cas, on peut évidemment prendre $W = (V_j)_{\mathbf{C}}$. Nous supposerons donc désormais que σ est isotypique.

4° Supposons que les sous-représentations irréductibles de σ soient absolument irréductibles. Soient τ une telle sous-représentation irréductible, W_τ son espace. Si la restriction de B à W_τ est non dégénérée, la restriction de $B_{\mathbf{C}}$ à $(W_\tau)_{\mathbf{C}}$ est non dégénérée. Il est connu alors que o n'est pas poids de τ. Donc o n'est pas poids de σ, et le lemme résulte de la partie 2° de la démonstration. On peut donc supposer, compte tenu du lemme 4 (i), que la restriction de B à chaque sous-$\mathfrak{s}$-module simple de V est nulle. On a $W_\tau \subset W_\tau^\perp$; il existe un sous-$\mathfrak{s}$-module simple W'_τ de V supplémentaire de $W_\tau^\perp$, et la restriction de B à $W_\tau + W'_\tau$ est non dégénérée. Il résulte de là qu'on peut écrire la décomposition de V en sous-modules simples sous la forme $(W_1 \oplus W_2) \oplus (W_3 \oplus W_4) \oplus \ldots$, où $W_{2i-1} \oplus W_{2i}$ est orthogonal à $W_{2j-1} \oplus W_{2j}$ si $i \neq j$. Posons $\tilde{W} = (W_1)_{\mathbf{C}} \oplus (W_3)_{\mathbf{C}} \oplus \ldots.$ Alors $\tilde{W}$ est totalement isotrope maximal pour $B_{\mathbf{C}}$, et stable pour $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$. La représentation $\rho_{\mathbf{C}} | \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ de $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ dans $V_{\mathbf{C}}$ définit un groupe résoluble complexe connexe M d'automorphismes de $V_{\mathbf{C}}$, qui laisse $B_{\mathbf{C}}$ invariante et commute à $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$. L'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $V_{\mathbf{C}}$ stables pour $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$ est une variété algébrique complète, non vide puisque contenant $\tilde{W}$, et stable par l'enveloppe algébrique M' de M. D'après [1], prop. 15.5, il existe un point W de cette variété fixe pour M'. Alors $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}) W \subset W$, donc $\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}) \overline{W} \subset \overline{W}$.

5° Supposons que les sous-représentations irréductibles de σ ne soient pas absolument irréductibles. Soient τ une telle sous-représentation irréductible, W_τ son espace, Écrivons $\tau_{\mathbf{C}} = \pi \oplus \bar{\pi}$, où π est irréductible. Soient W'_τ, $\overline{W'_\tau}$ les espaces de π, $\bar{\pi}$. Si la restriction de $B_{\mathbf{C}}$ à W'_τ est non dégénérée, o n'est pas poids de π, donc o n'est pas poids de $\bar{\pi}$, donc o n'est pas poids de σ, et le lemme résulte de la partie 2° de la démonstration. De même si la restriction de $B_{\mathbf{C}}$ à $\overline{W'_\tau}$ est non dégénérée. On peut donc supposer, compte tenu du lemme 4 appliqué à $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$, que la restriction de $B_{\mathbf{C}}$ à chaque sous-$\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$-module simple de $V_{\mathbf{C}}$ est nulle. Raisonnant comme dans 4°, on peut écrire la décomposition de $V_{\mathbf{C}}$ en sous-$\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$-modules simples sous la forme $(W_1 \oplus W_2) \oplus (W_3 \oplus W_4) \oplus \ldots$, où chaque W_i est totalement isotrope, et où $W_{2i-1} \oplus W_{2i}$ est orthogonal à $W_{2j-1} \oplus W_{2j}$ si $i \neq j$. La démonstration s'achève alors exactement comme dans 4°.

LEMME 6. — *Soient* $\mathfrak{s}$ *une algèbre de Lie semi-simple réelle, r son rang,* β *sa forme de Killing, x un élément de* $\mathfrak{s}$ *tel que* $\dim \mathfrak{s}^x = r$, $\mathfrak{m}$ *une algèbre de Lie résoluble réelle,* V *un espace vectoriel réel de dimension finie,* B *une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur* V, ρ *une représentation linéaire de* $\mathfrak{s} \times \mathfrak{m}$ *dans* V *laissant* B *invariante. Il existe une sous-algèbre de Borel* $\mathfrak{b}$

de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ *contenant* $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}^{x}$ *et telle que* $\beta_{\mathbf{C}}(x, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$, *et un sous-espace vectoriel* W *de* $V_{\mathbf{C}}$, *avec les propriétés* (i), (ii), (iii), (iv) *du lemme* 5.

Si x est semi-simple, $\mathfrak{s}^x$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$, et il suffit d'appliquer le lemme 5. Dans le cas général, il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots)$ d'éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{s}$ tendant vers x et il suffit de raisonner par passage à la limite comme dans le lemme 2.

THÉORÈME 2. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle, et* $f \in \mathfrak{g}^\star$ *telle que* $\dim \mathfrak{g}(f)$ *soit minimum. Il existe une polarisation résoluble* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ *en* $f_{\mathbf{C}}$ *telle que* $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

On raisonne comme pour le théorème 1. Les étapes 1°, 2°, 3°, 4° de la démonstration sont sans changement, à condition d'utiliser, au lieu du lemme 2, le lemme 6 dans le cas particulier où $V = 0$. Étudions l'analogue du cas (*b*). Les hypothèses des lemmes 1 et 3 sont vérifiées et, de plus, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$. Introduisons toutes les notations de ces lemmes.

Soient g et h les restrictions de f' à $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$. Soit $\mathfrak{b}'$ une polarisation de $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$ en h (il en existe car $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$ est nilpotente, et même commutative ou produit d'une algèbre de Heisenberg et d'une algèbre commutative). Comme $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \times (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r})$, on a $\dim \mathfrak{s}(g_1) \geq \dim \mathfrak{s}(g)$ pour toute $g_1 \in \mathfrak{s}^\star$. Donc si l'on identifie la représentation coadjointe de $\mathfrak{s}$ à sa représentation adjointe grâce à la forme de Killing, g s'identifie à un élément de $\mathfrak{s}$ dont le centralisateur dans $\mathfrak{s}$ est de dimension minimum. Soit $\sigma = \rho | \mathfrak{s}$. Appliquons le lemme 6 avec $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r}$ et $V = \mathfrak{k}$, B étant définie comme dans la démonstration du théorème 1. Il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$, subordonnée à $g_{\mathbf{C}}$ donc à $f_{\mathbf{C}}$, et un sous-espace vectoriel $\mathfrak{k}_1$ de $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$, de dimension d, tels que

$$[\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}, \mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}] \subset \mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}, \qquad B_{\mathbf{C}}(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1) = 0, \qquad \rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{b} \times (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r})_{\mathbf{C}})\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_1,$$
$$\rho_{\mathbf{C}}(\mathfrak{b} \times (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{r})_{\mathbf{C}})\,(\mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1) \subset \mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1.$$

Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}} + \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{k}_1$. On a, comme dans la preuve du théorème 1 :

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} + \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}(f)_{\mathbf{C}}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] &= [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{k}_1] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \mathfrak{k}_1] \\ &\subset [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + B_{\mathbf{C}}(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1)\,\mathfrak{c} + \mathfrak{k}_1 = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{k}_1.\end{aligned}$$

Cela prouve que $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$. En outre, $\mathfrak{p}$ est résoluble. Enfin,

$$[\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}] + [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}} + [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}],$$

et

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] = & [\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + [\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{k}}_1] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \bar{\mathfrak{b}}] \\
& + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + [\mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}, \bar{\mathfrak{k}}_1] + [\mathfrak{k}_1, \bar{\mathfrak{b}}] + [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}}] + [\mathfrak{k}_1, \bar{\mathfrak{k}}_1] \\
& \subset (\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}) + 0 + (\mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1) + 0 + \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}} + (\mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1) + (\mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1) + \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{c} \\
& \subset (\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}) + \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}} + (\mathfrak{k}_1 + \bar{\mathfrak{k}}_1) + \mathfrak{b}'_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}},
\end{aligned}$$

de sorte que $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

3. Non existence de polarisations positives.

Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Nous poserons

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $[y, x] = 2x$, $[y, z] = -2z$, $[x, z] = y$, $[y', x'] = 2ix'$.

Soient u, v des indéterminées. Soit π la représentation de $\mathfrak{s}$ dans $\mathbf{R}u + \mathbf{R}v$ qui, à tout $a \in \mathfrak{s}$, fait correspondre l'endomorphisme de $\mathbf{R}u + \mathbf{R}v$ admettant pour matrice a par rapport à la base (u, v). Soit

$$\mathfrak{k} = \mathbf{R}u^3 + \mathbf{R}u^2v + \mathbf{R}uv^2 + \mathbf{R}v^3.$$

Soit ρ la puissance symétrique 3^e de π dans $\mathfrak{k}$. Par rapport à la base (u^3, u^2v, uv^2, v^3) de $\mathfrak{k}$, la matrice de $\rho\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} 3\alpha & \beta & 0 & 0 \\ 3\gamma & \alpha & 2\beta & 0 \\ 0 & 2\gamma & -\alpha & 3\beta \\ 0 & 0 & \gamma & -3\alpha \end{pmatrix}.$$

Soit B la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{k}$ dont la matrice par rapport à (u^3, u^2v, uv^2, v^3) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que B est invariante par ρ. Soient $\mathfrak{c}$ une algèbre de Lie réelle de dimension 1, c un élément non nul de $\mathfrak{c}$. Posons $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$, et munissons $\mathfrak{n}$ de la structure d'algèbre de Lie pour laquelle $\mathfrak{c}$ est central et $[w, w'] = \mathrm{B}(w, w')\, c$ pour $w, w' \in \mathfrak{k}$. Pour tout $a \in \mathfrak{s}$, soit $\sigma(a)$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{n}$ tel que $\sigma(a) | \mathfrak{k} = \rho(a)$ et $\sigma(a) | \mathfrak{c} = 0$. Chaque $\sigma(a)$ est une dérivation de $\mathfrak{n}$, et σ est une représentation de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{n}$.

Soit $\mathfrak{g}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{s}$ par $\mathfrak{n}$ défini par σ. Soit f l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$f(x) = -1, \qquad f(z) = f(c) = 1, \qquad f(y) = f(u^3) = f(u^2 v) = f(uv^2) = f(v^3) = 0.$$

THÉORÈME 3. — (i) *On a* $\dim \mathfrak{g}(f) = \inf_{f' \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}(f') = 2$.

(ii) *Les seules polarisations de* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ *en* $f_{\mathbf{C}}$ *sont* $\mathfrak{p}$ *et* $\bar{\mathfrak{p}}$, *où*

$$\mathfrak{p} = \mathbf{C}c + \mathbf{C}x' + \mathbf{C}y' + \mathbf{C}(u+iv)^3 + \mathbf{C}(u+iv)^2(u-iv).$$

Aucune d'elles n'est positive. On a $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

On vérifie aussitôt que $f([c, \mathfrak{g}]) = f([y', \mathfrak{g}]) = 0$. D'autre part, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbf{R}$, et si

$$a = \alpha x + \beta y + \gamma u^3 + \delta u^2 v + \varepsilon uv^2 + \zeta v^3 \in \mathfrak{g}(f),$$

on a

$$\begin{array}{lll} 0 = f([a, u^3]) = -3\zeta, & 0 = f([a, u^2 v]) = \varepsilon, & 0 = f([a, uv^2]) = -\delta, \\ 0 = f([a, v^3]) = 3\gamma, & 0 = f([a, y]) = \alpha, & 0 = f([a, x]) = -\beta; \end{array}$$

donc $a = 0$, ce qui prouve que $\mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}c + \mathbf{R}y'$. Comme $\mathfrak{g}(f') \supset \mathfrak{c}$, comme $\dim \mathfrak{g} = 8$ et que $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}(f')$ est toujours pair, on a prouvé (i).

On a

$$\begin{array}{ll} \pi\,(y')\,(u+iv) = i(u+iv), & \pi\,(y')\,(u-iv) = -i(u-iv), \\ \pi_{\mathbf{C}}(x')\,(u+iv) = 0, & \pi_{\mathbf{C}}(x')\,(u-iv) = 2(u+iv). \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathbf{C}}(y')\,(u+iv)^3 = 3i(u+iv)^3, \\ &\rho_{\mathbf{C}}(y')\,(u+iv)^2(u-iv) = i(u+iv)^2(u-iv), \\ &\rho_{\mathbf{C}}(y')\,(u+iv)\,(u-iv)^2 = -i(u+iv)\,(u-iv)^2, \\ &\rho_{\mathbf{C}}(y')\,(u-iv)^3 = -3i(u-iv)^3, \\ &\rho_{\mathbf{C}}(x')\,(u+iv)^3 = 0, \\ &\rho_{\mathbf{C}}(x')\,(u+iv)^2(u-iv) = 2(u+iv)^3, \\ &\rho_{\mathbf{C}}(x')\,(u+iv)\,(u-iv)^2 = 4(u+iv)^2(u-iv), \\ &\rho_{\mathbf{C}}(x')\,(u-iv)^3 = 6(u+iv)\,(u-iv)^2. \end{aligned}$$

Cela montre d'abord que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On a

$$f([\mathfrak{s}, \mathfrak{n}]) = f([\mathfrak{s}, \mathfrak{k}]) = f(\mathfrak{k}) = 0, \qquad f_{\mathbf{C}}([y', x']) = 2if_{\mathbf{C}}(x') = 0.$$

Des calculs faciles donnent

$$\begin{aligned} &B_{\mathbf{C}}((u+iv)^3,\ (u+iv)^2(u-iv)) = 0, \\ &B_{\mathbf{C}}((u+iv)^3,\ (u-iv)^3) = 24i, \\ &B_{\mathbf{C}}((u+iv)^2(u-iv),\ (u+iv)\,(u-iv)^2) = -8i. \end{aligned}$$

On voit que $f_{\mathbf{C}}([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = 0$. Donc $\mathfrak{p}$, et par suite $\bar{\mathfrak{p}}$, sont des polarisations de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$. Il est clair que $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On a

$$f([(u+iv)^3, \overline{(u+iv)^3}]) = B_{\mathbf{C}}((u+iv)^3, (u-iv)^3) = 24i,$$
$$f([(u+iv)^2(u-iv), \overline{(u+iv)^2}\,\overline{(u-iv)}])$$
$$= B_{\mathbf{C}}((u+iv)^2(u-iv), (u+iv)(u-iv)^2) = -8i.$$

Donc $\mathfrak{p}$ n'est ni positive, ni négative, et par suite il en est de même de $\bar{\mathfrak{p}}$.

Enfin, soit $\mathfrak{q}$ une polarisation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ en $f_{\mathbf{C}}$, et montrons que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{p}}$. On a $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{g}(f)_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}c + \mathbf{C}y'$, et $\dim \mathfrak{q} = 5$. Comme $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{q} + \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} + 1$, on a $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \neq 0$. D'autre part,

$$0 = f_{\mathbf{C}}([\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}]) = B_{\mathbf{C}}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}), \qquad \text{donc} \quad \dim\, (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) \leq 2.$$

Ainsi, $\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = 1$ ou 2.

Supposons $\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = 1$. Alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} \oplus (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) \oplus \mathfrak{v}$, où $\mathfrak{v}$ est supplémentaire de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On a

$$\mathfrak{r}_{\mathbf{C}} + (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}} \supset [\mathfrak{q}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} = [\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}},$$

d'où $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \supset [\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}]$, ce qui est absurde puisque $\rho_{\mathbf{C}}$ est irréductible. Donc $\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = 2$.

Par suite, $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} \oplus (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) \oplus \mathfrak{w}$, où $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}} = 0$ et $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{w} = 2$. Soit ψ la projection de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ sur $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ parallèlement à $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$. Alors $\psi(\mathfrak{w}) = \psi(\mathfrak{q})$ est une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ contenant y', donc est égale à $\mathbf{C}x' + \mathbf{C}y'$ ou $\mathbf{C}\bar{x}' + \mathbf{C}y'$. Changeant au besoin $\mathfrak{q}$ en $\bar{\mathfrak{q}}$, on peut supposer que $\psi(\mathfrak{w}) = \mathbf{C}x' + \mathbf{C}y'$. On a

$$\mathfrak{r}_{\mathbf{C}} + (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}} \supset [\mathfrak{q}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}x' + \mathbf{C}y', \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}] + \mathfrak{r}_{\mathbf{C}},$$

d'où $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \supset [\mathbf{C}x' + \mathbf{C}y', \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}]$. Or les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ stables par $\rho_{\mathbf{C}}(y')$ sont les sous-espaces engendrés par deux des vecteurs $(u+iv)^3, (u+iv)^2(u-iv), (u+iv)(u-iv)^2, (u-iv)^3$. Le seul qui soit stable par $\rho_{\mathbf{C}}(x')$ est $\mathbf{C}(u+iv)^3 + \mathbf{C}(u+iv)^2(u-iv)$. Donc

$$q = \mathbf{C}c + \mathbf{C}(u+iv)^3 + \mathbf{C}(u+iv)^2(u-iv) + \mathbf{C}y' + \mathbf{C}a,$$

avec $a = \alpha x' + \beta(u+iv)(u-iv)^2 + \gamma(u-iv)^3$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$. Comme x', $(u+iv)(u-iv)^2$, $(u-iv)^3$ sont vecteurs propres de $\operatorname{ad} y'$ correspondant aux valeurs propres $2i$, $-i$, $-3i$, on voit que $x' \in \Sigma_{n \geq 0} \mathbf{C}(\operatorname{ad} y')^n a$. Donc $x' \in \mathfrak{q}$, d'où

$$\mathfrak{q} = \mathbf{C}c + \mathbf{C}(u+iv)^3 + \mathbf{C}(u+iv)^2(u-iv) + \mathbf{C}y' + \mathbf{C}x' = \mathfrak{p}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Borel, *Groupes linéaires algébriques* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 20-82).
[2] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 315-328).
[3] J. Dixmier, *Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles* (*J. Math. pures appl.*, t. 45, 1966, p. 1-66).
[4] M. Duflo, *Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, p. 23-74).
[5] P. Griffiths et W. Schmid, *Locally homogeneous complex manifolds* (*Acta Math.*, t. 123, 1969, p. 253-301).
[6] B. Kostant, *Construction de représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles*, cours professé en 1969, non publié.
[7] M. Vergne, *Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 704-707).

(Manuscrit reçu le 13 février 1971.)

J. Dixmier,
64, rue Gay-Lussac,
75-Paris, 5e.