ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HIROSHI UMEMURA

Dimension cohomologique des groupes algébriques commutatifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 2 (1972), p. 265-276

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_2_265_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 265 à 276.

DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES GROUPES ALGÉBRIQUES COMMUTATIFS

PAR HIROSHI UMEMURA

Le but de cet article est de calculer les invariants homologiques algcd, p et q des groupes algébriques commutatifs (corollaire 1 du théorème 1).

Au paragraphe 3, on montre, pour les groupes algébriques commutatifs, qu'une conjecture de Hartshorne est affirmative et que la dimension cohomologique algébrique est égale ou plus grande que la dimension cohomologique analytique.

On donne, quel que soit l'entier positif n, une variété algébrique G définie sur $\mathbf{C}$ telle que algcd (G) $= n$ et G^{an} soit une variété de Stein.

Toutes les variétés algébriques considérées aux paragraphes 1 et 2, sauf (2.3), sont définies sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique quelconque.

Je remercie M. P. Cartier d'avoir lu la première version de cet article et simplifié les démonstrations.

1. PRÉLIMINAIRES.

(1.1) Sauf en (2.3), tous les groupes algébriques considérés sont connexes, réduits et commutatifs.

Tout groupe algébrique G est une extension d'une variété abélienne A par un groupe algébrique affine B :

$$0 \to B \to G \to A \to 0.$$

Tout groupe algébrique affine est isomorphe au produit direct d'un certain nombre de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_m$ et d'un groupe unipotent U.

Tout groupe unipotent U est obtenu par extensions successives de groupes $\mathbf{G}_a$ et isomorphe (en tant que variété algébrique) à un espace affine. En caractéristique 0, tout groupe unipotent est isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{G}_a$.

Si A est une variété abélienne, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}\,(\mathrm{A}, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{H}^1\,(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A})$$

est un isomorphisme et l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}\,(\mathrm{A}, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^1\,(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A}^*)$$

est injectif et a pour image l'ensemble des diviseurs algébriquement équivalent à 0 (*voir* Serre [9]).

(1.2) Soient X et Y deux variétés algébriques (schémas réduits de type fini sur k) et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme affine. Soit F un O_Y-module cohérent. Alors on a

$$\mathrm{H}^p\,(\mathrm{X}, f^*\,\mathrm{F}) \simeq \mathrm{H}^p\,(\mathrm{Y}, \mathrm{F} \otimes f_*\,\mathrm{O}_\mathrm{X}).$$

En effet, soit $\{\mathrm{V}_\alpha\}$ un recouvrement affine de Y. Posant $f^{-1}\,(\mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha$, $\{\mathrm{U}_\alpha\}$ est un recouvrement affine de X, puisque f est affine, et

$$\Gamma\,(\mathrm{U}_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \mathrm{U}_{\alpha_r}, f^*\,\mathrm{F}) = \Gamma\,(\mathrm{V}_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \mathrm{V}_{\alpha_r}, \mathrm{F} \otimes f_*\,\mathrm{O}_\mathrm{X}).$$

On peut calculer les groupes de cohomologie

$$\mathrm{H}^p\,(\mathrm{X}, f^*\,\mathrm{F}) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^p\,(\mathrm{Y}, \mathrm{F} \otimes f_*\,\mathrm{O}_\mathrm{X})$$

par les cochaînes des recouvrements $\{\mathrm{U}_\alpha\}$ et $\}\mathrm{V}_\alpha\}$. On en conclut l'assertion.

(1.3) Définition 1. — Soit X (resp. Y) une variété algébrique (resp. un espace analytique); on désigne par algcd (X) [resp. ancd (Y)] la dimension cohomologique algébrique de X (resp. analytique de Y). C'est le plus petit entier n tel que $\mathrm{H}^i\,(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ [resp. $\mathrm{H}^i\,(\mathrm{Y}, \mathrm{F})$] soit nul pour $i > n$ et pour tout faisceau algébrique (resp. analytique) cohérent F sur X (resp. sur Y). On note que $q\,(\mathrm{X})$ le plus petit entier $n \geqq -1$ tel que $\mathrm{H}^i\,(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ soit un espace vectoriel de dimension finie pour $i > n$ et pour tout faisceau algébrique cohérent F. $p\,(\mathrm{X})$ est le plus grand entier n (ou ∞) tel que $\mathrm{H}^i\,(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ soit un espace vectoriel de dimension finie pour $i < n$ pour tout faisceau localement libre F.

(1.4) Lemme 1. — *Soient* Y *une variété algébrique projective, non singulière, de dimension* n, *et* L *un faisceau inversible ample. Alors il existe* *un entier* N *tel que, si* $m \geqq N$, *on ait*

$$H^p(Y, S \otimes L^{\otimes m}) = \begin{cases} \textit{non nul} & \textit{si } p = 0, \\ 0 & \textit{si } p \neq 0; \end{cases}$$

$$H^p(Y, S \otimes \check{L}^{\otimes m}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } p \neq n, \\ \textit{non nul} & \textit{si } p = n \end{cases}$$

pour tout faisceau inversible S *algébriquement équivalent à* 0.

On peut appliquer Kleiman ([5], p. 312) et le théorème de dualité.

(1.5.1) Définition 2. — Soit X un espace analytique complexe. On dit que X est q-complet s'il existe une fonction φ fortement q-pseudo-convexe telle que les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$, $c \in \mathbf{R}$, soient relativement compacts.

(1.5.2) Théorème (Andreotti et Grauert). — *Si* X *est* q*-complet, alors* ancd $(X) \leqq q - 1$.

Voir Andreotti et Grauert ([1], corollaire, p. 250.)

2. Dimension cohomologique algébrique.

(2.1) Lemme 2 (Hartshorne). — *Soient* Y *une variété algébrique et* $\pi : X \to Y$ *un espace fibré localement trivial de fibre* Z; *alors on a*

$$\text{algcd}(X) \leqq \text{algcd}(Y) + \text{algcd}(Z).$$

Supposons d'abord que Y est affine et $\pi : X \to Y$ est trivial i. e. $X = Y \times Z$ et π est la projection $p_1 : Y \times Z \to Y$. Soit F un O_X-module cohérent. Comme la projection $p_2 : X = Y \times Z \to Z$ est affine, il en résulte $H^p(X, F) = H^p(Z, p_{2*} F)$. Puisque $p_{2*} F$ est quasi cohérent, on a

$$\text{algcd}(X) \leqq \text{algcd}(Z) = \text{algcd}(Z) + \text{algcd}(Y).$$

Supposons maintenant que $\pi : X \to Y$ est un espace fibré localement trivial et F un O_X-module cohérent. On considère la suite spectrale de Leray de π :

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q \pi_* F) \;\Rightarrow\; E^n = H^n(X, F).$$

On peut calculer $R^q \pi_* F$ localement sur Y. Si U est un ouvert affine tel que $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ soit trivial, on a $\text{algcd}(\pi^{-1}(U)) \leqq \text{algcd}(Z)$ d'après ce que l'on a montré. On en conclut $R^q \pi_* F = 0$ pour $q > \text{algcd}(Z)$. D'ailleurs $E_2^{pq} = H^q(Y, R^q \pi_* F) = 0$ pour $p > \text{algcd}(Y)$, puisque $R^q \pi_* F$ est quasi cohérent. On obtient

$$E^n = H^n(X, F) = 0, \qquad n > \text{algcd}(Y) + \text{algcd}(Z).$$

(2.2) *Remarques.* — 1° On n'a pas nécessairement égalité dans le lemme précédent [*cf.* (2.6),. p 272]. Par exemple, soit C une courbe elliptique. Considérons la surface réglée $\mathcal{R}_{-1}$ au-dessus de C (*voir* Atiyah [2], p. 427). Alors il existe une section C telle que le diviseur C soit ample. Donc $\mathcal{R}_{-1} - \mathrm{C}$ est affine. $\mathcal{R}_{-1} - \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ est un espace fibré de fibre $\mathbf{A}^1$. On a donc

$$\operatorname{algcd}(\mathcal{R}_{-1} - \mathrm{C}) = 0 < 1 = \operatorname{algcd}(\mathbf{A}^1) + \operatorname{algcd}(\mathrm{C}).$$

2° L'analogue analytique de lemme 2 est un problème ouvert, même si $\operatorname{ancd}(\mathrm{Y}) = \operatorname{ancd}(\mathrm{Z}) = 0$ (*voir* Matsushima et Morimoto [7] et Fischer [3]).

(2.3) Soit G un schéma en groupe de type fini sur k. Dans ce numéro, on ne suppose pas que G soit commutatif et réduit et que k soit algébriquement clos. Les résultats suivants sont bien connus.

(2.3.1) Il existe une filtration croissante de l'espace vectoriel $\Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}})$:

$$0 = \mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \ldots \subset \mathrm{A}_r \subset \ldots \subset \Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}})$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) La dimension de l'espace vectoriel A_r est finie pour tout $r \geqq 0$;

(2) On a $\Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}}) = \varinjlim_{r} \mathrm{A}_r$;

(3) L'espace A_r $(r \geqq 0)$, considéré comme ensemble de sections de O_{G}, est stable par les translations à gauche.

(2.3.2) Supposons en particulier que G soit unipotent. Soit $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ une représentation linéaire de G. Alors il existe une filtration de V :

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{V}_r = \mathrm{V}$$

telle que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i-1}$ soit 1, que V_i soit stable par G et $\rho(g).v \equiv v \bmod \mathrm{V}_{i-1}$ pour tout $v \in \mathrm{V}_i$.

Donc il existe une filtration de $\Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}})$:

$$0 = \mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \ldots \subset \mathrm{A}_r \subset \ldots \subset \Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}})$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) La dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{A}_i/\mathrm{A}_{i-1}$, est 1 pour tout $i \geqq 1$;

(2) L'espace A_i est stable par les translations;

(3) L'opération de G sur $\mathrm{A}_i/\mathrm{A}_{i-1}$ est triviale;

(4) On a $\varinjlim_{i} \mathrm{A}_i = \Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{O}_{\mathrm{G}})$.

(2.3.3) Si G est un tore, on a $A = \bigoplus_{\chi} k_{\chi}$ où χ est un caractère de G i. e. un homomorphisme de G dans $\mathbf{G}_m$, k_{χ} est isomorphe à k; G opère sur k_{χ} par $g.x = \chi(g).x$, $g \in G$, $x \in k_{\chi}$ et la somme est prise pour tous les caractères.

(2.3.4) Supposons que G soit le produit d'un groupe unipotent U et d'un tore T. D'après (2.3.2) et (2.3.3), on a une filtration de $\Gamma(G, O_G) = \Gamma(U, O_U) \otimes_k \Gamma(T, O_T)$:

$$A_0 \otimes_k \Big(\bigoplus_{\chi} k_{\chi}\Big) \subset A_1 \otimes_k \Big(\bigoplus_{\chi} k_{\chi}\Big) \subset \ldots \subset \Gamma(U, O_U) \otimes_k \Gamma(T, O_T),$$

où $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ est la filtration de $\Gamma(U, O_U)$ dans (2.3.2).

(2.3.5) Soit $\pi : X \to Y$ un espace fibré principal de groupe G. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire de G. Alors on note E_{ρ} le fibré vectoriel de base Y associé à ρ.

(2.4) Soit $X \to Y$ un espace fibré principal d'un groupe algébrique G (commutatif, connexe, réduit et défini sur un corps k algébriquement clos).

(2.4.1) LEMME 3. — *Il existe une filtration croissante de* $\pi_* O_X$:

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_r \subset \ldots \subset \pi_* O_X$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) *Le faisceau* F_i *est localement libre (de rang fini) pour tout* $i \geq 0$;

(2) $\pi_* O_X = \varinjlim_i F_i$.

On utilise les notations (2.3). D'après (2.3.1), A_i est stable par les translations. Donc, d'après (2.3.5), on peut associer à cette représentation un fibré vectoriel F_i. Il est évident que l'on a

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset \pi_* O_X,$$
$$\varinjlim_i F_i = \pi_* O_X.$$

(2.4.2) D'après (2.3.2) et (2.3.5), on a :

COROLLAIRE 1. — *Si* G *est unipotent, il existe une filtration de* $\pi_* O_X$:

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_r \subset \ldots \subset \pi_* O_X$$

vérifiant les conditions suivantes :

(1) *La suite* $0 \to F_{i-1} \to F_i \to O_Y \to 0$ *est exacte;*

(2) F_i *est localement libre;*

(3) $\pi_* O_X = \varinjlim_i F_i$.

(2.4.3) Corollaire 2. — *Si* G *est un tore* $\mathbf{G}_m^r$, *on a*

$$\pi_* O_X = \bigoplus_{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r} S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r},$$

où S_i *désigne le faisceau inversible associé à la* $i^{\text{ième}}$ *composante de* $\pi : X \to Y$. *De manière précise, on a* $X = X_1 \times_Y \ldots \times_Y X_r$ *où* $X_1, \ldots, X_r$ *sont les fibrés principaux de base* Y *et groupe* $\mathbf{G}_m$ *associés respectivement aux faisceaux inversibles* $S_1, \ldots, S_r$.

En effet on peut appliquer (2.3.3) et (2.3.5).

(2.4.4) Corollaire 3. — *Si* G *est un groupe algébrique affine (commutatif, connexe et réduit), donc* G *est le produit d'un groupe unipotent* U *et de* $\mathbf{G}_m^r$, *alors on a*

$$\pi_* O_X = \varinjlim_i F_i \otimes \Big(\bigoplus_{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r} S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}\Big),$$

où F_i *désigne la filtration définie dans* (2.4.2) *de l'espace fibré principal associé à la composante unipotente.*

(2.5) Nous utilisons les notations de (2.4).

(2.5.1) Lemme 4. — *Soit* L *un faisceau inversible ample sur* Y. *Si* Y *est projective, non singulière, de dimension* n *et* $G \neq 0$ *est unipotent, on a, pour* m *assez grand,*

$$(\star)\quad \begin{cases} H^p(X, \pi^* L^{\otimes m}) \simeq H^p(Y, L^{\otimes m} \otimes \pi_* O_X) = \begin{cases} \textit{un espace vectoriel de dimension infinie si} & p = 0, \\ 0 \quad \textit{si} & p \neq 0; \end{cases} \\ H^p(X, \pi^* \check{L}^{\otimes m}) \simeq H^p(Y, \check{L}^{\otimes m} \otimes \pi_* O_X) = \begin{cases} 0 \quad \textit{si} & p \neq n, \\ \textit{un espace vectoriel de dimension infinie si} & p = n. \end{cases} \end{cases}$$

On a, pour n assez grand,

$$(\star\star)\quad \begin{cases} H^p(Y, L^{\otimes m}) = \begin{cases} \text{non nul} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0; \end{cases} \\ H^p(Y, \check{L}^{\otimes m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, \\ \text{non nul} & \text{si } p = n. \end{cases} \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer ($\star$) sous l'hypothèse ($\star\star$). En tensoriant la suite exacte de (2.4.2) par $\check{\mathrm{L}}^{\otimes m}$, on a

$$0 \to \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_{i-1} \to \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i \to \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \to 0.$$

La suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$\mathrm{H}^{p-1}(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_{i-1}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}).$$

Donc l'homomorphisme $\mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_{i-1}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i)$ est injectif et le conoyau est non trivial pour tout $i > 0$, puisque la dimension de Y est n. On en conclut que $\varinjlim_i \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i)$ est un espace vectoriel de dimension infinie. On a

$$\begin{aligned}
\varinjlim \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i) &\simeq \mathrm{H}^n\Big(\mathrm{Y}, \varinjlim_i (\check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i)\Big) \\
&\simeq \mathrm{H}^n\big(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \varinjlim \mathrm{F}_i\big) \\
&\simeq \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \pi_* \mathrm{O}_\mathrm{X}) \\
&\simeq \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \pi^* \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}),
\end{aligned}$$

puisque π est affine (1.2).

Si $p \neq n$, on a $\mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_{i-1}) \simeq \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i)$, ensuite,

$$0 = \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_1) \simeq \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i)$$

et par conséquent :

$$0 = \varinjlim_i \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \mathrm{F}_i) \simeq \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \pi_* \mathrm{O}_\mathrm{X}) \simeq \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \pi^* \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}).$$

Les groupes de cohomologie à coefficients dans $\pi^* \mathrm{L}^{\otimes m}$ se calculent de la même manière.

(2.5.2) LEMME 5. — *Soit* L *un faisceau inversible ample sur* Y. *Si* Y *est projective, non singulière, de dimension n et* G *est le produit* $\mathbf{G}_m^r$ *de groupes multiplicatifs. Supposons que* S_i *soit algébriquement équivalent à* 0 *pour tout i et que r soit strictement positif. Alors, pour m assez grand :*

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \pi^* \mathrm{L}^{\otimes m}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \mathrm{L}^{\otimes m} \otimes \pi_* \mathrm{O}_\mathrm{X}) = \begin{cases} \textit{un espace vectoriel} \\ \quad \textit{de dimension infinie si} \quad p = 0, \\ \qquad 0 \qquad\qquad \textit{si} \quad p \neq 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \pi^* \check{\mathrm{L}}^{\otimes m}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \check{\mathrm{L}}^{\otimes m} \otimes \pi_* \mathrm{O}_\mathrm{X}) = \begin{cases} \qquad 0 \qquad\qquad \textit{si} \quad p \neq n, \\ \textit{un espace vectoriel} \\ \quad \textit{de dimension infinie si} \quad p = n. \end{cases}$$

Par hypothèse, les faisceaux $S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}$ sont algébriquement équivalents à 0. D'après (1.4), on a, pour m assez grand,

$$H^p(Y, L^{\otimes m} \otimes S_1^{\otimes n_1} \otimes S_2^{\otimes n_2} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}) = \begin{cases} \text{non nul} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0; \end{cases}$$

$$H^p(Y, \check{L}^{\otimes m} \otimes S_1^{\otimes n_1} \otimes S_2^{\otimes n_2} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, \\ \text{non nul} & \text{si } p = n; \end{cases}$$

d'où le lemme résulte, puisque

$$H^p(X, \pi^* L^{\otimes m}) \simeq H^p(Y, L^{\otimes m} \otimes \pi_* O_X) \simeq \bigoplus_{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r} H^p(Y, L^{\otimes m} \otimes S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r})$$

avec $r > 0$ et similairement pour les groupes de cohomologie à coefficients dans $\check{L}$.

(2.6) Théorème 1. — *Soient* A *une variété abélienne de dimension* n, $B \neq 0$ *un groupe algébrique affine, et* G *une extension de* A *par* B :

$$0 \to B \to G \xrightarrow{\pi} A \to 0.$$

Soit L *un faisceau inversible ample sur* A; *alors, pour* m *assez grand,*

$$H^0(G, \pi^* L^{\otimes m}) = H^0(A, L^{\otimes m} \otimes \pi_* O_G) \quad \text{et} \quad H^n(G, \pi^* \check{L}^{\otimes m}) = H^n(A, \check{L}^{\otimes m} \otimes \pi_* O_G)$$

sont des espaces vectoriels de dimension infinie. En particulier,

$$\text{algcd}(G) = q(X) = \dim A \quad \text{et} \quad p(X) = 0.$$

B est isomorphe au produit de $\mathbf{G}_m^r$ et d'un groupe algébrique unipotent U. Si U est nul, le théorème résulte de (1.1), (2.1) et (2.5.2). Supposons donc que U a une dimension strictement positive. D'après (2.4.4) on a

$$\pi_* O_G = \varinjlim_i F_i \otimes \Big(\bigoplus_{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r}\Big) S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r})$$

$$= \varinjlim_i F_i \otimes \Big(\varinjlim_i F_i \otimes \Big(\bigoplus_{0 \neq (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r} S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}\Big)\Big) = F \oplus S,$$

où

$$F = \varinjlim_i F_i \quad \text{et} \quad S = \varinjlim_i F_i \otimes \Big(\bigoplus_{0 \neq (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r} S_1^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes S_r^{\otimes n_r}\Big).$$

D'après (2.5.1) et l'hypothèse, pour m assez grand, $H^0(A, L^{\otimes m} \otimes F)$ et $H^n(A, \check{L}^{\otimes m} \otimes F)$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie. Prenant en considération la décomposition ci-dessus et (2.1), le théorème est démontré.

(2.7) COROLLAIRE 1. — *Soit* G *un groupe algébrique* (*commutatif*, *connexe et réduit*). *Alors :*

$$\operatorname{algcd}(\mathrm{G}) = \max \{ \dim \mathrm{A} \mid \text{variété abélienne A telle qu'il existe un homomorphisme surjectif de G sur A} \};$$

$$q(\mathrm{G}) = \begin{cases} \operatorname{algcd}(\mathrm{G}) & \textit{si } \mathrm{G} \textit{ n'est pas une variété abélienne,} \\ -1 & \textit{si } \mathrm{G} \textit{ est une variété abélienne,} \end{cases}$$

$$p(\mathrm{G}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mathrm{G} \textit{ n'est pas une variété abélienne,} \\ \infty & \textit{si } \mathrm{G} \textit{ est une variété abélienne.} \end{cases}$$

Si G est une variété abélienne, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathrm{G}, \mathrm{F})$ sont de dimension finie pour tout faisceau algébrique cohérent F et algcd (G) est égale à dim G. Donc on peut supposer que G n'est pas une variété abélienne. Alors G est une extension d'une variété abélienne A par un groupe algébrique affine $\mathrm{B} \neq 0$:

$$0 \to \mathrm{B} \xrightarrow{i} \mathrm{G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{A} \to 0.$$

D'après (2.6), il suffit alors de vérifier que, si $\pi' : \mathrm{G} \to \mathrm{A}'$ est un homomorphisme surjectif de G sur une variété abélienne A′, on a $\dim \mathrm{A} \geq \dim \mathrm{A}'$. En effet, B étant affine, le composé $\pi \circ i$ est l'homomorphisme trivial (*voir* Lang [6]) et π se factorise par $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{A}$ i. e. on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \mathrm{A} \arrow[d, dotted] \\ & \mathrm{A}' \end{tikzcd}$$

Le diagramme montre l'inégalité désirée.

3. COMPARAISON DE algcd ET ancd. — A partir de maintenant on suppose que toute variété algébrique considérée est définie sur $\mathbf{C}$.

(3.1) LEMME 6. — *Soient* Y *une variété analytique complexe compacte, de dimension* n *et* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un espace fibré principal de groupe* $\mathrm{G} = \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^{*s}$. *Alors* X *est* $(n+1)$-*complète.*

Nous allons construire une fonction à valeurs réelles, C^∞, sur X.

a. Cas $\mathrm{G} = \mathbf{C}$. — Soient z, z' deux points d'une fibre $\pi^{-1}(p)$, $p \in \mathrm{Y}$. Alors la distance $|z - z'|^2$ est bien définie, puisque l'opération de $\mathbf{C}$ sur les fibres est l'addition. Prenant une section différentiable s de l'espace fibré $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, on pose $f(x) = |x - s \circ \pi(x)|^2$, $x \in \mathrm{X}$. Alors $f(x)$ est une fonction C^∞ définie sur X.

b. Cas $G = \mathbf{C}^*$. — Soit E un fibré vectoriel de rang 1 associé à $\pi : X \to Y$. Alors $X = E -$ (section 0). Puisqu'un fibré vectoriel a un métrique hermitienne h, alors $g(x) = h(x, x)$, $x \in X$, est une fonction C^∞ partout non nulle sur X.

c. Cas général $G = \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^{*s}$ — On pose

$$\varphi = f_1 + f_2 + \ldots + f_r + \left(g_1 + \frac{1}{g_1}\right) + \left(g_2 + \frac{1}{g_2}\right) + \ldots + \left(g_s + \frac{1}{g_s}\right),$$

où f_i, $1 \leqq i \leqq r$ (resp. g_j, $1 \leqq j \leqq s$) désigne la fonction définie dans (*a*) [resp. (*b*)] correspondant à la $i^{\text{ième}}$ [resp. $(r+j)^{\text{ième}}$] composante de $\pi : X \to Y$. Alors φ est une fonction C^∞ sur X. La fonction φ restreinte aux fibres s'écrit :

$$|u_1|^2 + |u_2|^2 + \ldots + |u_r|^2 + |v_1|^2 + \frac{1}{|v_1|^2} + |v_2|^2 + \frac{1}{|v_2|^2} + \ldots + |v_s|^2 + \frac{1}{|v_s|^2},$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s$ désignent le système de coordonnées naturel de $\mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^{*s}$. Donc la forme hermitienne de φ restreinte aux fibres est définie positive et, par conséquent, φ est fortement $(n+1)$-pseudoconvexe. Les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$ sont relativement compacts puisque la base Y est compacte et φ tend vers l'infini lorsqu'un des $|u_i|$, $|v_j|$, $\frac{1}{|v_j|}$ tend vers l'infini.

(3.2) THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe algébrique* (*commutatif et connexe*). *Alors*, $\operatorname{algcd}(G) \geqq \operatorname{ancd}(G^{an})$.

D'après (1.1), G est une extension d'une variété abélienne A par $\mathbf{G}_a^r \times \mathbf{G}_m^s$. D'après (2.6), $\operatorname{algcd}(G) = \dim A$. (1.5.2) et (3.1) montrent que l'on a $\operatorname{ancd}(G^{an}) \leqq \dim A$.

(3.3) On peut démontrer une conjecture de Hartshorne ([4], p. 230) dans le cas des groupes algébriques : Soient G un groupe algébrique et F un O_G-module cohérent. Considérons l'application naturelle

$$\alpha_i : \; H^i(G, F) \to H^i(G^{an}, F^{an}).$$

Alors :

(*a*) α_i est un isomorphisme pour $i < p(G)$;
(*b*) α_i est un isomorphisme pour $i > q(G)$;
(*c*) Le foncteur $F \mapsto F^{an}$ est une équivalence des catégories de faisceaux cohérents si $p(G) \geqq 1$.

Si G est une variété abélienne, l'assertion résulte de GAGA [8]. Donc on peut supposer que G n'est pas une variété abélienne. Alors d'après

(2.7) et (3.2), on a

$$p\,(\mathrm{G}) = 0, \qquad q\,(\mathrm{G}) = \operatorname{algcd}(\mathrm{G}) \geqq \operatorname{ancd}(\mathrm{G}^{an})$$

et, par conséquent, l'assertion est triviale.

(3.4) *Exemple.* — L'extension universelle d'une variété abélienne d'après P. Cartier.

Soit A une variété abélienne de dimension n.

(3.4.1) *Théorie algébrique.* — Soit W l'espace vectoriel dual de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A})$. Alors il existe une extension de A par W, $0 \to \mathrm{W} \to \mathrm{G} \to \mathrm{A} \to 0$, satisfaisant à la condition suivante :

Étant donné un élément $\xi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A})$ i. e. une application linéaire de W dans $\mathbf{G}_a$, alors $\xi_* \mathrm{G} = \mathrm{G}_\xi$ est l'extension de A par $\mathbf{G}_a$ déterminée par $\xi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A}) = \operatorname{Ext}(\mathrm{A}, \mathbf{G}_a)$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{W} & \longrightarrow & \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{A} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_a & \longrightarrow & \xi_*(\mathrm{G}) & \longrightarrow & \mathrm{A} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(3.4.2) *Théorie analytique.* — Supposons que A est isomorphe à V/Γ où Γ est un réseau d'un espace vectoriel complexe V. On note $\overline{\mathrm{V}}$ l'espace vectoriel conjugué de V. Alors on a $\mathrm{V} = \mathrm{H}^0(\mathrm{A}, \Omega^1)^\vee$ et $\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O}_\mathrm{A})^\vee$ d'après le théorème de Hodge. Analytiquement, l'extension universelle G^{an} est donnée par une suite exacte :

$$\begin{array}{l} 0 \to \Gamma \to \mathrm{V} \oplus \overline{\mathrm{V}} \to \mathrm{G}^{an} \to 0 \\ \qquad\; x \mapsto (x, \bar{x}) \end{array}$$

Puisque $\mathbf{R} \otimes_\mathbf{Z} \Gamma \simeq \mathrm{V}$,

$$\begin{array}{l} \mathbf{C} \otimes_\mathbf{Z} \Gamma \to \mathrm{V} \oplus \overline{\mathrm{V}} \\ \lambda \otimes x \mapsto (\lambda x, \overline{\lambda x}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Donc on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{V} \oplus \overline{\mathrm{V}} & \longrightarrow & \mathrm{G}^{an} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \mathbf{C} \otimes_\mathbf{Z} \Gamma & \longrightarrow & \mathbf{C}/\mathbf{Z} \otimes \Gamma & \longrightarrow & 0 \\ & & x & \mapsto & 1 \otimes x & & & & \end{array}$$

Par conséquent, on a $\mathrm{G}^{an} \simeq \mathbf{C}/\mathbf{Z} \otimes \Gamma \simeq \mathbf{C}^{*\,2n}$.

On a montré : quel que soit l'entier positif n, il existe une variété algébrique G telle que algcd (G) $= n$ et que G^{an} soit une variété de Stein (*voir* Umemura [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 90, 1962, p. 193-259).

[2] M. F. Atiyah, *Complex fibre bundles and ruled surfaces* [*Proc. London Math. Soc.*, (3), vol. 5, 1955, p. 407-434].

[3] G. Fischer, *Holomorph-vollständige Faserbündel* (*Math. Ann.*, vol. 180, 1969, p. 341-348).

[4] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties* (*Lecture Notes in Math.*, Springer, vol. 156, 1970.

[5] S. Kleiman, *Toward a numerical theory of ampleness* (*Ann. of Math.*, vol. 84, 1966, p. 293-344).

[6] S. Lang, *Abelian varieties*, Interscience Tracts, New-York, 1959.

[7] Y. Matsushima et A. Morimoto, *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 88, 1960, p. 137-155).

[8] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1956, p. 1-42).

[9] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[10] H. Umemura, *La dimension cohomologique des surfaces algébriques* (à paraître dans *Nagoya Math. Journ.*).

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1971.)

Hiroshi Umemura,
I. H. E. S.,
35, route de Chartres,
91-Bures-sur-Yvette.