ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOCHNAK
J.-J. RISLER

Le théorème des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 3 (1975), p. 353-363
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_3_353_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 8, 1975, p. 353 à 364.

LE THÉORÈME DES ZÉROS POUR LES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES DE DIMENSION 2

PAR J. BOCHNAK ET J.-J. RISLER

RÉSUMÉ. — Si N est une variété analytique réelle de dimension 2, et si $\mathcal{O}$ (N) désigne l'anneau des fonctions analytiques réelles globales sur N, nous donnons une caractérisation algébrique des idéaux de type fini de N ayant la propriété des zéros, et montrons que si N est compacte ou vérifie $H^1(N, \mathbf{Z}_2) = 0$ et si $f \in \mathcal{O}(N)$ est $\geqq 0$, f est une somme de carrés dans $\mathcal{O}$ (N).

I. — Introduction et énoncé des résultats

a. LE THÉORÈME DES ZÉROS.

DÉFINITION I.1 (*cf.* [B] ou [R_2]). — Soient A un anneau commutatif, I un idéal de A.

a. On dit que I est *réel* (ou que I est un R-*idéal*) s'il vérifie la condition suivante : si $f_1, \ldots, f_p$ sont des éléments de A tels que $f_1^2 + \ldots + f_p^2 \in I$, alors $f_i \in I$ $(1 \leqq i \leqq p)$.

b. Si I est un idéal quelconque, on pose

$$\sqrt[R]{I} = \{ a \in A : \exists\, a_i \in A \text{ et } k \in \mathbf{N} \text{ tels que } a^{2k} + \sum_i a_i^2 \in I \}.$$

$\sqrt[R]{I}$ est le plus petit idéal réel de A contenant I (racine réelle de I).

DÉFINITION I.2. — Soient N une variété analytique réelle paracompacte, $\mathcal{O}$ (N) l'anneau des fonctions analytiques sur N, I un idéal de $\mathcal{O}$ (N). On dit que I *a la propriété des zéros* si pour toute fonction $g \in \mathcal{O}(N)$ s'annulant sur Z (I) [$Z(I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0)$ désignant l'ensemble des zéros de I], on a $g \in I$.

Un idéal ayant la propriété des zéros est évidemment réel; nous nous intéressons ici à la réciproque : un idéal réel a-t-il la propriété des zéros? Rappelons qu'un tel théorème est vrai dans le cas des polynômes sur $\mathbf{R}^n$ [R₁] dans le cas des fonctions de Nash [M], pour les germes de fonctions analytiques réelles en un point de $\mathbf{R}^n$ [R_1], pour les idéaux de l'anneau des fonctions C^∞ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ engendrés par un nombre fini de fonctions analytiques [B], et dans certains cas pour les idéaux de fonctions différentiables fermés et de type fini [R_2]; *cf.* aussi le cas formel [Me].

Nous allons démontrer un théorème analogue pour les idéaux de l'anneau $\mathcal{O}(\mathrm{N})$ en dimension 2.

THÉORÈME 1. — *Soient* N *une variété analytique réelle* (*paracompacte*) *de dimension* 2, I *un idéal de type fini de* $\mathcal{O}(\mathrm{N})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. I *a la propriété des zéros dans* $\mathcal{O}(\mathrm{N})$;

b. I *est un idéal réel.*

COROLLAIRE 1. — *Supposons* N *compacte et de dimension* 2, *et soit* I *un idéal de* $\mathcal{O}(\mathrm{N})$; *alors l'idéal de toutes les fonctions de* $\mathcal{O}(\mathrm{N})$ *nulles sur* Z (I) *est égal à* $\sqrt[\mathrm{R}]{\mathrm{I}}$.

Il suffit en effet de remarquer que $\sqrt[\mathrm{R}]{\mathrm{I}}$ est de type fini puisque $\mathcal{O}(\mathrm{N})$ est noethérien [F] et d'appliquer le théorème 1.

b. LE 17ᵉ PROBLÈME DE HILBERT

Le 17ᵉ problème de Hilbert était le suivant : soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ un polynôme prenant des valeurs $\geqq 0$ sur $\mathbf{R}^n$; P est-il une somme de carrés dans le corps des fractions $\mathbf{R}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$? Ce problème a été résolu par l'affirmative par E. Artin (*cf.* [J]).

Un théorème analogue est vrai pour les germes de fonctions analytiques en un point de $\mathbf{R}^n$ [R_1] et pour les fonctions de Nash [M].

Nous allons démontrer ici le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient* N *une variété analytique de dimension* 2 *compacte, ou paracompacte et vérifiant* $\mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathbf{Z}_2) = 0$ *et* $f : \mathrm{N} \to \mathbf{R}$ *une fonction analytique positive sur* N. *Il existe alors* $\varphi_i \in \mathcal{O}(\mathrm{N})$ $(i = 1, \ldots, p)$ *telles que* $f = \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_p^2$.

Soit N une variété analytique de dimension 2; notons $p(\mathrm{N})$ le plus petit nombre entier tel que toute fonction de $\mathcal{O}(\mathrm{N})$ positive ou nulle sur N puisse s'exprimer comme somme de $p(\mathrm{N})$ carrés de fonctions de $\mathcal{O}(\mathrm{N})$.

Le nombre minimal de carrés nécessaires pour représenter un polynôme positif a été étudié dans de nombreux travaux (par exemple [Ca], [P]). Dans le cas analytique on a :

THÉORÈME 3. — *Soit* N *une variété analytique réelle connexe de dimension* 2. *On a* $p(\mathrm{N}) = 2$ *si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathbf{Z}_2) = \mathrm{H}^2(\mathrm{N}, \mathbf{Z}) = 0$, $p(\mathrm{S}^2) = 3$ *et* $2 \leqq p(\mathrm{N}) \leqq 7$ *pour toute variété analytique compacte.*

Dans ce travail, $\mathcal{O}(\mathrm{N})$ désignera l'anneau des fonctions analytiques sur N, $\mathcal{O}_x$ ou $\mathcal{O}_x(\mathrm{N})$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en $x \in \mathrm{N}$ et f_x (resp. I_x) le germe en x d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathrm{N})$ [resp. d'un idéal $\mathrm{I} \in \mathcal{O}(\mathrm{N})$].

II. — Quelques propriétés algébriques des anneaux de fonctions analytiques sur les variétés analytiques réelles de dimension 2

a. Considérons d'abord quelques propriétés valables pour une variété analytique réelle N de dimension quelconque.

Rappelons que toute variété analytique réelle paracompacte se plonge analytiquement dans $\mathbf{R}^n$ [G]; il en résulte que les théorèmes A et B de Cartan sont applicables [C]. Soient $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions analytiques sur N, $\mathcal{O}^*$ le faisceau des fonctions inversibles, $\mathcal{M}^*$ le faisceau des « fonctions méromorphes », et $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ le faisceau des diviseurs sur N.

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to \mathbf{Z}_2 \to 0,$$

où e est l'application exponentielle et $\mathbf{Z}_2$ le faisceau constant $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ sur N.

Comme d'après le théorème B, $\mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathcal{O}) = \mathrm{H}^2(\mathrm{N}, \mathcal{O}) = 0$, on en déduit un isomorphisme : $\mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathbf{Z}_2)$, d'où une suite exacte

$$\Gamma(\mathrm{N}, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(\mathrm{N}, \mathcal{D}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{N}, \mathbf{Z}_2)$$

(qui provient de la suite définissant les diviseurs :

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D} \to 0).$$

On peut opérer de manière analogue en considérant cette fois le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ des fonctions analytiques sur N à valeurs complexes : la suite exacte de l'exponentielle s'écrit cette fois :

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{e} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^* \to 0,$$

d'où par le même procédé la suite exacte

$$\Gamma(\mathrm{N}, \mathcal{M}_{\mathbf{C}}^*) \to \Gamma(\mathrm{N}, \mathcal{D}_{\mathbf{C}}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{N}, \mathbf{Z}).$$

Si $x \in \mathrm{N}$, un germe $\xi_x \in \mathcal{O}_x(\mathrm{N})$ est dit *elliptique* si l'on a $\mathrm{Z}(\xi_x) = \{x\}$.

LEMME 1. — *Soient* N *une variété analytique réelle de dimension n,* D *un sous-ensemble discret de* N. *Pour chaque* $x \in \mathrm{D}$, *soit* ξ_x *un germe elliptique dans* $\mathcal{O}_x(\mathrm{N})$; *il existe alors une fonction analytique* $\varphi : \mathrm{N} \to \mathbf{R}$ *telle que* $\mathrm{Z}(\varphi) = \mathrm{D}$ *et que les idéaux* (φ_x) *et* (ξ_x) *soient égaux dans* $\mathcal{O}_x(\mathrm{N})$ [φ_x *et* ξ_x *sont alors associés dans* $\mathcal{O}_x(\mathrm{N})$].

Démonstration. — Supposons d'abord que $\mathrm{N} = \mathbf{R}^n$. Considérons le diviseur σ définit sur N par

$$\sigma(y) = \begin{cases} \mathcal{O}_y^* & \text{si } y \notin \mathrm{D}, \\ \xi_y \mathcal{O}_y^* & \text{si } y \in \mathrm{D}. \end{cases}$$

Comme $H^1(\mathbf{R}^n, Z_2) = 0$, le diviseur σ est défini par une section globale $\tilde{\sigma}$ de $\mathcal{M}^*$ qui est dans ce cas la fonction cherchée.

Dans le cas général, on peut supposer N plongée analytiquement dans $\mathbf{R}^m$ par le théorème de Grauert, et $\xi_x \geqq 0$, $\forall x \in D$. Pour $x \in D$, soit $y_x = (y_{x,1}, \ldots, y_{x,m})$ un système de coordonnées locales (analytiques) de $\mathbf{R}^m$ tel que N soit définie au voisinage de x par

$$y_{x,n+1} = \ldots = y_{x,m} = 0.$$

Posons

$$\tilde{\xi}_x = \xi_x + \sum_{i=n+1}^{m} y_{x,i}^2 \quad \text{dans } \mathcal{O}_x(\mathbf{R}^m).$$

[Le choix des coordonnées locales a identifié $\mathcal{O}_x(N)$ à un sous-anneau de $\mathcal{O}_x(\mathbf{R}^m)$.]

Il suffit maintenant d'appliquer la première partie de la démonstration aux germes elliptiques $\tilde{\xi}_x$ de $\mathbf{R}^m$, et de prendre la restriction à N de la fonction trouvée.

C. Q. F. D.

Rappelons maintenant un résultat de 0. Forster sur les idéaux primaires; un idéal I de $\mathcal{O}(N)$ est dit *primaire* s'il vérifie la condition suivante : si f et $g \in \mathcal{O}(N)$, $fg \in I$ et $f \notin I$, il existe $p \in N$ tel que $g^p \in I$.

On a alors :

LEMME 2 [F_0]. — *Soient* I *un idéal primaire de* $\mathcal{O}(N)$, f *un élément de* $\mathcal{O}(N)$. *S'il existe* $x \in Z(I)$ *tel que* $f_x \in I_x$, *alors* $f \in I$. [$Z(I)$ *désigne l'ensemble des zéros de* I, f_x *et* I_x *les germes de* f *et* I *en* x.]

Démonstration. — Considérons le faisceau d'idéaux $J = I : (f)$ ($\forall y \in N$, on a $J_y = \{ \varphi_y \in \mathcal{O}_y : \varphi_y f_y \in I_y \}$).

J est un faisceau cohérent, et l'on a $J_x = \mathcal{O}_x$. Il existe donc par le théorème A de Cartan une fonction $g \in J$ telle que $g(x) = 1$; on a par définition $fg \in I$, et si l'on avait $f \notin I$, on aurait $g^p \in I$ pour un entier p convenable, ce qui est absurde puisque $g(x) = 1$, et $x \in Z(I)$ par hypothèse.

Signalons enfin le résultat suivant dont nous aurons besoin :

LEMME 3. — *Soient* N *une variété analytique de dimension n*, $\mathcal{P}$ *un idéal premier de type fini de* $\mathcal{O}(N)$. *Alors* $Z(\mathcal{P})$ *est non vide et connexe.*

Preuve. — Si l'on suppose $\mathcal{P} \neq (1)$, $Z(\mathcal{P})$ est évidemment non vide; pour montrer que $Z(\mathcal{P})$ est connexe, raisonnons par l'absurde : si l'on avait une décomposition : $Z(\mathcal{P}) = Y_1 \cup Y_2$, Y_1 et Y_2 étant fermés et vérifiant $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, il existerait deux fonctions g_1 et g_2 de $\mathcal{O}(N)$ telles que $Z(g_1) = Y_1$ et $Z(g_2) = Y_2$ d'après le théorème B de Cartan; si $\mathcal{P} = (f_1, \ldots, f_k)$, posons :

$$\psi_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i^2 + (g_1^2 - g_2^2)^2} + g_1^2 - g_2^2,$$

$$\psi_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i^2 + (g_1^2 - g_2^2)^2} - g_1^2 + g_2^2.$$

ψ_1 et ψ_2 sont analytiques et n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$ puisque $Z(\psi_1) = Y_1$ et $Z(\psi_2) = Y_2$; mais $\psi_1 \psi_2 = \sum_{i=1}^{k} f_i^2 \in \mathscr{P}$, ce qui contredit le fait que $\mathscr{P}$ est premier.

b. PROPRIÉTÉS SPÉCIALES A LA DIMENSION 2.

LEMME 4. — *Soient* N *une variété analytique réelle de dimension* 2, I *un idéal de type fini de* $\mathcal{O}(N)$; *on peut alors écrire :* $I = \bigcap_{i \in I} \mathscr{P}_i$, *les* $\mathscr{P}_i$ *étant des idéaux primaires et de type fini dans* $\mathcal{O}(N)$ *et vérifiant* $\bigcap_{i \neq j} \mathscr{P}_i \not\subset \mathscr{P}_j$.

Démonstration. — Posons $B_I = \{ x \in Z(I) : \exists \mathscr{P} \in A_{ss}\ \mathcal{O}_x/I_x$ tel que $Z(\mathscr{P}) = \{ x \} \}$. Nous dirons que B_I est l'ensemble des points elliptiques de I : il est évidemment discret (si A est un anneau commutatif, $A_{ss}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à A).

α. Soit $x \in B_I$; l'idéal I_x est alors de la forme $(\xi_x) \cap Q_x$, où $\xi_x \in \mathcal{O}_x$ et Q_x est un idéal $\mathscr{M}_x$-primaire ou égal à $\mathcal{O}_x$. Soit $\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_x/I_x)$ tel que $\mathscr{P}$ soit elliptique : il existe alors un idéal de type fini $\tilde{\mathscr{P}}$ de $\mathcal{O}(N)$ tel que $Z(\tilde{\mathscr{P}}) = \{ x \}$ et que $\tilde{\mathscr{P}}_x$ soit égal à la composante $\mathscr{P}$-primaire de I_x (pour la décomposition $I_x = \xi_x \cap Q_x$).

C'est en effet clair si $\mathscr{P} = \mathscr{M}_x$ car grâce au théorème A de Cartan il existe un idéal $\tilde{Q}$ de type fini dans $\mathcal{O}(N)$ tel que $\tilde{Q}_x = Q_x$, et il existe un élément $f \in \mathcal{O}(N)$ tel que $f_x \in Q_x$ et tel que $Z(f) = \{ x \}$ (lemme 1). Il suffit alors de poser $\tilde{\mathscr{P}} = (\tilde{Q}, f)$.

Dans le cas où $\mathscr{P}$ est principal, cela résulte immédiatement du lemme 1. Notons $(\tilde{\mathscr{P}}_k)_{k \in K}$ la famille d'idéaux de $\mathcal{O}(N)$ ainsi obtenus (pour tous les points de B_I).

β. Soit maintenant $\overline{Z(I) - B_I} = \bigcup_{j \in J} Z_j$ la décomposition de $\overline{Z(I) - B_I}$ en sous-ensembles analytiques irréductibles de N [$\overline{Z(I) - B_I}$, adhérence de $Z(I) - B_I$, est égal à $Z(I)$ auquel on a enlevé les points isolés].

Montrons que l'idéal $\operatorname{Id}(Z_j)$ des fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur Z_j est de type fini; soit $\tilde{N}$ un complexifié de N qui soit une variété de Stein (ce qui est possible : [G]), et $\tilde{Z}_j$ une hypersurface analytique complexe de $\tilde{N}$ complexifiée de Z_j (i. e. telle que $\tilde{Z}_j \cap N = Z_j$). L'idéal $\operatorname{Id}(\tilde{Z}_j)$ est alors de type fini dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(\tilde{N})$ (*cf.* [Co] : c'est l'idéal des sections globales d'un faisceau cohérent dont chaque fibre est engendrée par un élément). L'idéal $\operatorname{Id}(Z_j)$ est alors engendré par les parties réelles et imaginaires des générateurs de $\operatorname{Id}(\tilde{Z}_j)$; nous noterons $(f_{1,j}, \ldots, f_{p_j,j})$ un système de générateurs de $\operatorname{Id}(Z_j)$.

γ. Soit x un point de $Z_j \setminus B_I$ tel que $x \notin Z_k$ pour $k \neq j$; l'idéal I_x est alors principal et peut s'écrire : $I_x = (\xi_x^{n_{j_x}})$ où ξ_x est sans facteur multiple dans $\mathcal{O}_x(N)$ [ξ_x est un générateur de l'idéal du germe $(Z_j)_x$]. L'entier n_{j_x} est alors indépendant du point x choisi (on peut en effet définir n_{j_x} pour tout point $x \in Z_j$ de façon à ce que n_{j_x} soit localement constant; on utilise alors le fait que Z_j est connexe).

Posons maintenant $Q_j = (f_{1,j}^{n_j}, \ldots, f_{p_j,j}^{n_j})$; nous allons montrer que la famille d'idéaux $\{Q_j\}_{j \in J} \cup \{\tilde{\mathscr{P}}_k\}_{k \in K}$ répond à la question.

Les idéaux $\tilde{\mathscr{P}}_k$ sont primaires [car $Z(\tilde{\mathscr{P}}_k)$ est réduit à un point x et $(\tilde{\mathscr{P}}_k)_x$ est primaire par définition] ainsi que les idéaux Q_j, car si $fg \in Q_j$, f par exemple s'annule sur Z_j, et donc $f \in (f_{1,j}, \ldots, f_{p_j,j})$ d'où $f^k \in Q_j$ pour un k convenable.

On a d'autre part évidemment

$$I_x = (\bigcap_j (Q_j)_x) \cap (\bigcap_k (\tilde{\mathscr{P}}_k)_x), \qquad \forall x \in Z(I),$$

par construction. Remarquons maintenant que si I et J sont deux idéaux de $\mathcal{O}(N)$ tels que $I_x \subset J_x$, $\forall x \in N$, et si J est de type fini, alors $I \subset J$ d'après le théorème B de Cartan. On en déduit que $I \subset Q_j$, $\forall_j$ et $I \subset \tilde{\mathscr{P}}_k$, $\forall k$, d'où $I \subset (\bigcap_j Q_j) \cap (\bigcap_k \tilde{\mathscr{P}}_k)$ et d'autre part $(\bigcap_j Q_j) \cap (\bigcap_k \tilde{\mathscr{P}}_k) \subset I$ puisque I est de type fini, ce qui achève de montrer le lemme.

LEMME 5. — *Soient* N *une variété analytique paracompacte de dimension* 2, V *un sous-ensemble analytique fermé de* N [*qui est dans ce cas toujours l'ensemble des zéros d'un idéal de type fini de* $\mathcal{O}(N)$].

Alors l'idéal Id (V) *des fonctions de* $\mathcal{O}(N)$ *nulles sur* V *est engendré par trois éléments.*

Démonstration. — On sait que Id (V) est de type fini (*cf.* La démonstration du lemme 4). Posons Id (V) $= (f_1, \ldots, f_k)$.

Soit

$$V = (\bigcup_{i \in I} V_i) \cup (\bigcup_{j \in J} W_j)$$

la décomposition de V en composantes irréductibles (qui forment un ensemble dénombrable), les W_j étant des points isolés de V et les V_i de dimension 1.

Pour chaque $i \in I$, soit x_i un point de V_i; l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$ tel que $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i\right)_{x_i}$ engendre Id $(V)_{x_i}$ (qui est principal) est un ouvert dense de $\mathbf{R}^k$; il en est de même pour l'ensemble des λ tels que $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i\right)_{W_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{W_j}(N)$.

Le théorème de Baire montre alors qu'il est possible de trouver $\lambda \in \mathbf{R}^k$ tel que si l'on pose $g_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$, $(g_1)_{x_i}$ engendre Id $(V)_{x_j}$, $\forall i$, et $(g_1)_{W_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{W_j}(N)$.

Mais comme $(g_1)_{x_i}$ engendre Id $(V)_{x_i}$, il engendre Id $(V)_y$ pour $y \in V_i \setminus S_i$ où S_i est au plus dénombrable; posons $D = \bigcup_{i \in I} S_i$, D est encore dénombrable, et le même raisonnement permet de trouver un élément $g_2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i f_i$ tel que $(g_2)_y$ engendre Id $(V)_y$ pour $y \in D$, et tel que $(g_2)_{W_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{W_j}(N)$ transverse à $(g_1)_{W_j}$.

Si l'on pose maintenant $g_3 = \sum_{i=1}^{k} f_i^2$, on a alors

$$\mathrm{Id}(\mathrm{V}) = (g_1, g_2, g_3),$$

car

$$\mathrm{V} = \mathrm{Z}(g_1, g_2, g_3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Id}(\mathrm{V})_x = (g_1, g_2, g_3)_x, \quad \forall_x \in \mathrm{V}.$$

C. Q. F. D.

III. — Démonstrations des théorèmes

a. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

LEMME 6. — *Soit $\mathscr{P}$ un idéal premier de l'anneau de série convergente* $\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

a. Si $\mathscr{P}$ est un idéal réel, alors $\mathscr{P}\,\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ est premier.

b. Si $\mathscr{P}$ est de hauteur $n-1$ et si $\mathscr{P}\,\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ est premier, alors $\mathscr{P}$ est un idéal réel.

Démonstration. — *a.* Soit $\{f_j\}$, $j = 1, \ldots, p$ un système de générateurs de $\mathscr{P}$ et soient $a+ib$ et $c+id$ deux éléments dont le produit est dans $\mathscr{P}\,\mathbf{C}\{X\}$:

$$(a+ib)(c+id) = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j + i\,\mu_j) f_j,$$

d'où

$$ac - bd = \sum \lambda_j f_j \qquad \text{et} \qquad ad+bc = \sum \mu_j f_j,$$

soit

$$a(c^2+d^2) = \sum_j f_j (c\,\lambda_j + d\mu_j), \qquad -b(c^2+d^2) = \sum_j f_j (d\lambda_j - c\,\mu_j),$$

d'où immédiatement le résultat en utilisant le fait que $\mathscr{P}$ est un idéal réel et premier.

b. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre minimal p d'éclatements ponctuels [Z] nécessaires pour résoudre le germe de courbe complexe γ défini par l'idéal $\mathscr{P}\,\mathbf{C}\{X\}$.

— Si $p = 0$, $\mathrm{Z}(\mathscr{P}\,\mathbf{C}\{X\})$ est un germe de courbe lisse dont les équations sont réelles : sa partie réelle est donc de dimension topologique 1 ce qui entraîne que $\mathscr{P}$ est réel en vertu du lemme 1 [R_1].

— Si $p > 0$, soit γ la transformée stricte de la courbe $\mathbf{C}^n$; $\tilde{\gamma}$ est encore un germe de courbe irréductible défini par un idéal premier $\tilde{\mathscr{P}}$ de $\mathbf{C}\{Y\}$ dont un système de générateurs est réel; par hypothèse de récurrence, la partie réelle de $\tilde{\gamma}$ est de dimension topologique 1, et il en est de même pour la partie réelle de γ, l'éclatement étant un isomorphisme en dehors de l'origine; l'idéal $\mathscr{P}$ est donc réel en vertu du lemme 1 [R_1].

LEMME 7. — *a. Soit* $\varphi \in \mathcal{O}_x$ *un germe analytique en dimension* 2, *sans facteurs multiples, tel que* $\varphi \geqq 0$.

φ *est alors nécessairement elliptique et il existe* φ_1 *et* φ_2 *dans* $\mathcal{O}_x$ *tels que* $\varphi = \varphi_1^2+\varphi_2^2$.

b. Soient N *une variété analytique de dimension* 2, *telle que* $H^2(N, \mathbf{Z}) = 0$, $\varphi : N \to \mathbf{R}$ *une fonction analytique* $\geqq 0$ *sur* N *telle que* $Z(\varphi)$ *soit discret. Il existe alors* φ_1 *et* φ_2 *dans* $\mathcal{O}(N)$ *telles que* $\varphi = \varphi_1^2+\varphi_2^2$.

c. Avec les mêmes hypothèses que dans b, mais en ne supposant plus que $H^2(N, \mathbf{Z}) = 0$, *il existe* φ_1, φ_2 *et* φ_3 *dans* $\mathcal{O}(N)$ *telles que* $\varphi = \varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2$.

Démonstration. — *a.* φ étant sans facteurs multiples, aucun des facteurs irréductibles de φ n'engendre un idéal réel, car ils gardent tous un signe constant au voisinage de x (*cf.* [R₁] (prop. 3)). Chacun de ces facteurs f_j est alors réductible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, x}$ (lemme 6), donc égal au produit de deux facteurs imaginaires conjugués dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, x}$: $f_j = \psi_j \overline{\psi}_j$. φ est donc le produit de deux termes imaginaires conjugués, i. e. une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}_x$.

b. Si φ est une fonction analytique $\geqq 0$ sur N avec $\varphi^{-1}(0) = D$ (D étant discret), on peut écrire pour tout $x \in D$: $\varphi_x = \psi_x \overline{\psi}_x$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, x}(N) = \mathcal{O}_{\mathbf{C}, x}$ d'après *a*.

Considérons sur N le diviseur σ à valeurs complexes défini par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \psi_x \mathcal{O}^*_{\mathbf{C}, x} & \text{si} \quad x \in D, \\ \mathcal{O}^*_{\mathbf{C}, x} & \text{si} \quad x \notin D, \end{cases}$$

comme par hypothèse $H^2(N, \mathbf{Z}) = 0$, σ est le diviseur d'une fonction analytique ψ, φ et $\psi \overline{\psi}$ sont alors associés dans $\mathcal{O}(N)$, ce qui démontre le lemme dans ce cas puisque $\psi \overline{\psi}$ est une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}(N)$ $[\psi \overline{\psi} = (\operatorname{Re} \psi)^2+(\operatorname{Jm} \psi)^2]$.

c. Passons maintenant au cas général. Supposons d'abord que φ_x soit sans facteur multiple $\forall x \in D = Z(\varphi)$; soit $\tilde{N}$ un complexifié de N qui soit une variété de Stein [G] telle que φ s'étende en une fonction holomorphe sur $\tilde{N}$ notée $\tilde{\varphi}$; soit $A = Z(\tilde{\varphi})$; si A_x désigne la composante connexe de A passant par x, on peut en outre supposer que $A_x \cap A_{x'} = \varnothing$ pour x et x' dans D, $x \neq x'$ et que pour $x \in D$, A_x est réunion de deux germes de sous-ensembles analytiques $A_{x, 1}$ et $A_{x, 2}$ [correspondant à la décomposition : $\tilde{\varphi}_x = \psi_x \overline{\psi}_x$ dans l'anneau $\mathcal{O}_x(\tilde{N})$].

L'ensemble $A_1 = \bigcup_{x \in D} A_{x, 1}$ est ainsi une hypersurface complexe dans $\tilde{N}$; le faisceau d'idéaux formés des fonctions nulles sur A_1 est donc localement principal; il en résulte que l'idéal Id A_1 des fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur A_1 est de type fini (*cf.* [Co]), engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$. Soit $x \in D$: il résulte du théorème A de Cartan que l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{C}^p$ tels que $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\right)_x$ engendre $\operatorname{Id}(A_1)_x$ est un ouvert dense de $\mathbf{C}^p$; il existe donc, par le théorème de Baire, un élément $g = \sum \lambda_i f_i$ tel que g_x engendre $\operatorname{Id}(A_1)_x$, $\forall x \in D$.

$g \overline{g}$ est alors une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}(N)$ telle que $(g \overline{g})_x$ soit associé à φ_x, $\forall x \in D$; mais $g \overline{g}$ s'annule éventuellement en des points non dans D; $\varphi^2+g \overline{g}$

est alors une somme de trois carrés associée à φ dans $\mathcal{O}$ (N), puisque l'on a $Z(\varphi) = Z(\varphi^2+g\bar{g})$, et que $\forall x \in Z(\varphi)$ les germes φ_x et $(\varphi^2+g\bar{g})_x$ sont associés, ce qui entraîne que $\varphi = u(\varphi^2+g\bar{g})$, u étant une fonction inversible dans $\mathcal{O}$ (N) et positive, donc un carré.

Dans le cas où φ_x n'est plus nécessairement sans facteurs multiples, on peut écrire $\forall x \in D$: $\varphi_x = \alpha_x \beta_x^{2k_x} x$ où k_x est un entier $\geqq 0$, α_x et β_x étant sans facteurs multiples. Il existe alors $f \in \mathcal{O}$ (N) telle que $Z(f) \subset D$ et que f_x soit associée à $\beta_x^{k_x}$, $\forall x \in D$ (lemme 1); φ est divisible par f^2, et on applique la démonstration qui précède à $\hat{\varphi} = \varphi/f^2$ qui est telle que $\hat{\varphi}_x$ soit sans facteur multiple $\forall x \in D$.

C. Q. F. D.

Pour montrer le théorème 1, il suffit évidemment de montrer que $b \Rightarrow a$, i. e. que si I est un idéal réel, I a la propriété des zéros dans $\mathcal{O}$ (N).

Supposons d'abord que I soit un idéal réel premier dans $\mathcal{O}$ (N). Deux cas sont possibles : ou $Z(I) = \{x\}$ pour $x \in N$, ou $\dim Z(I) = 1$ et $Z(I)$ est connexe (lemme 3).

Si $\dim Z(I) = 1$, soit y un point lisse de $Z(I)$ tel que le générateur de I_y ne possède pas de facteur elliptique; si $f \in \mathcal{O}$ (N) s'annule sur $Z(I)$ il existe un entier k tel que $f_y^k \in I_y$, d'où $f^k \in I$ (lemme 2) et $f \in I$ puisque I est premier.

Si $Z(I) = \{x\}$, et si I_x est principal, I lui-même est principal (lemme 1) engendré par une fonction φ que l'on peut supposer $\geqq 0$; φ est alors une somme de carrés dans $\mathcal{O}$ (N) (lemme 7), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que I est un idéal réel.

Si $Z(I) = \{x\}$ et si I_x n'est pas principal, I_x peut s'écrire $\xi_x J_x$ où ξ_x est un germe elliptique et J_x un idéal primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}(N)_x$ (ξ_x est un p. g. c. d. des générateurs de I_x).

D'après le lemme 1, il existe $\varphi \in \mathcal{O}$ (N) telle que $Z(\varphi) = \{x\}$ et que φ_x soit associé à ξ_x.

Si $\psi \in \mathcal{O}$ (N) induit une coordonnée locale de N en x, il existe un entier k tel que $\psi^k \in J_x$; on a donc $\xi_x \psi_x^k \in I_x$, d'où $\varphi \psi^k \in I$ (lemme 2) d'où $\psi \in I$ puisque I est supposé premier, ce qui entraîne que I_x est l'idéal maximal de $\mathcal{O}(N)_x$.

Si maintenant f s'annule en x, on a $f_x \in I_x$ d'où $f \in I$ toujours d'après le lemme 2.

Dans le cas général, I est un idéal réel de type fini non nécessairement premier : on peut écrire $I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$, les $\mathcal{P}_i$ étant premiers (car tout idéal réel est intersection d'idéaux premiers) et de type fini avec $\bigcap_{i \in j} \mathcal{P}_i \not\subset \mathcal{P}_j$ (lemme 4).

Mais si I est un idéal réel, il est facile de montrer que les $\mathcal{P}_i$ aussi (*cf.* [R_1]) et il suffit d'appliquer ce qui précède.

C. Q. F. D.

b. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Soient N une variété analytique réelle et $f : N \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction $\geqq 0$. Le lemme 1 montre que l'on peut écrire $f = \varphi g$, $Z(g)$ étant discret et φ_x sans facteur elliptique $\forall x \in Z(\varphi)$.

$Z(g)$ étant discret, g garde toujours un signe constant. On peut donc supposer $g(x) \geqq 0$, $\forall x \in N$, ce qui implique aussi $\varphi(x) \geqq 0$, $\forall x \in N$.

D'après le lemme 7, g est une somme de carrés dans $\mathcal{O}$ (N); pour montrer que f est une somme de carrés, il suffit de montrer que φ est une somme de carrés.

α. *Supposons* $H^1(N, Z_2) = 0$. — Montrons que φ est alors un carré : pour $x \in Z(\varphi)$, on a nécessairement $\varphi_x = \eta_x^2$ où $\eta_x \in \mathcal{O}_x$ puisque φ_x est $\geqq 0$ et sans facteur elliptique; le diviseur σ défini par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \eta_x \mathcal{O}_x^* & \text{si} \quad x \in Z(\varphi), \\ \mathcal{O}_x^* & \text{si} \quad x \notin Z(\varphi) \end{cases}$$

est le diviseur d'une fonction $\tilde{\sigma} \in \mathcal{O}$ (N) (*cf.* la démonstration du lemme 1), et φ est associée à $\tilde{\sigma}^2$ dans $\mathcal{O}$ (N). Le théorème 2 est donc montré dans ce cas.

β. *Cas général* (N *compacte*). — Dans ce cas φ n'est plus nécessairement un carré (rappelons que φ est $\geqq 0$ sur N, et φ_x sans facteur elliptique $\forall x \in N$).

Soit $Z(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{p} Z_i$ la décomposition de $Z(\varphi)$ en sous-ensembles analytiques irréductibles (les Z_i sont en nombre fini car N est supposée compacte).

Pour chaque i $(1 \leqq i \leqq p)$, on peut définir un nombre entier n_i de la manière suivante : si $x \in Z_i$ et $\varphi_x = \eta^{2\alpha} \xi^{2\beta}$ dans $\mathcal{O}(N)_x$, η et ξ étant produits d'éléments premiers, $Z(\eta) \subset Z_i$ et $Z(\xi) \not\subset Z_i$, alors $\alpha = n_i$ (l'entier n_i que l'on définit ainsi en un point $x \in Z_i$ est en effet localement constant, donc constant puisque Z_i est connexe).

D'après le lemme 5, $\mathrm{Id}(Z_i) = (g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i})$, $(g_{1,i}, g_{2,i})_x$ engendrant $\mathrm{Id}(Z_i)_x$, $\forall x \in Z_i$.

Il est alors immédiat de voir que $\forall x \in Z$, φ_x est associé à $\prod_{i=1}^{p} [(g_{1,i}^{n_i})^2 + (g_{2,i}^{n_i})^2]$. Remarquons que ce produit est une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}$ (N) :

$$\prod_{i=1}^{p} [(g_{1,i}^{n_i})^2 + (g_{2,i}^{n_i})^2] = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

car un produit de sommes de deux carrés est une somme de deux carrés dans tout anneau commutatif A (il suffit de se placer dans A $[i]$ avec $i^2 = -1$).

φ est alors associée à $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi^2$ dans $\mathcal{O}$ (N), ce qui achève la démonstration du théorème 2.

c. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — Rappelons que si N est une variété analytique réelle, p (N) désigne le plus petit nombre entier tel que toute fonction de $\mathcal{O}$ (N) positive ou nulle sur N puisse s'exprimer comme somme de p (N) carrés de fonctions de $\mathcal{O}$ (N).

Il est d'abord clair que $p(N) \geqq 2$ pour toute variété analytique réelle N, il suffit de prendre un germe elliptique en un point de N qui corresponde au germe défini par $x^2 + y^2$ à l'origine de $\mathbf{R}^2$.

α. *Montrons que* $p(N) = 2$ *si* $H^1(N, Z_2) = H^2(N, Z) = 0$. — Si $f \in \mathcal{O}$ (N) est $\geqq 0$ sur N, f peut s'écrire : $f = \varphi g$, φ étant sans facteur elliptique, donc un carré de $\mathcal{O}$ (N) car $H^1(N, Z_2) = 0$ (démonstration du théorème 2), et $Z(g)$ étant discret, ce qui entraîne que g est une somme de deux carrés puisque $H^2(N, Z) = 0$ (lemme 7, *b*). On a donc bien $p(N) = 2$.