Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jérôme Brun

Sur la simplification dans les isomorphismes analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, no 4 (1976), p. 533-538

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_4_533_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 9, 1976, p. 533 à 538.

SUR LA SIMPLIFICATION DANS LES ISOMORPHISMES ANALYTIQUES

PAR JÉRÔME BRUN

On s'intéresse au problème de la simplification dans les isomorphismes *analytiques complexes* entre produits de *variétés*, c'est-à-dire qu'on tente de répondre à la question suivante : si $X \times Z \simeq Y \times Z$, a-t-on $X \simeq Y$?

Dans [1], on a étudié le cas où X, Y, Z sont compactes, et on a montré en particulier qu'on peut alors simplifier par $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ (1).

Dans le présent travail, on montre qu'il est possible de simplifier en toute généralité par le disque. En revanche, on donne un exemple de deux variétés (de Stein) X et Y non isomorphes et telles que $X \times \mathbf{C} \simeq Y \times \mathbf{C}$.

Je tiens à remercier A. Hirschowitz pour m'avoir guidé au cours de ce travail, et J. M. Lemaire pour son aide topologique à propos de la proposition 1.

(A) SIMPLIFICATION PAR LE DISQUE. — Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* X, Y *deux variétés analytiques complexes,* D *le disque-unité de* **C**. *Si* $X \times D \simeq Y \times D$, *alors* $X \simeq Y$, (*les isomorphismes étant analytiques*).

(1) Nous avons besoin de munir d'une topologie le groupe d'automorphismes d'une variété. Plus précisément, soient X une variété analytique, Aut X son groupe d'automorphismes analytiques, $\delta : X \to X \times X$ l'application diagonale. Considérons la famille suivante :

$$U_{K, L} = \{ g \in \operatorname{Aut} X \mid \text{pour tout } x \in K : (x, g(x)) \in L \},$$

où K parcourt l'ensemble des compacts de X, et L l'ensemble des ouverts de $X \times X$ contenant $\delta(K)$.

Il est facile de vérifier qu'il existe une topologie de groupe sur Aut X pour laquelle la famille précédente est une base de voisinages de l'identité (topologie de la convergence compacte).

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME (H. Cartan). — *Soient* A *un ouvert borné de* $\mathbf{C}^n$, B *une variété analytique complexe,* F *un automorphisme de* $A \times B$ *appartenant à la composante connexe de l'identité*

(1) Et, plus généralement, par les grassmanniennes (*cf.* [6]).

dans Aut (A × B) *muni de la topologie précédente. Alors* F *est de la forme*

$$(a, b) \to (f(a), g(a, b)) \qquad \textit{avec} \quad f \in \operatorname{Aut} A.$$

En effet, H. Cartan [2] (th. II), démontre le résultat suivant : soient A un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$, B un ouvert de $\mathbf{C}^p$, X = A × B. Si K est un compact de X, il existe un ouvert L de X × X contenant δ (K) et tel que, si g et g^{-1} appartiennent à $U_{K,L}$ (défini ci-dessus), alors g est de la forme $(a, b) \to (g_1(a), g_2(a, b))$ où $g_1 \in \operatorname{Aut} A$. Quelques modifications élémentaires dans la démonstration permettent alors d'énoncer le théorème ci-dessus.

On utilisera également le lemme suivant, dont la démonstration est triviale :

LEMME 1. — *Soient* X *et* Y *deux variétés, s un isomorphisme de* X *dans* Y. *Alors l'application*

$$\sigma : \operatorname{Aut} X \to \operatorname{Aut} Y,$$
$$g \to sgs^{-1}$$

est continue (*pour les topologies précédentes*).

(2) On utilisera le fait que le disque est un ouvert borné à l'aide du résultat précédent, mais on utilisera également le fait que son groupe d'automorphismes a une structure particulière.

Si $\lambda_0 \in D$, on notera $G_{\lambda_0} = \{ g \in \operatorname{Aut} D \mid g(\lambda_0) = \lambda_0 \}$. On a alors le :

LEMME 2. — *Soient* X *une variété analytique et* Z *une sous-variété analytique* (*fermée*) *connexe de* X × D, *globalement invariante sous l'action de* G_{λ_0} *définie par* : $g.(x, \lambda) = (x, g(\lambda))$ *Alors l'une des deux assertions suivantes est vraie :*

(i) *il existe une sous-variété* $\hat{Z}$ *de* X *telle que* $Z = \hat{Z} \times D$;

(ii) *il existe une sous-variété* Z′ *de* X *telle que* $Z = Z' \times \{ \lambda_0 \}$.

Démonstration. — Observons tout d'abord que les seuls sous-ensembles analytiques du disque invariants sous G_{λ_0} sont : Ø, $\{ \lambda_0 \}$ et D.

Si donc $\pi : X \times D \to D$ dénote la première projection, pour tout $x \in \pi(Z)$, on a : $\pi^{-1}(x) \cap Z$ égale $\{ \lambda_0 \}$ ou D. Soit Z_1 la sous-variété de X définie par : $Z_1 \times \{ \lambda \} = Z \cap (X \times \{ \lambda \})$ avec $\lambda \neq \lambda_0$. $Z_1 \times D$ est une sous-variété fermée de Z, qui contient l'ouvert de Z : $Z \cap (X \times \{D - \lambda_0 \})$. Donc, ou $Z_1 \times D = Z$, ou $Z_1 = \emptyset$.

C. Q. F. D.

(3) *Démonstration du théorème.* — Il est clair que X et Y ont même dimension. Soit $n = \dim X = \dim Y$. Considérons, si $k \in N$, l'assertion

$$(S_k) \begin{cases} \text{(i) } X \simeq Y \\ \text{ou} \\ \text{(ii) il existe des variétés (de dimension } n-k) \, X_k \text{ et } Y_k \text{ telles que : } X \simeq X_k \times D^k \\ \quad \text{et } Y \simeq Y_k \times D^k. \end{cases}$$

Il suffit de démontrer (S_k) pour tout $k \in \mathbb{N}$, car (S_n) implique $X \simeq Y$. On va procéder par récurrence, en remarquant d'abord que (S_0) est vraie, et en supposant établie (S_k).

Montrons à présent (S_{k+1}). On peut supposer qu'on est dans le cas (ii) de (S_k). Comme $X \times D \simeq Y \times D$, il existe un isomorphisme

$$f_k : \quad X_k \times D^{k+1} \xrightarrow{\sim} Y_k \times D^{k+1}.$$

Soit $Z = f_k^{-1}(Y_k \times \{0, \ldots, 0\})$.

Nous allons à présent étudier Z et établir à son sujet deux lemmes.

Soit $z_0 = (x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})$ un élément de Z.

Définissons une action continue de $G = G_{\lambda_1} \times \ldots \times G_{\lambda_{k+1}}$ sur $X_k \times D^{k+1}$ par, si $g = (g_1, \ldots, g_{k+1}) \in G$ et si $a = (x, z_1, \ldots, z_{k+1}) \in X_k \times D^{k+1}$:

$$g.a = (x, g_1(z_1), \ldots, g_{k+1}(z_{k+1})).$$

LEMME 3. — *Z est globalement invariant sous l'action précédente.*

Démonstration. — Soit g un élément quelconque de G et σ l'automorphisme de $X_k \times D^{k+1}$ défini par : $\sigma(a) = g.a$.

La topologie étant celle définie en (1), σ, par construction et puisque G est connexe, appartient à la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Aut}(X_k \times D^{k+1})$. Donc, d'après le lemme 1, $\tau = f_k \circ \sigma \circ f_k^{-1}$ appartient à la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Aut}(Y_k \times D^{k+1})$, et, d'après le théorème d'Henri Cartan, τ est de la forme, si $(y, z) \in Y_k \times D^{k+1}$: $\tau(y, z) = (g(y, z), \tau_1(z))$. En particulier, il existe $\delta \in D^{k+1}$ tel que $\tau(Y_k \times \{0, \ldots, 0\}) = Y_k \times \{\delta\}$. Or σ laisse fixe le point $z_0 = (x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})$; donc τ conserve son image par f_k, qui est de la forme $(y, 0, \ldots, 0)$ et ainsi $\delta = (0, \ldots, 0)$ et $\tau(Y_k \times \{0, \ldots, 0\}) = Y_k \times \{0, \ldots, 0\}$, d'où $\sigma(Z) = Z$.

C. Q. F. D.

Nous allons en déduire le :

LEMME 4. — *L'une des deux assertions suivantes est vraie :*

(i) $Z \simeq X_k$;

(ii) *il existe une variété* Z' *telle que* $Z \simeq Z' \times D$.

Démonstration. — On utilise le lemme précédent en faisant agir successivement les facteurs $G_{\lambda_{k+1}}, G_{\lambda_k}, \ldots, G_{\lambda_1}$ du groupe G, et en appliquant à chaque étape le lemme 2 :

Pas 1. — Le lemme 2 appliqué à $Z \subset (X_k \times D^k) \times D$ donne deux cas :

(i) $Z = \hat{Z} \times D$,

C. Q. F. D.

ou bien

(ii) $Z = Z^{(1)} \times \{\lambda_{k+1}\}$ avec $Z^{(1)} \subset X_k \times D_k$. Alors :

Pas 2. — Le lemme 2 appliqué à $Z^{(1)} \subset (X_k \times D^{k-1}) \times D$ donne deux cas :

(i) $Z^{(1)} = \hat{Z}^{(1)} \times D$,

C. Q. F. D.

(car $Z^{(1)} \simeq Z$), ou bien

(ii) $Z^{(1)} = Z^{(2)} \times \{ \lambda_k \}$ avec $Z^{(2)} \subset X_k \times D^{k-1}$.

Alors :

Pas $(k+1)$ (si on n'a pas conclu avant). — Le lemme 2 appliqué à $Z^{(k)} \subset X_k \times D$ donne deux cas :

(i) $Z^{(k)} = \hat{Z}^{(k)} \times D$,

C. Q. F. D.

(car $Z^{(k)} \simeq Z$) ou bien

(ii) $Z^{(k)} = Z^{(k+1)} \times \{ \lambda_1 \}$ avec $Z^{(k+1)} \subset X_k$.

Or $\dim Z^{(k+1)} = \dim Z = n-k = \dim X_k$. Donc $Z^{(k+1)} = X_k$ et $Z \simeq X_k$.

C. Q. F. D.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Par construction, $Z \simeq Y_k$. D'après le lemme 4 :

— soit $Z \simeq X_k$ et alors $X_k \simeq Y_k$ et donc $X \simeq Y$;

— soit $Z \simeq Z' \times D$ et alors il existe une variété Y_{k+1} telle que $Y_k \simeq Y_{k+1} \times D$ et donc $Y \simeq Y_{k+1} \times D^{k+1}$.

Maintenant, le même raisonnement pour l'isomorphisme f_k^{-1} montre que : soit $X \simeq Y$, soit il existe une variété X_{k+1} telle que $X \simeq X_{k+1} \times D^{k+1}$

Ainsi, on a établi (S_{k+1}) et donc le théorème.

(B) NON SIMPLIFICATION PAR LE PLAN. — Il s'agit de construire l'exemple suivant :

Exemple. — Il existe deux variétés (de Stein) X et Y, non isomorphes et telles que $X \times \mathbf{C}$ et $Y \times \mathbf{C}$ soient isomorphes.

Rappelons d'abord qu'un fibré vectoriel E sur une variété S est dit stablement trivial s'il existe un fibré trivial θ sur S tel que $E \oplus \theta$ soit trivial.

Soit $S^5 \subset \mathbf{R}^6$ la sphère. On utilisera le résultat topologique suivant :

PROPOSITION 1. — *Il existe sur* S^5 *un fibré vectoriel complexe* E *de rang deux, stablement trivial et non trivial.*

Démonstration. — On sait que les fibrés vectoriels complexes de rang p sur S^n ($n \geqq 3$) peuvent être définis par une application $\alpha : S^{n-1} \to U(p)$ et sont classifiés dans $\pi_{n-1}(U(p))$.

D'après un théorème de Borel-Hirzebruch (*voir* par exemple Douady [4]), $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbf{Z}/n!\,\mathbf{Z}$. Donc $\pi_4(U(2)) = \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ et il y a un fibré non trivial E, de rang deux, sur S^5.

D'après le théorème de périodicité de Bott (*voir* par exemple également [4]) : $\pi_{2n}(U(k)) = 0$ pour $k > n$. Si donc $\theta = S^5 \times \mathbf{C}$ est le fibré trivial, $E \oplus \theta$ est classifié dans $\pi_4(U(3)) = 0$, donc est trivial.

C. Q. F. D.

On aura également besoin des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 2. — *Soient* X *et* Y *deux fibrés holomorphes de base un ouvert* borné *de* $\mathbf{C}^n$ *et de fibre* $\mathbf{C}^p$. *Si* X *et* Y *sont isomorphes en tant que variétés, alors* X *et* Y *sont isomorphes en tant que fibrés holomorphes.*

Démonstration. — Soit $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ un isomorphisme entre les variétés X et Y. Il suffit de montrer (*cf.* Dieudonné [3], 16.12.2) que φ (resp. φ^{-1}) envoie chaque fibre de X (resp. Y) sur une fibre de Y (resp. X).

Soient $\pi : X \to V$ et $\rho : Y \to V$ les fibrés. Soient $v \in V$ et $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(v)$. Pour toute fonction holomorphe bornée $f : X \to \mathbf{C}$, on a nécessairement $f(x_1) = f(x_2)$, car la restriction de f à $\pi^{-1}(v)$ est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{C}^p$, donc une constante. Donc, pour toute fonction holomorphe bornée $g : V \to \mathbf{C}$, on a

$$g(\rho(\varphi(x_1))) = g(\rho(\varphi(x_2)))$$

ce qui implique $\rho(\varphi(x_1)) = \rho(\varphi(x_2))$ car V est un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. — *Soient* X *et* Y *deux fibrés vectoriels holomorphes isomorphes en tant que fibrés holomorphes. Alors ils sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels holomorphes.*

Démonstration. — Soient $\pi : X \to S_1$ et $\rho : Y \to S_2$ les fibrés et $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ l'isomorphisme de fibrés. φ n'est pas nécessairement linéaire sur chaque fibre. Cependant, nous allons trouver un isomorphisme de fibrés vectoriels entre X et Y à l'aide de l'application $T\varphi : TX \to TY$, qui induit un isomorphisme $\varphi'_0 : TX \mid X_0 \to TY \mid Y_1$, où X_0 est la section nulle de X et Y_1 son image par φ (donc une section de Y). $TX \mid X_0$ et $TY \mid Y_1$ s'identifient respectivement aux sommes directes de fibrés vectoriels : $TS_1 \oplus_{S_1} X$ et $TS_2 \oplus_{S_2} Y$ (*cf.* Dieudonné [3], 16.19, exercice 11), et φ'_0 induit ainsi un isomorphisme de fibrés vectoriels entre X et Y.

C. Q. F. D.

Nous pouvons à présent entreprendre la

CONSTRUCTION DE L'EXEMPLE

1° Soit $U = \{ x \in \mathbf{R}^6 \mid 0 < \| x \| < 2 \}$.

Si $\lambda : U \to S^5$ est la rétraction naturelle, il est clair que le fibré $\lambda^* E$ est encore stablement trivial et non trivial sur U.

2° Soit $V = \{ z = x+iy \in \mathbf{C}^6 \mid \| y \| < \| x \| < 2 \}$.

V est encore homotope à U et si $\mu : V \to U$ est la rétraction naturelle, $\mu^*(\lambda^* E)$ est un fibré stablement trivial et non trivial sur V.

3° V est de Stein. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} V &= \{ z = x+iy \mid \|y\| - \|x\| < 0 \} \cap \{ z = x+iy \mid \|x\| - 2 < 0 \} \\ &= \{ z \mid \varphi_1(z) < 0 \} \cap \{ z \mid \varphi_2(z) < 0 \} \end{aligned}$$

avec

$$\varphi_1(z) = \mathrm{Re}\left(-\sum_{i=1}^{6} z_i^2\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - 4.$$

φ_1 et φ_2 sont des fonctions plurisousharmoniques, ce qui permet de conclure.

4° D'après un théorème de Grauert [5], on sait qu'il existe, sur une variété de Stein, une correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels topologiques et les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes. On peut ainsi munir $\mu^*(\lambda^* E)$ d'une structure de fibré vectoriel holomorphe sur V. Si X est ce nouveau fibré, X est encore stablement trivial et non trivial. Plus précisément, on a un isomorphisme analytique : $X \oplus (V \times \mathbf{C}) \simeq V \times \mathbf{C}^3$, ce qui s'écrit encore : $X \times \mathbf{C} \simeq Y \times \mathbf{C}$, avec $Y = V \times \mathbf{C}^2$.

5° Il reste à vérifier que X et Y ne sont pas deux variétés isomorphes. Or, d'après la proposition 3, X et Y ne sont pas isomorphes en tant que fibrés holomorphes. De plus, d'après la proposition 2, V étant un ouvert borné de $\mathbf{C}^6$, X et Y ne sont pas isomorphes en tant que variétés.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Brun, *On the Cancellation Problem for Compact Complex Analytic Manifolds* (à paraître dans *Proceedings of the* 1975 *Summer Institute of Several Complex Variables*).

[2] H. Cartan, *Les transformations du produit topologique de deux domaines bornés* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 64, 1936, p. 37-48).

[3] J. A. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[4] A. Douady, *Séminaire Henri Cartan*, 1959-1960, exposé n° 11, fascicule 2.

[5] H. Grauert, *Analytische Faserungen über holomorphvollständigem Räumen* (*Math. Ann.*, vol. 135, 1958, p. 263-273).

[6] J. Brun, *Sur la simplification par les grassmanniennes* [*Séminaire Norguet*, 1976 (à paraître dans *Lecture Notes*)].

(Manuscrit reçu le 9 avril 1976.)

Jérôme Brun,
Université de Nice,
I.M.S.P.,
Mathématiques,
Parc Valrose,
06034 Nice Cedex.