

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-L. CATHELIN

Sur un théorème d'intégralité de B. Kostant

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, n° 1 (1977), p. 73-85

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_1_73_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME D'INTÉGRALITÉ DE B. KOSTANT

PAR J.-L. CATHELIN

On sait l'analogie existant entre les théories de Kirillov-Auslander-Kostant et la théorie des représentations des extensions de groupes de G. W. Mackey [9]. Dans la théorie de B. Kostant, un théorème d'intégralité (*cf.* [5], théorème 5.7.1) joue le rôle tenu dans la théorie de G. W. Mackey par l'obstruction de Mackey... On donne ici une démonstration du théorème d'intégralité de B. Kostant dans l'esprit de la théorie de Mackey en passant par un analogue infinitésimal de l'obstruction de Mackey et en utilisant la théorie de Chern-Weil (*cf.* [3] et [6]).

1. Schéma de la démonstration

Rappelons la situation du théorème de B. Kostant : on a un groupe de Lie G , réel, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} ; G opère dans le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} par l'action coadjointe. Si f est un élément de \mathfrak{g}^* , on note $\mathfrak{g}(f)$, l'annulateur de f :

$$\mathfrak{g}(f) = \{x \in \mathfrak{g}; \langle f, [x, y] \rangle = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\};$$

on note de plus, $G(f)$, le stabilisateur de f dans G pour l'action coadjointe; $G(f)$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$. La restriction de f à $\mathfrak{g}(f)$ est un caractère de $\mathfrak{g}(f)$, invariant par $G(f)$.

Le problème est de savoir si $\sqrt{-1}f|_{\mathfrak{g}(f)}$ est la différentielle en l'élément neutre de $G(f)$ d'un caractère de $G(f)$ à valeurs dans \mathbb{C}^* . On dit alors que f est entière. Nous montrerons qu'il existe une obstruction naturelle à ce problème, dans la cohomologie du classifiant de $G(f)$. Plus précisément, on a une suite exacte (*cf.* § 3) :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}_d^*) \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}^*) \xrightarrow{r} H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbb{C})^{G(f)} \rightarrow \dots \\ \rightarrow \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}_d^*) \rightarrow \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}^*);$$

où \underline{H}^* désigne la cohomologie algébrique d'un groupe topologique au sens de C. C. Moore [7] et D. Wigner [8]; \mathbb{C}_d^* est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls, muni de la topologie discrète; \mathbb{C}_d^* et \mathbb{C}^* sont considérés comme $G(f)$ -modules triviaux;

$H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbf{C})$ est la cohomologie au sens de l'algèbre de Lie, $\mathfrak{g}(f)$ opérant trivialement dans \mathbf{C} ; d'autre part $H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbf{C})^{G(f)}$ désigne les invariants de $H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbf{C})$ par $G(f)$, dans l'action adjointe. $H^1(G(f), \mathbf{C}^*)$ s'identifie au groupe des caractères de $G(f)$ à valeurs dans \mathbf{C}^* et, r est l'application qui à un tel caractère associe sa différentielle en l'élément neutre de $G(f)$, différentielle qui tombe bien dans $H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbf{C})^{G(f)}$; l'application t sera construite explicitement dans le paragraphe 3.

Ceci étant, remarquons que $\sqrt{-1}f|_{\mathfrak{g}(f)}$ peut être considérée comme un élément de $H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbf{C})^{G(f)}$; par suite d'après l'exactitude de la suite (1), $\sqrt{-1}f$ se relève en un caractère de $G(f)$ dans \mathbf{C}^* si et seulement si $t(\sqrt{-1}f) = 0$. On peut donc considérer $\alpha_f = t(\sqrt{-1}f) \in \underline{H}^2(G(f), \mathbf{C}_d^*)$ comme une obstruction naturelle au relèvement de $\sqrt{-1}f$.

On a un isomorphisme canonique entre $\underline{H}^2(G(f), \mathbf{C}_d^*)$ et $H^2(B_{G(f)}, \mathbf{C}^*)$ (cf. [8] et § 4), où $B_{G(f)}$ est le classifiant de $G(f)$. On peut donc considérer l'obstruction α_f comme un élément de $H^2(B_{G(f)}, \mathbf{C}^*)$.

Soit X l'orbite de f par G dans l'action coadjointe; on obtient un fibré principal [en identifiant X à $G/G(f)$] :

$$P: G \rightarrow X,$$

de groupe structural $G(f)$, où $P(g) = g.f$; le point désigne l'action coadjointe. Au fibré P est associée classiquement une suite spectrale de A. Borel et H. Cartan (cf. G. Bredon [2] et A. Borel [1]), telle que

$$E_2^{p,q} = H^p(B_{G(f)}, H^q(G, \mathbf{C}^*)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{C}^*),$$

où $H^q(G, \mathbf{C}^*)$ désigne le fibré plat sur $B_{G(f)}$, déduit du fibré universel, par l'action de $G(f)$ dans $H^q(G, \mathbf{C}^*)$, induite par l'action à droite de $G(f)$ dans G . Remarquons que cette action peut être non triviale car $G(f)$ n'est pas connexe, en général. $H^p(B_{G(f)}, H^q(G, \mathbf{C}^*))$ est alors la cohomologie à coefficients locaux. Notons que $H^p(B_{G(f)}, H^q(G, \mathbf{C}^*)) \simeq H^p(G(f), (H^q(G, \mathbf{C}^*))_d)$. La suite exacte en basse dimension associée à cette suite spectrale s'écrit :

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^1(B_{G(f)}, \mathbf{C}^*) \rightarrow H^1(X, \mathbf{C}^*) \rightarrow H^1(G, \mathbf{C}^*)^{G(f)} \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^2(B_{G(f)}, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\rho} H^2(X, \mathbf{C}^*);$$

où ρ est l'homomorphisme caractéristique associé au fibré P (cf. [1]).

Considérons enfin la suite exacte

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C^* \rightarrow 1,$$

où i est l'injection canonique et $j(z) = e^{2\sqrt{-1}\pi z}$; à cette suite est associée la suite exacte en cohomologie

$$(3) \quad \dots \rightarrow H^2(X, Z) \xrightarrow{i} H^2(X, C) \xrightarrow{j} H^2(X, C^*) \rightarrow \dots$$

Soit maintenant ω la forme canonique de l'orbite X de f (cf. [5]). Rappelons qu'elle est fermée et caractérisée par

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \quad \omega(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) = \frac{1}{2\pi} \psi^{[\eta, \xi]},$$

où $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{v}(X)$ est le morphisme, d'algèbres de Lie, de \mathfrak{g} dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur X , déduit de l'action de G dans X , et où d'autre part, ψ^ξ est la fonction C^∞ sur X , définie par

$$\forall x \in X \subset \mathfrak{g}^*, \quad \psi^\xi(x) = \langle x, \xi \rangle.$$

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est le but de l'article :

THÉORÈME. — *Dans les notations qui précèdent :*

$$\rho(\alpha_f) = j([\omega]),$$

où $[\omega]$ est la classe de ω dans $H^2(X, \mathbb{C})$.

COROLLAIRE (B. Kostant). — *Si G est connexe et simplement connexe, f est entière si et seulement si la forme ω est entière.*

Déduisons le corollaire du théorème. Sans hypothèses sur G , si f est entière, alors $\alpha_f = 0$, par suite $j([\omega]) = 0$, d'où ω est entière d'après l'exactitude de (3).

Réciproquement, si ω est une forme entière, alors $j([\omega]) = 0$; mais, si G est connexe et simplement connexe $H^1(G, \mathbb{C}^*) = 0$. par suite ρ est injective par l'exactitude (2), d'où $\alpha_f = 0$; ce qui entraîne que f est entière.

2. Théorie de Čech des extensions de groupes de Lie

On se propose dans ce paragraphe de décrire, à l'aide d'un procédé de Čech, le groupe $\underline{H}^2(Q, A)$, où Q et A sont des groupes de Lie non nécessairement connexes, A est abélien, et l'action de Q dans A est supposée triviale. $\underline{H}^2(Q, A)$ s'identifie au groupe des extensions centrales de Q par A .

Soit U un voisinage ouvert de l'élément neutre e de Q , on considère le recouvrement $\mathcal{U}_1 = (U_g)_{g \in Q}$ de Q , où U_g est le translaté à gauche de U par g . On définit alors les ensembles d'indices suivants :

$$I_1 = Q;$$

$$I_2 = \{(g_1, g_2, g_{(1,2)}) \in Q^3;$$

$$\text{tels qu'il existe } g', g'' \text{ avec } g' \in U_{g_1}, g'' \in U_{g_2}, g' \cdot g'' \in U_{g_{(1,2)}}\};$$

$$I_3 = \{(g_1, g_2, g_3, g_{(1,2)}, g_{(2,3)}, g_{(1,2,3)}) \in Q^6;$$

$$\text{tels qu'il existe } g', g'', g'''$$

$$\text{avec } g' \in U_{g_1}, g'' \in U_{g_2}, g''' \in U_{g_3}$$

$$\text{et } g' \cdot g'' \in U_{g_{(1,2)}}, g'' \cdot g''' \in U_{g_{(2,3)}}, g' \cdot g'' \cdot g''' \in U_{g_{(1,2,3)}}\};$$

à ces ensembles d'indices sont associés les recouvrements \mathcal{U}_1 de Q , $\mathcal{U}_2 = (V_\alpha)_{\alpha \in I_2}$ de Q^2 et $\mathcal{U}_3 = (W_\beta)_{\beta \in I_3}$ de Q^3 où :

– pour $\alpha = (g_1, g_2, g_{(1,2)})$:

$$V_\alpha = \{(g', g''); g' \in U_{g_1}, g'' \in U_{g_2}, g' \cdot g'' \in U_{g_{(1,2)}}\};$$

– pour $\beta = (g_1, g_2, g_3, g_{(1,2)}, g_{(2,3)}, g_{(1,2,3)})$:

$$W_\beta = \{(g', g'', g'''); g' \in U_{g_1}, g'' \in U_{g_2}, g''' \in U_{g_3}, g' \cdot g'' \in U_{g_{(1,2)}}, \\ g'' \cdot g''' \in U_{g_{(2,3)}}, \text{ et } g' \cdot g'' \cdot g''' \in U_{g_{(1,2,3)}}\}.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, une i -cochaîne de Čech algébrique relativement à U , à valeurs dans A , est la donnée d'une 0-cochaîne au sens habituel sur le recouvrement \mathcal{U}_i à valeurs dans le faisceau des fonctions C^∞ de Q^i dans A . On suppose ces cochaînes normalisées au sens suivant : la fonction d'une i -cochaîne correspondant à l'ouvert de \mathcal{U}_i dont l'indice ne comporte que l'élément neutre e de Q , prend la valeur 0 dans A , en l'élément neutre de Q^i . On note $\mathcal{C}_U^i(Q, A)$ les groupes abéliens ainsi obtenus; on a un morceau de complexe

$$\mathcal{C}_U^1(Q, A) \xrightarrow{\delta_U} \mathcal{C}_U^2(Q, A) \xrightarrow{\delta_U} \mathcal{C}_U^3(Q, A),$$

où pour $(\varphi_g)_g \in \mathcal{C}_U^1(Q, A)$ on a posé

$$[\delta_U((\varphi_g)_g)]_{(g_1, g_2, g_{(1,2)})}(g', g'') = \varphi_{g_2}(g'') - \varphi_{g_{(1,2)}}(g' \cdot g'') + \varphi_{g_1}(g')$$

et pour $(\psi_\alpha)_\alpha \in \mathcal{C}_U^2(Q, A)$, avec $\beta = (g_1, g_2, g_3, g_{(1,2)}, g_{(2,3)}, g_{(1,2,3)})$:

$$[\delta_U((\psi_\alpha)_\alpha)]_\beta(g', g'', g''') = \psi_{(g_2, g_3, g_{(2,3)})}(g'', g''') - \psi_{(g_{(1,2)}, g_3, g_{(1,2,3)})}(g' \cdot g'', g''') \\ + \psi_{(g_1, g_{(2,3)}, g_{(1,2,3)})}(g', g'' \cdot g''') - \psi_{(g_1, g_2, g_{(1,2)})}(g', g'').$$

On note $\underline{H}_U^2(Q, A)$ le groupe quotient des 2-cocycles par les 2-cobords. On a le résultat suivant :

PROPOSITION – Si U est contractile, $\underline{H}^2(Q, A)$ s'identifie naturellement à $\underline{H}_U^2(Q, A)$.
En fait, pour U quelconque, on peut décrire une flèche

$$\Lambda_U : \underline{H}_U^2(Q, A) \rightarrow \underline{H}^2(Q, A),$$

de la façon qui suit [nous nous contenterons de construire une extension centrale associée à un 2-cocycle de $\mathcal{C}_U^2(Q, A)$].

Soit $(\psi_\alpha)_\alpha$ un tel 2-cocycle, on définit une 1-cochaîne de Čech, au sens habituel, sur le recouvrement \mathcal{U}_1 à valeurs dans le faisceau des fonctions C^∞ de Q dans A , en posant

$$\forall g \in U_i \cap U_j, \quad \theta_{ij}(g) = -\psi_{(i,e,j)}(g, e);$$

Cette 1-cochaîne est un 1-cocycle de Čech sur \mathcal{U}_1 au sens usuel; en effet, pour voir que

$$\forall g \in U_i \cap U_j \cap U_k, \quad \theta_{jk}(g) - \theta_{ik}(g) + \theta_{ij}(g) = 0,$$

il suffit d'écrire que

$$[\delta_U((\psi_\alpha)_\alpha)]_\beta(g, e, e) = 0,$$

avec $\beta = (i, e, e, j, e, k)$ et de tenir compte du fait que $(\varphi_\alpha)_\alpha$ est normalisé. On peut donc associer à $(\theta_{ij})_{(ij) \in Q^2}$ un fibré principal C^∞ de groupe structural A :

$$p: E \rightarrow Q,$$

qu'on munit de trivialisations

$$u_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times A,$$

telles que

$$u_i(x) = (p(x), h_i(x)),$$

où

$$\theta_{ij}(x) = h_i(x)h_j^{-1}(x);$$

on définit alors une structure de groupe de Lie sur E en posant pour $x, x' \in E$ tels que $p(x) \in U_i, p(x') \in U_j$ et $p(x) \cdot p(x') \in U_k$:

$$xx' = u_k^{-1}[h_i(x) + h_j(x') + \psi_{(i,j,k)}(p(x), p(x'))];$$

et pour cette structure de groupe de Lie, E est une extension centrale de Q par A.

Dans le cas où U est contractile, l'application réciproque de Λ_U est décrite de la manière qui suit; soit

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} Q \rightarrow e,$$

une extension centrale de Q par A; si U est contractile, le fibré principal $p: E \rightarrow Q$ admet des sections sur chaque ouvert du recouvrement \mathcal{U}_1 . Pour U_g , soit s_g une telle section; on suppose de plus que $s_e(e) = e$ (on note aussi e l'élément neutre de E), on obtient un 2-cocycle de Čech algébrique normalisé sur \mathcal{U}_2 en posant

$$\psi_{(g_1, g_2, g_{(1,2)})}(g', g'') = q^{-1}[(s_{g_{(1,2)}}(g' \cdot g''))^{-1} s_{g_1}(g') s_{g_2}(g'')],$$

qui induit en cohomologie Λ_U^{-1} .

On peut résumer ce qui précède en disant que

$$\underline{H}^2(Q, A) = \varinjlim_U \underline{H}_U^2(Q, A),$$

la limite inductive étant prise sur le filtre des voisinages ouverts de e dans Q.

3. Une suite exacte

Comme dans le paragraphe précédent, Q est un groupe de Lie, A un groupe de Lie commutatif considéré comme Q-module trivial. On ne suppose pas Q et A connexes. On note respectivement \mathfrak{q} et \mathfrak{a} les algèbres de Lie de Q et A.

Nous allons exhiber une suite exacte

$$(4) \quad 0 \rightarrow \underline{H}^1(Q, A_d) \xrightarrow{s} \underline{H}^1(Q, A) \xrightarrow{r} \underline{H}^1(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^Q \xrightarrow{t} \underline{H}^2(Q, A_d) \xrightarrow{s} \underline{H}^2(Q, A);$$

A_d désigne le groupe A considéré comme groupe discret. Les applications $s : \underline{H}^i(Q, A_d) \rightarrow \underline{H}^i(Q, A)$ ($i = 1, 2$) sont données par l'identité : $A_d \rightarrow A$; r est l'application qui à un homomorphisme de groupes de Lie de Q dans A , associe la différentielle en l'élément neutre de Q ; $H^1(q, \mathfrak{a})^Q$ désigne les invariants de $H^1(q, \mathfrak{a})$ par l'action adjointe de Q dans q . Notons que la différentielle en l'élément neutre de Q , d'un homomorphisme de Q dans A , est bien un élément de $H^1(q, \mathfrak{a})^Q$. Il nous reste à définir l'application t ; pour cela nous utiliserons la description à la Čech des extensions du paragraphe 2.

Considérons un voisinage ouvert U de l'élément neutre e de Q tel que

$$U = U^{-1}, \\ \forall g \in Q, \quad gUg^{-1} = U$$

et tel que tout élément de $H^1(q, \mathfrak{a})^Q$ se relève de manière unique en un homomorphisme local de groupe de Lie de U dans A . Si V est un voisinage de e sur lequel l'exponentielle réalise un difféomorphisme local, on obtient un tel U en posant

$$U = \bigcup_g (g(V \cap V^{-1})g^{-1}).$$

Soit comme précédemment \mathcal{U}_1 le recouvrement de Q obtenu par les translatsés à gauche de U (ici, ce sont aussi les translatsés à droite) et soit χ le relevé sur U d'un élément $1 \in H^1(q, \mathfrak{a})^Q$. On définit une 1-cochaîne de Čech algébrique $(\chi_g)_g$ sur \mathcal{U}_1 à valeurs dans A en posant

$$\forall u \in U_g, \quad \chi_g(u) = \chi(g^{-1}u);$$

remarquons que en raison de l'unicité du relèvement de 1 sur U et de l'invariance de 1 par l'action adjointe de Q dans q , on a :

$$\forall u \in U, \quad \forall g \in Q, \quad \chi(gug^{-1}) = \chi(u);$$

considérons maintenant, sur le recouvrement \mathcal{U}_2 de Q^2 associé à U , le 2-cocycle algébrique à valeurs dans A :

$$(\psi_\alpha)_\alpha = \delta_U((\chi_g)_g);$$

nous allons voir que ce 2-cocycle est, en fait, à valeurs dans A_d . Pour le démontrer, il suffit de constater que sur l'ouvert $U_{(\theta_1, \theta_2, \theta(1, 2))}$ de Q^2 , $\psi_{(\theta_1, \theta_2, \theta(1, 2))}$ est constante. On a en effet pour $(g', g'') \in U_{(\theta_1, \theta_2, \theta(1, 2))}$:

$$\begin{aligned} \psi_{(\theta_1, \theta_2, \theta(1, 2))}(g', g'') &= \chi_{\theta_2}(g'') - \chi_{\theta(1, 2)}(g' \cdot g'') + \chi_{\theta_1}(g') \\ &= \chi(g_2^{-1} \cdot g'') - \chi(g_{(1, 2)}^{-1} \cdot g' \cdot g'') + \chi(g_1^{-1} \cdot g') \\ &= \chi(g_2^{-1} \cdot g'^{-1} \cdot g_{(1, 2)}) + \chi(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g' \cdot g_2) \\ &= \chi(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_{(1, 2)}); \end{aligned}$$

on note $t(1)$ la classe de l'extension centrale de Q par A_d associée à $(\psi_\alpha)_\alpha$.

Si $t(1) = 0$, il existe une 1-cochaîne algébrique $(\varphi_g)_g$ à valeurs dans A_d (relative éventuellement à un recouvrement \mathcal{U}'_1 associé à un voisinage U' de e plus petit que U) telle que

$$\delta_{U'}((\varphi_g)_g) = (\psi_\alpha)_\alpha|_{\mathcal{U}'_1},$$

alors la 1-cochaîne sur \mathcal{U}'_1 :

$$(\chi_g - \varphi_g)_g,$$

se recolle en un homomorphisme $\bar{\chi}$ de groupe de Lie de Q dans A qui coïncide avec χ sur U .

Réciproquement, si f est la différentielle en l'élément neutre d'un homomorphisme $\bar{\chi} : Q \rightarrow A$, alors $t(1) = 0$; en effet

$$(\psi_\alpha)_\alpha = \delta_U((\varphi_g)_g),$$

où sur U_g :

$$\varphi_g(u) = -\bar{\chi}(g);$$

D'où l'exactitude de la suite (4) en $H^1(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^Q$. C'est le seul point, en fait, qui nous intéresse pour la suite; on peut encore dire : un élément $1 \in H^1(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})^Q$ est la différentielle en l'élément neutre d'un homomorphisme de Q dans A si et seulement si une certaine extension centrale de Q par A , rendu discret, est triviale.

La vérification du fait que $\ker s = \text{Im } t$ est du même style; quand au fait que $\ker r = \text{Im } s$, ce n'est pas autre chose que de dire qu'un homomorphisme de Q dans A , trivial au voisinage de e , est trivial sur la composante neutre de Q .

On notera l'analogie existant entre la suite exacte (4) et la suite exacte en basse dimension associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre, les applications s, r, t étant respectivement les analogues de l'inflation, de la restriction et de la transgression. C'est pourquoi nous appellerons par la suite t , l'homomorphisme de transgression.

4. L'homomorphisme de transgression dans un cas particulier

Nous étudions la transgression t dans le cas où A est le groupe additif des nombres complexes

$$t : H^1(\mathfrak{q}, \mathbb{C})^Q \rightarrow \underline{H}^2(Q, \mathbb{C}_d).$$

Nous nous proposons de relier cet homomorphisme à la théorie de Chern-Weil (cf. [3] et [6]). Pour cela, nous remarquons d'abord qu'un élément de $H^1(\mathfrak{q}, \mathbb{C})^Q$ peut être considéré comme un élément de $\mathfrak{q}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ invariant par l'action de Q dans $\mathfrak{q}^* \otimes \mathbb{C}$ induite par l'action adjointe de Q dans \mathfrak{q} ; on a une injection

$$J : H^1(\mathfrak{q}, \mathbb{C})^Q \rightarrow \text{Inv}_Q(\mathfrak{q}^* \otimes \mathbb{C}).$$

Rappelons-nous, maintenant, que la théorie de Chern-Weil donne un homomorphisme :

$$\Phi : \text{Inv}_Q(\mathfrak{q}^* \otimes \mathbb{C}) \rightarrow H^2(B_Q, \mathbb{C}),$$

on a d'autre part un isomorphisme canonique [8] que nous allons décrire plus loin :

$$\lambda : \underline{H}^2(Q, \mathbb{C}_d) \rightarrow H^2(B_Q, \mathbb{C}).$$

Cela étant, nous allons utiliser la description de Φ donnée par R. Bott dans [3] pour montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} 0 & & \\ \downarrow & & \\ H^1(q, \mathbb{C})^Q & \xrightarrow{t} & H^2(Q, \mathbb{C}_d) \\ \downarrow j & & \downarrow \lambda \\ \text{Inv}_Q(q^* \otimes \mathbb{C}) & \xrightarrow{(-\Phi)} & H^2(B_Q, \mathbb{C}) \end{array}$$

Il nous faut d'abord rappeler la description de $H^*(B_Q, \mathbb{C})$ à l'aide de bicomplexes. On a un objet simplicial associé au groupe Q (cf. [3]) :

$$(6) \quad \star \leftarrow Q \leftarrow Q^2 \cdots \leftarrow Q^n \cdots;$$

nous allons associer à cet objet simplicial deux bicomplexes tels que $H^*(B_Q, \mathbb{C})$ coïncide avec la cohomologie des complexes totaux associés à ces deux bicomplexes.

On a un bicomplexe à la De Rham :

$$\mathcal{A} = (A^q(Q^p, \mathbb{C}), \delta, d)_{(p, q)},$$

où $A^q(Q^p, \mathbb{C})$ est l'espace des q -formes différentielles sur Q^p à valeurs complexes; d est la différentielle extérieure et δ une différentielle provenant de la structure simpliciale de (6); explicitement, on a pour $\varphi \in A^q(Q^p, \mathbb{C})$:

$$\delta\varphi = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (d^i)^* \varphi,$$

où les d^i sont les opérateurs de face de l'objet simplicial associé à Q . Rappelons que les d^i sont définis comme suit :

$$d^0(g_1, \dots, g_{n+1}) = (g_2, \dots, g_{n+1}),$$

$$d^{n+1}(g_1, \dots, g_{n+1}) = (g_1, \dots, g_n)$$

et pour $0 < k < n+1$:

$$d^k(g_1, \dots, g_{n+1}) = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k \cdot g_{k+1}, \dots, g_{n+1}).$$

On a de façon analogue, un bicomplexe :

$$\mathcal{B} = (\check{C}^q(Q^p, \mathbb{C}_p), \check{\delta}, \check{d}),$$

où $\check{C}^q(Q^p, \mathbb{C}_p)$ est l'espace des cochaînes de Čech de Godement (cf. [4]) sur Q^p à coefficients dans le faisceau \mathbb{C}_p des fonctions localement constantes de Q^p dans \mathbb{C} . On notera $H^*(\mathcal{A})$ et $H^*(\mathcal{B})$ la cohomologie des complexes totaux associés à \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Nous allons décrire l'isomorphisme λ sous la forme d'un isomorphisme

$$\lambda : \underline{H}^2(Q, C_d) \rightarrow H^2(\mathcal{B});$$

pour cela nous passerons par la description de Čech de $\underline{H}^2(Q, C_d)$ associée à un voisinage contractile U de l'élément neutre de Q . Nous avons vu dans le paragraphe 2 qu'un élément de $\underline{H}^2(Q, C_d)$ était représenté par un 2-cocycle de Čech algébrique $\psi \in \mathcal{C}_U^2(Q, C_d)$; à ψ était associé un 1-cocycle de Čech au sens habituel θ sur le recouvrement \mathcal{U}_1 de Q ; θ et ψ vérifie les relations

$$\delta_U \psi = 0, \quad d_U \theta = 0, \quad \delta_U \theta + d_U \psi = 0,$$

où d_U désigne la différentielle de Čech des recouvrements \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 ; on a considéré ψ , dans la dernière formule, comme une 0-cochaîne au sens habituel sur le recouvrement \mathcal{U}_2 . Par suite au couple (θ, ψ) est associé un couple $(\bar{\theta}, \bar{\psi})$ de $\check{C}^1(Q, \underline{C}_1) \times \check{C}^0(Q^2, \underline{C}_2)$ vérifiant,

$$\check{\delta} \bar{\psi} = 0, \quad d \bar{\theta} = 0, \quad \check{\delta} \bar{\theta} + d \bar{\psi} = 0$$

d'où un élément de $H^2(\mathcal{B})$.

Décrivons maintenant l'isomorphisme naturel entre $H^2(\mathcal{A})$ et $H^2(\mathcal{B})$. Par définition, nous prenons pour cet isomorphisme celui obtenu en identifiant par des homomorphismes de bord, les cohomologies $H^*(\mathcal{A})$ et $H^*(\mathcal{B})$, à la cohomologie du complexe total associé au tricomplexe

$$(\check{C}^s(Q^r, \underline{A}^t), \delta, \check{d}, d)_{(r,s,t)},$$

soit $\check{C}^s(Q^r, \underline{A}^t)$ est l'espace des cochaînes de Godement sur Q^r à coefficient dans le faisceau \underline{A}^t des t -formes différentielles. La différentielle D du complexe total est donnée par

$$D \varphi = \delta \varphi + (-1)^r \check{d} \varphi + (-1)^{r+s} d \varphi,$$

pour $\varphi \in \check{C}^s(Q^r, \underline{A}^t)$. Au niveau du H^2 , l'isomorphisme entre $H^2(\mathcal{A})$ et $H^2(\mathcal{B})$ s'explicite comme suit (il faut prendre garde aux signes) : soit (v, w) un représentant d'une classe de $H^2(\mathcal{A})$ où $(v, w) \in A^1(Q, C) \times A^0(Q^2, C)$; (v, w) vérifie

$$dv = 0, \quad \delta w = 0, \quad \delta v + dw = 0;$$

soit \mathcal{U}_1 le recouvrement de Q associé à un voisinage contractile U de e ; on peut trouver une 0-cochaîne $(\zeta_g)_g$ sur \mathcal{U}_1 telle que :

$$d((\zeta_g)_g) = v;$$

on obtient un élément (θ, ψ) de $\check{C}^1(Q, \underline{C}_1) \times \check{C}^0(Q^2, \underline{C}_2)$ en posant

$$(\theta, \psi) = (-d_U((\zeta_g)_g), \quad \delta_U((\zeta_g)_g) + (w|_{U\alpha})_{\alpha \in I_2});$$

(θ, ψ) donne une classe de $H^2(\mathcal{B})$ qui est l'associée dans l'isomorphisme $H^2(\mathcal{A}) \simeq H^2(\mathcal{B})$ de la classe de (v, w) .

Nous pouvons montrer la commutativité du diagramme (5). Soit 1 un élément de $H^1(\mathfrak{q}, \mathbb{C})^{\mathfrak{Q}}$ et soit τ_1 la forme différentielle, invariante à gauche, définie par 1 sur Q ; τ_1 est en fait biinvariante; il en résulte que

$$\delta\tau_1 = 0, \quad d\tau_1 = 0;$$

par suite τ_1 définit un élément α de $H^2(\mathcal{A}) = H^2(B_Q, \mathbb{C})$.

Montrons que

$$\lambda(t(1)) = \alpha \quad \text{et} \quad \Phi(J(1)) = -\alpha.$$

Soit χ un homomorphisme local d'un voisinage U de e dans Q , à valeurs dans \mathbb{C} , qui relève 1 ; on a sur U :

$$d\chi = \tau_1,$$

où d est la différentielle extérieure; par suite si $(\chi_g)_g$ est la cochaîne associée à χ comme dans le paragraphe 2 sur \mathcal{U}_1 on a

$$d((\chi_g)_g) = \tau_1;$$

il est clair alors que dans l'isomorphisme $\lambda : \underline{H}^2(Q, \mathbb{C}_d) \rightarrow H^2(B_Q, \mathbb{C})$, α correspond à $t(1)$.

R. Bott [3] a décrit l'homomorphisme de Chern-Weil Φ à l'aide d'un homomorphisme de bord dans une des suites spectrales du bicomplexe \mathcal{A} . Il résulte directement de cette description que $\Phi(J(1)) = -\alpha$.

5. Démonstration du théorème

Revenons aux notations du paragraphe 1; d'après le paragraphe 3 on a deux suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}_d^*) \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}^*) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbb{C})^{G(f)} \rightarrow \dots \\ \xrightarrow{t} \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}_d^*) \rightarrow \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}^*) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}_d) \rightarrow \underline{H}^1(G(f), \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbb{C})^{G(f)} \rightarrow \dots \\ \xrightarrow{t'} \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}_d) \rightarrow \underline{H}^2(G(f), \mathbb{C}), \end{aligned}$$

correspondant aux cas où Q est remplacé par $G(f)$ et A par \mathbb{C}^* ou \mathbb{C} . Les transgressions t et t' sont reliées par un diagramme commutatif

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbb{C})^{G(f)} & \xrightarrow{t'} & H^2(B_{G(f)}, \mathbb{C}) \\ k \downarrow & & \downarrow j' \\ H^1(\mathfrak{g}(f), \mathbb{C})^{G(f)} & \xrightarrow{t} & H^2(B_{G(f)}, \mathbb{C}^*) \end{array}$$

(on suppose identifiés $H^2(B_Q, A)$ et $H^2(Q, A_d)$); où l'application j' est induite par l'application $z \rightarrow e^{2\sqrt{-1}\pi z}$ de C dans C^* et l'application k est définie par

$$k(h) = 2\sqrt{-1}\pi \cdot h,$$

pour $h \in H^1(\mathfrak{g}(f), C)^{G(f)}$. On pose $\beta_f = t'(f/2\pi)$; on a alors par la commutativité de (7) : $\alpha_f = j'(\beta_f)$, où α_f a été défini dans le paragraphe 1.

Considérons de plus le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(B_{G(f)}, C) & \xrightarrow{j'} & H^2(B_{G(f)}, C^*) \\ \rho' \downarrow & & \downarrow \rho \\ H^2(X, C) & \xrightarrow{j} & H^2(X, C^*) \end{array}$$

où les homomorphismes ρ et ρ' sont les homomorphismes caractéristiques associés au fibré $P : G \rightarrow X$. De la commutativité de ce diagramme, il résulte que pour prouver l'égalité

$$\rho(\alpha_f) = j([\omega]);$$

il suffit de voir que

$$\rho'(\beta_f) = [\omega];$$

par suite d'après le paragraphe 4, il suffit de montrer la relation

$$\rho' \circ \Phi\left(\frac{f}{2\pi}\right) = -[\omega],$$

où

$$\Phi : \text{Inv}_{G(f)}(\mathfrak{g}(f)^* \otimes C) \rightarrow H^2(B_{G(f)}, C),$$

est l'homomorphisme du paragraphe 4; il suffit donc encore de voir que

$$\Phi_P\left(\frac{f}{2\pi}\right) = -[\omega],$$

où

$$\Phi_P : \text{Inv}_{G(f)}(\mathfrak{g}(f)^* \otimes C) \rightarrow H^2(X, C)$$

est l'homomorphisme de Chern-Weil associé au fibré P .

Soit Λ la 1-forme sur G à valeur dans $\mathfrak{g}(f)$ d'une connexion sur P (cf. [6]); la forme de courbure Ω vérifie pour tout couple de champs de vecteurs Y et Z sur G :

$$\Omega(Y, Z) = d\Lambda(Y, Z) + [\Lambda(Y), \Lambda(Z)];$$

et Φ_P est induite par l'application

$$\Phi_\Lambda : \text{Inv}_{G(f)}(\mathfrak{g}(f)^* \otimes C) \rightarrow A^2(X, C),$$

telle que $P^*(\Phi_\Lambda(1)) = 1 \circ \Omega$.

Soit $\Gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}(G)$, l'homomorphisme d'algèbres de Lie, de \mathfrak{g} dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur G , déduit de l'action à gauche de G dans lui-même. On a pour tout couple d'éléments $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ [rappelons que $\langle f, [\mathfrak{g}(f), \mathfrak{g}(f)] \rangle = 0$] :

$$\begin{aligned} & P^* \left(\Phi_\Lambda \left(\frac{f}{2\pi} \right) \right) (\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)) \\ &= \frac{1}{2\pi} f(d\Lambda(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))) \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Gamma(\xi) \cdot f(\Lambda(\Gamma(\eta))) - \Gamma(\eta) \cdot f(\Lambda(\Gamma(\xi))) - f(\Lambda([\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)]))]; \end{aligned}$$

soit φ_f la 1-forme invariante à gauche sur G , associée à f . Il résulte du fait que $G(f)$ stabilise f dans l'action adjointe que φ_f est invariante à droite par $G(f)$. Soit μ la 1-forme sur G définie par

$$\mu = f \circ \Lambda - \varphi_f,$$

cette forme est basique sur P , c'est-à-dire qu'elle s'écrit : $\mu = P^*(v)$, pour une forme v sur X . En effet elle est invariante à droite par $G(f)$ et annule tous les champs de vecteurs verticaux de P . Par suite, on a :

$$\begin{aligned} & P^* \left(\Phi_\Lambda \left(\frac{f}{2\pi} \right) \right) (\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)) \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Gamma(\xi) \cdot \varphi_f(\Gamma(\eta)) - \Gamma(\eta) \cdot \varphi_f(\Gamma(\xi)) - \varphi_f([\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)])] \\ &+ \frac{1}{2\pi} d\mu(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)) \end{aligned}$$

on a d'autre part $\varphi_f(\Gamma(\eta))_g = \langle f, \text{Ad } g^{-1} \cdot \eta \rangle = \langle g \cdot f, \eta \rangle$ d'où

$$\varphi_f(\Gamma(\eta)) = \psi^\eta \circ P,$$

on en déduit

$$\Gamma(\xi) \cdot \varphi_f(\Gamma(\eta)) = (\sigma(\xi) \cdot \psi^\eta) \circ P = \psi^{[\xi, \eta]} \circ P;$$

(cf. [5]).

On a de même

$$\Gamma(\eta) \cdot \varphi_f(\Gamma(\xi)) = -\psi^{[\xi, \eta]} \circ P,$$

de plus

$$\begin{aligned} [\varphi_f([\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)])]_g &= \langle f, \text{Ad } g^{-1} \cdot [\xi, \eta] \rangle \\ &= \langle g \cdot f, [\xi, \eta] \rangle, \end{aligned}$$

soit

$$\varphi_f([\Gamma(\xi), \Gamma(\eta)]) = \psi^{[\xi, \eta]} \circ P.$$

On en déduit que quels que soient ξ et η de \mathfrak{g} :

$$\Phi_{\Lambda}\left(\frac{f}{2\pi}\right)(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) = \frac{1}{2\pi} [\psi^{[\xi, \eta]} + dv(\sigma(\xi), \sigma(\eta))],$$

et enfin

$$\Phi_{\Lambda}\left(\frac{f}{2\pi}\right) = -\omega + d\left(\frac{v}{2\pi}\right),$$

soit

$$\Phi_{\mathbb{P}}\left(\frac{f}{2\pi}\right) = -[\omega];$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts* (*Ann. of Math.*, vol. 57, 1953, p. 115-207).
- [2] G. BREDON, *Sheaf Theory*, McGraw-Hill, 1967.
- [3] R. BOTT, *On the Chern-Weil Homomorphism and the Continuous Cohomology of Lie Groups* (*Advances in Math.*, vol. 11, 1973, p. 289-303).
- [4] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.
- [5] B. KOSTANT, *Quantization and Unitary Representations* (*Lecture Notes in Math.*, n° 170, 1970, p. 87-208); voir aussi : Notes au M.I.T.
- [6] KOBAYASHI-NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, I, II, Interscience Publishers.
- [7] C. C. MOORE, *Extensions and Low Dimensional Cohomology Theory of Locally Compact Groups I, II* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 113, 1964, p. 40-86).
- [8] D. WIGNER, *Algebraic Cohomology of Topological Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 178, 1973, p. 83-93).
- [9] G. W. MACKEY, *The Theory of Group Representations* (University of Chicago).

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1975.)

J.-L. CATHELIN
 Université de Poitiers, Mathématiques,
 40, avenue du Recteur-Pineau,
 86022 Poitiers.