ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-M. LEMAIRE

« Autopsie d'un meurtre » dans l'homologie d'une algèbre de chaînes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 1 (1978), p. 93-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_1_93_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 11, 1978, p. 93 à 100.

« AUTOPSIE D'UN MEURTRE » DANS L'HOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE CHAINES

PAR J.-M. LEMAIRE

ABSTRACT. — Let $\mathscr{A}$ be a connected, associative chain algebra, and let $\mathscr{B}$ be obtained by freely adding a generator a to $\mathscr{A}$, whose differential $da = r$ "kills" some cycle r in $\mathscr{A}$. Let I be the 2-sided ideal in $A = H\,\mathscr{A}$ generated by the class of r, and let $\gamma : A/I \to B = H\,\mathscr{B}$ be the morphism induced by the inclusion $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.

A sufficient condition for γ to be an isomorphism is given. Applications are made to the determination of $H_*(\Omega X)$ and the Eilenberg-Moore spectral sequence for some finite *cw*-complexes X.

Introduction

Soit $\mathscr{A}$ une DG algèbre de chaînes, associative, connexe, sur un corps $\mathbf{k}$ (*cf.* [2] pour la définition). On se propose d'étudier ce qui se passe en homologie lorsqu'on « tue » un cycle r de $\mathscr{A}$ en adjoignant librement à $\mathscr{A}$ un générateur a de différentielle $da = r$.

Le mobile de ce « meurtre » est fourni par la méthode de J. F. Adams et P. Hilton pour calculer l'homologie d'un espace de lacets [1] : il constitue en effet le pas de la récurrence sur les cellules du *cw*-complexe X qui permet de construire l'algèbre de chaînes libre A (X) telle que $H(A(X)) \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega X)$.

Soit $\mathscr{B}$ l'algèbre de chaînes obtenue en ajoutant le générateur a à $\mathscr{A}$ comme ci-dessus, et soit $B = H\,\mathscr{B}$ son homologie. Soit $\bar{r}$ la classe de r dans $A = H\,\mathscr{A}$, et soit $I = (\bar{r})$ l'idéal bilatère de A engendré par $\bar{r}$. L'inclusion $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ induit évidemment un morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres graduées :

$$\gamma : \quad A/I \to B.$$

L'objet de ce travail est de donner une condition suffisante (et peut-être d'ailleurs nécessaire) pour que γ soit un isomorphisme. Soit $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique, et soit $\mathrm{Tor}_p^\pi : \mathrm{Tor}_p^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}_p^{A/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ l'homomorphisme de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels gradués induit par π, pour chaque entier $p > 0$. Soit $\bar{A}$ l'idéal d'augmentation de A : un élément de $\bar{A}$ est dit décomposable s'il appartient à $\bar{A}^2$, indécomposable sinon.

THÉORÈME. — (1) *Si $\bar{r}$ est indécomposable, γ est un isomorphisme si* Tor_p^π *est bijectif dour $p > 1$.*

(2) *Si* $\bar{r}$ *est décomposable* ($\bar{r} \neq 0$), γ *est un isomorphisme si* Tor_p^π *est injectif pour* $p = 2$ *et bijectif pour* $p > 2$.

Remarque 1. — Si $\bar{r} = 0$, il existe α dans $\mathscr{A}$ tel que $d\alpha = r$ et $a - \alpha$ est un cycle de $\mathscr{B}$. Il n'est pas difficile alors de voir que $\mathrm{B} = \mathrm{A} \coprod \mathrm{T}((\overline{a-\alpha}))$. L'homomorphisme γ n'est alors jamais surjectif. Nous supposerons désormais $\bar{r} \neq 0$.

Remarque 2. — Soit $\mathrm{QI} = \mathrm{I}/\bar{\mathrm{A}}.\mathrm{I}+\mathrm{I}.\mathrm{A} = \mathbf{k}.\bar{r}$. La suite exacte ([7], 1.2.1) :

$$\mathrm{Tor}_2^{\mathrm{A}}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_2^\pi} \mathrm{Tor}_2^{\mathrm{A/I}}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \mathrm{QI} \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A/I}}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to 0$$

montre que l'hypothèse (1) du théorème entraîne que Tor_1^π est surjectif de noyau QI, et que l'hypothèse (2) entraîne que Tor_1^π est bijectif et Tor_2^π injectif de conoyau QI.

Dans le paragraphe 1, nous précisons la description de la suite spectrale associée à la filtration de $\mathscr{B}$ par le « poids en a », déjà considérée par Adams et Hilton comme un « outil approprié » au problème considéré ([1], p. 318); nous en déduisons le résultat intermédiaire suivant :

PROPOSITION 1. — γ *est un isomorphisme si* I *est un* A-*module* (*à gauche*) *libre et* $\mathrm{I}/\bar{\mathrm{A}}.\mathrm{I} = \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ *est un* A/I-*module* (*à droite*) *libre.*

Dans le paragraphe 2 on déduit le théorème de cette proposition. Le paragraphe 3 est consacré à quelques applications du théorème au calcul d'algèbres de Pontryagin d'espaces de lacets et de suites spectrales d'Eilenberg-Moore.

L'essentiel de cet article a été esquissé dans une note aux *Comptes rendus* [8], et l'exemple 2 du paragraphe 3 sera utilisé dans [10].

1. La suite spectrale $\mathrm{E}^r_{p,q}\mathscr{B}$

Définissons une bigraduation sur $\mathscr{B}$ comme suit : le bidegré d'un élément $\alpha \in \mathscr{A}_n$ est $(0, n)$ et celui de a est $(1, m)$ avec m = degré de r.

On peut considérer $\mathscr{B}$ comme un double complexe avec différentielle $d = d' + d''$ définie par

$$d' \mid \mathscr{A} = 0, \qquad d' a = r$$

et

$$d'' \mid \mathscr{A} = d_{\mathscr{A}}, \qquad d'' a = 0,$$

d' et d'' sont donc de bidegrés respectifs $(-1, 0)$ et $(0, -1)$. Par définition de $\mathscr{B}$ (*cf.* [2], p. 232, remark), on a

$$\mathscr{B}_{0,*} = \mathrm{E}^0_{0,*}\mathscr{B} = \mathscr{A},$$
$$\forall p > 0, \quad \mathscr{B}_{p,*} = \mathrm{E}^0_{p,*}\mathscr{B} = \mathscr{A} \otimes (\mathbf{k}a \otimes \mathscr{A})^{\otimes p}.$$

La suite spectrale considérée n'est autre que la suite spectrale associée à la filtration par le premier degré, qui vérifie $d^0 = d''$. Le théorème de Künneth fournit les isomorphismes

$$\mathrm{E}^1_{0,*}\mathscr{B} = \mathrm{A},$$
$$\forall p > 0, \quad \mathrm{E}^1_{p,*}\mathscr{B} = \mathrm{A} \otimes (\mathbf{k}\,a \otimes \mathrm{A})^{\otimes p}.$$

La différentielle d^1 est induite par la dérivation d' : on a donc, pour tout $p \geqq 1$:

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} d_p^1 : \ \mathrm{E}^1_{p,\,*}\mathscr{B} \to \mathrm{E}^1_{p-1,\,*}\mathscr{B}, \\ d_p^1(\alpha_0 \otimes a \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes a \otimes \alpha_p) \\ \quad = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{\varepsilon_j} \alpha_0 \otimes \ldots \otimes a \otimes \alpha_j \bar{r} \alpha_{j+1} \otimes a \otimes \ldots \otimes \alpha_p, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon_j = j(m+1) + \sum_{k=0}^{j} |\alpha_k|, \qquad |\alpha_k| = \text{degré de } \alpha_k \in \mathscr{A}.$$

En particulier, on a

$$d_1^1 : \ \mathrm{A} \otimes \mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A} \to \mathrm{A},$$

$$\alpha_0 \otimes a \otimes \alpha_1 \mapsto \alpha_0\, r\, \alpha_1,$$

de sorte que $\mathrm{Im}\, d_1^1 = \mathrm{I}$ et $\mathrm{E}^2_{0,\,*} = \mathrm{A/I}$.

Il est clair que le « coin » :

$$\mathrm{A/I} = \mathrm{E}^2_{0,\,*} \to \mathrm{E}^\infty_{0,\,*} \hookrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{H}\mathscr{B}$$

s'identifie à $\gamma : \mathrm{A/I} \to \mathrm{B}$. Si la suite $(\mathrm{E}^1_{p,\,*}, d_p^1)$ est exacte pour tout $p \geqq 1$, on a $\mathrm{E}^2_{p,\,*} = 0 = \mathrm{E}^\infty_{p,\,*}$ pour tout $p \geqq 1$, d'où $\mathrm{E}^2_{0,\,*} = \mathrm{E}^\infty = \mathrm{B}$ et par conséquent γ est un isomorphisme.

Nous avons donc établi le :

LEMME 1. — *γ est un isomorphisme si $(\mathrm{E}^1_{p,\,*}, d_p^1)$ est une résolution du* A*-bimodule* A/I.

Réciproquement, si γ est un isomorphisme, on a $\mathrm{E}^2_{0,\,*} = \mathrm{E}^\infty_{0,\,*} = \mathrm{B}$, d'où $\mathrm{E}^\infty_{p,\,*} = 0$ pour $p > 0$ et $d^p_{p,\,*} = 0$ pour $p \geqq 2$. Pour conclure à la réciproque du lemme 1, il faudrait avoir la nullité de toutes les différentielles, et pas seulement de celles qui aboutissent sur l'axe $p = 0$: j'ignore s'il s'agit d'une condition plus forte.

Observons maintenant que $\mathrm{E}^1_{p,\,*}\mathscr{B}$ est un A-module libre (à droite ou à gauche) pour tout $p \geqq 0$, et un A-bimodule libre pour $p \geqq 1$.

Nous allons en déduire le résultat suivant :

LEMME 2. — *La suite $(\mathrm{E}^1_{p,\,*}\mathscr{B}, d_p^1)$ est exacte si et seulement si* I *est un* A*-module à gauche (resp. à droite) libre et* $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ *(resp.* $\mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \mathbf{k}$*) un* A/I*-module à droite (resp. à gauche) libre.*

Démonstration. — Supposons la suite $(\mathrm{E}^1_{p,\,*}\mathscr{B}, d_p^1)$ exacte. Comme $\mathrm{Im}\, d_p^1 = \mathrm{I}$, la suite $(\mathrm{E}^1_{p,\,*}\mathscr{B}, d_p^1)$ pour $p \geqq 1$ est une résolution A-libre de I : elle permet donc de calculer $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{p,\,*}(\mathbf{k}, \mathrm{I})$. Or, d'après l'expression $(\bigstar)$ ci-dessus, on voit que

$$\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d^1_{p+1} = \mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A} \otimes (\mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A})^{\otimes p} \to (\mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A})^{\otimes p}$$

vérifie, pour tout $p > 0$,

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d^1_{p+1} = (-1)^{m+1}\, \mathbf{k} a \otimes d^1_p.$$

On en déduit immédiatement que la suite $(\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E}_p^1 \mathscr{B}, \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d_p^1)$ est exacte pour $p \geqq 2$, d'où :

$$\begin{cases} \forall p \geqq 1, \quad \mathrm{Tor}_{p,*}^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}, \mathrm{I}) = 0, \\ \quad \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I} = \mathbf{k}.\bar{r} \otimes \mathrm{A/I}. \end{cases}$$

La première condition entraîne que I est A-libre, car A est connexe ([7], app. 1, 1.2), et la seconde, qui est un isomorphisme de A-modules et donc de A/I-modules exprime que $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ est A/I-libre de rang 1.

Réciproquement, remarquons d'abord que si $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ est A/I-libre, il est libre de rang 1 sur $\bar{r}$ puisque

$$(\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}) \otimes_{\mathrm{A/I}} \mathbf{k} = \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \mathbf{k} = \mathrm{QI} = \mathbf{k}.r.$$

On a donc $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I} \cong \mathbf{k}.\bar{r} \otimes (\mathrm{A/I})$. Montrons l'exactitude en $p = 1$. Soit N_1 le noyau de d_1^1; on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{N}_1 \to \mathrm{A} \otimes \mathbf{k}.a \otimes \mathrm{A} \xrightarrow{d_1^1} \mathrm{I} \to 0.$$

Comme I est A-libre, en tensorisant par $\mathbf{k}$ sur A la suite reste exacte :

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_1 \to \mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A} \to \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I} \to 0 \\ \hphantom{0 \to \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_1 \to \mathbf{k}\, a \otimes \mathrm{A} \to{}} \Vert \hphantom{{}\to 0} \\ \hphantom{0 \to \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_1 \to \mathbf{k}\,} \mathbf{k}.a \otimes (\mathrm{A/I}) \end{array}$$

et l'expression de d_1^1 montre que $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d_1^1$ peut être identifiée à $\mathbf{k}.a \otimes \pi$: on en déduit que $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_1 = \mathbf{k}.a \otimes \mathrm{I}$. D'après (★★), on a $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d_2^1 = (-1)^{m+1}\, \mathbf{k}.a \otimes d_1^1$: l'image de $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} d_2^1$ est donc $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_2$, et le « lemme de Nakayama » pour les algèbres connexes ([11], prop. 1.4) permet de conclure que l'image de d_2^1 est N_2. La démonstration de l'exactitude en $p > 1$ se fait de manière analogue, par récurrence sur p et en utilisant (★★).

La proposition 1 est donc établie.

2. Fin de la démonstration du théorème

Nous allons montrer que la condition : I est A-libre et $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{I}$ est A/I-libre est équivalente à l'une ou l'autre des conditions sur Tor_p^π du théorème. Ceci en achèvera la démonstration.

Considérons la suite spectrale de changement d'anneaux associée à $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{A/I}$ ([4], chap. XVI, § 5; [7], p. 8). On a

$$\mathrm{E}_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{A/I}}(\mathrm{Tor}_q^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}, \mathrm{A/I}), \mathbf{k}) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Tor}_{p+q}^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

et le coin :

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \to \mathrm{E}_{p,0}^\infty \rightarrowtail \mathrm{E}_{p,0}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{A/I}}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

peut être identifié à Tor_p^π.

Remarquons d'abord que $\mathrm{Tor}^A_{q+1}(\mathbf{k}, A/I) = \mathrm{Tor}^A_q(\mathbf{k}, I)$ pour tout $q \geqq 0$. Si I est A-libre, on a donc $E^2_{p,q} = 0$ pour tout $q \geqq 2$. Ensuite, comme $E^2_{p,1} = \mathrm{Tor}^{A/I}_p(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k})$, on a $E^2_{p,1} = 0$ pour $p \geqq 1$ si $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I-libre. La seule différentielle éventuellement non nulle est donc

$$d^2_{2,0}: \quad E^2_{2,0} = \mathrm{Tor}^{A/I}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \to E^2_{0,1} = (\mathbf{k} \otimes_A I) \otimes_{A/I} \mathbf{k} = QI = \mathbf{k}.\bar{r}$$

Si $d^2_{2,0} = 0$, $\bar{r}$ subsiste dans $E^\infty_{0,1} \subset \mathrm{Tor}^A_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \bar{A}/\bar{A}^2$, par suite $\bar{r}$ est indécomposable et les conditions du cas (1) du théorème sont vérifiées. Si $d^2_{2,0} \neq 0$, elle est surjective puisque $E^2_{0,1}$ est de dimension 1, donc $E^3_{0,1} = E^\infty_{0,1} = 0$; par suite Tor^π_1 est bijectif, donc $\bar{r}$ est décomposable et les conditions du cas (2) sont vérifiées.

Réciproquement, supposons $\bar{r}$ décomposable, Tor^π_p bijectif pour $p \neq 2$ et injectif pour $p = 2$. D'après l'identification de Tor^π_p au coin de la suite spectrale, il vient :

$$\forall p \geqq 0, \quad \mathrm{Tor}^A_p(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \xrightarrow{=} E^\infty_{p,0}$$

et par conséquent $E^\infty_{p,q} = 0$ pour $p \geqq 0$, $q > 0$. De plus, pour $p \neq 2$, on a $E^\infty_{p,0} = E^2_{p,0}$, d'où :

$$\forall r \geqq 2, \quad \forall p \neq 2, \qquad d^r_{p,0} = 0,$$

en particulier $d^2_{3,0} = 0$, d'où $E^2_{1,1} = E^\infty_{1,1} = 0$. Mais $E^2_{1,1} = \mathrm{Tor}^{A/I}_1(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k}) = 0$, donc $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I-libre ([7], A.1.2). Mais alors $E^2_{p,1} = \mathrm{Tor}^{A/I}_p(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k}) = 0$ pour $p \geqq 1$, en particulier $E^2_{2,1} = 0$, d'où $d^2_{2,1} = 0$. Comme on a déjà $d^2_{3,0} = 0$, il vient :

$$0 = E^\infty_{0,2} = E^2_{0,2} = \mathrm{Tor}^A_2(\mathbf{k}, A/I) \otimes_A \mathbf{k} = \mathrm{Tor}^A_1(\mathbf{k}, I) \otimes_A \mathbf{k},$$

soit $\mathrm{Tor}^A_1(\mathbf{k}, I) = 0$ par « Nakayama ». □

On notera que l'hypothèse sur Tor^π_p n'a en fait été utilisée que pour $p \leqq 3$: par suite l'hypothèse pour $p \leqq 3$ entraîne l'hypothèse pour tout p.

Nous laissons au lecteur la démonstration analogue de la réciproque dans le cas où $\bar{r}$ est indécomposable.

3. Applications topologiques

3.1. Soit X un *cw*-complexe fini, dont le 1-squelette est réduit au point de base. On se donne une application essentielle $\rho : S^{m+1} \to X$, $m \geqq 1$ et l'on considère le *cw*-complexe $Y = X \cup_\rho e^{m+2}$.

Soit $\tilde{\rho} : S^m \to \Omega X$ l'adjointe de ρ, et soit $\bar{r} \in H_m(\Omega X; \mathbf{k})$ l'image par ρ_* d'un générateur de $H_m(S^m)$. L'inclusion $j : X \to Y$ induit le morphisme d'algèbres

$$(\Omega_j)_* : H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega Y; \mathbf{k}),$$

et l'on voit facilement que $(\Omega_j)_*(\bar{r}) = 0$; par suite $(\Omega_j)_*$ factorise en

$$\gamma : \quad H_*(\Omega X)/I \to H_*(\Omega Y),$$

où $I=(\bar{r})$ est l'idéal bilatère engendré par $\bar{r}$. On désigne encore par $\pi : H_*(\Omega X) \to H_*(\Omega X)/I$ la surjection canonique.

PROPOSITION 2. — *γ est un isomorphisme (d'algèbres de Hopf) dans les deux cas suivants :*

(1) $\bar{r}$ est indécomposable et Tor_p^π *est bijectif pour $p \geqq 2$;*

(2) $\bar{r}$ est décomposable et Tor_p^π *est bijectif pour $p \neq 2$, injectif pour $p = 2$.*

Démonstration. — Soit $(A(X), \varphi)$ une algèbre d'Adams-Hilton pour ΩX (à coefficients dans le corps $\mathbf{k}$) : $\varphi : A(X) \to C_*(\Omega X; \mathbf{k})$ est donc un morphisme de chaînes qui induit un isomorphisme en homologie. Soit $r \in ZA(X)$ un représentant de $\varphi_*^{-1}(\bar{r})$. Soit $\mathscr{B} = A(X) \coprod T(a)$ l'algèbre de chaînes obtenue en adjoignant à $A(X)$ un générateur a de degré $m+1$ et de différentielle $da = r$. Il résulte de [1] (th. 3.2) qu'on peut choisir une extension $\tilde{\varphi} : \mathscr{B} \to C_*(\Omega Y; \mathbf{k})$ de φ qui induit un isomorphisme en homologie. La proposition 2 résulte donc du théorème. □

Exemple 1. — Soit $X = S^{r+1} \vee S^{s+1}$, $r, s \geqq 1$ et soit $\rho = [[i_{r+1}, i_{s+1}], i_{s+1}]$ le produit de Whitehead itéré des classes fondamentales $i_{r+1} \in \pi_{r+1}(S^{r+1})$ et $i_{s+1} \in \pi_{s+1}(S^{r+1})$. D'après le théorème de Bott et Samelson [3], $H_*(\Omega X; \mathbf{k})$ est l'algèbre tensorielle sur deux générateurs x_r et y_s, et d'après le théorème de Samelson [13], $\bar{r} = \pm [x_r, y_s], y_s]$.

L'algèbre $H_*(\Omega X)/I$ possède donc une seule relation; d'après les arguments de [6], qui s'étendent sans difficulté au cas gradué, on voit que

$$\forall p > 2, \quad \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega X)/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0$$

et les conditions (2) de la proposition 2 sont donc vérifiées, par conséquent :

$$H_*(\Omega((S^{r+1} \vee S^{s+1}) \cup_\rho e^{r+2s+2}); \mathbf{k}) = T(x_r, y_s)/([[x, y], y] = 0).$$

On notera que l'espace $Y = (S^{r+1} \vee S^{s+1}) \cup_\rho e^{r+2s+2}$ a la propriété suivante : son « modèle de Quillen » ([2], 3.2) est égal au modèle minimal de l'algèbre de Lie graduée $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$: nous dirons qu'il est π-formel (*cf.* [9] pour une discussion de cette notion ([1])). En revanche, il n'est pas formel au sens de Sullivan, car sa cohomologie est celle de $S^{r+1} \vee S^{s+1} \vee S^{r+2s+2}$.

Exemple 2. — Supposons $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$. Soit $X = S^2 \vee \mathbf{CP}(2)$. On a

$$H_*(\Omega S^2) = P(x_1), \; H_*(\Omega\, \mathbf{CP}(2)) = E(y_1) \otimes P(z_4)$$

comme algèbres de Hopf primitivement engendrées : x_1 et y_1 sont les adjoints des classes fondamentales des 2-sphères, et z_4 est l'adjointe de l'application de Hopf : $\eta : S^5 \to \mathbf{CP}(2)$. On a d'après [7] (3.2.5) :

$$H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = P(x_1) \coprod (E(y_1) \otimes P(z_4)).$$

Soit

$$\bar{r} = [x_1, z_4] \in PH_5(\Omega X; \mathbf{Q}) = \pi_5(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} = \pi_6(X) \otimes \mathbf{Q}$$

et soit $\rho \in \pi_6(X)$ un représentant de $\bar{r}$.

([1]) Les espaces π-formels ont été également considérés par J. Neisendorfer (Notre-Dame preprint), sous le nom de « coformels ».

Une présentation de $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/(\bar{r} = 0)$ est

$$T(x_1, y_1, z_4)/([x_1, z_4] = 0, y_1^2 = 0, [y_1, z_4] = 0),$$

de sorte que

$$H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/(\bar{r} = 0) = (P(x_1) \otimes P(z_4)) \coprod_{P(z_4)} (P(z_4) \otimes E(y_1)).$$

La suite exacte « de Mayer-Vietoris » pour les sommes amalgamées d'algèbres de Hopf ([7], 5.1.9) montre que les conditions du cas (2) de la proposition 2 sont vérifiées. On en conclut que

$$H_*(\Omega(X \cup_\rho e^7); \mathbf{Q}) = H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/([x_1, z_4] = 0).$$

3.2. Rappelons que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore :

$$E^2_{p,*} = \mathrm{Tor}^{H_*(\Omega X, \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \underset{p}{\Rightarrow} H_*(X)$$

admet pour aboutissement $E^\infty = E^0 H_*(X)$ le gradué associé à la filtration de $H_*(X) = H_*(B\,\Omega\,X)$ induite par la filtration du classifiant de Milnor $B\,\Omega\,X$ de $\Omega\,X$ « par le nombre de joints ». On désigne par $e_\mathbf{k}(X)$ la longueur (éventuellement infinie) de cette filtration, c'est-à-dire :

$$e_\mathbf{k}(X) = \inf\{n \mid \forall p > n, E^\infty_{p,*} = 0\}.$$

Un théorème de M. Ginsburg assure que [5] :

$$\forall \mathbf{k}, \quad \forall X, \qquad \mathrm{cat}(X) \geqq e_\mathbf{k}(X).$$

Les exemples précédents vérifient $e_\mathbf{Q} = 2$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Les notations étant celles de la proposition* 2, *supposons* $\bar{r}$ *décomposable et* Tor^π_p *bijectif pour* $p \neq 2$, *injectif pour* $p = 2$. *Alors :*

$$e_\mathbf{k}(X \cup_\rho e^{m+2}) = \sup(e_\mathbf{k}(X), 2).$$

Démonstration. — La suspension $\Sigma : H_m(\Omega X) \to H_{m+1}(X)$ s'annule sur les éléments décomposables ([12], p. 6.10). Par suite $\rho : S^{m+1} \to X$ est nulle en homologie et

$$H_*(X \cup_\rho e^{m+2}) \cong H_*(X) \oplus \tilde{H}_*(S^{m+2}).$$

L'hypothèse sur Tor^π_p montre qu'on obtient la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $X \cup_\rho e^{m+2}$ en ajoutant à celle de X un générateur (de $\mathbf{k}$-espace vectoriel) en $E^2_{2,m}$, et ce générateur subsiste jusqu'en $E^\infty_{2,m}$ où il correspond au facteur $\tilde{H}(S^{m+2})$ de $H_*(X \cup_\rho e^{m+2})$. Le morphisme de suites spectrales induit par l'inclusion $X \subsetneq Y$ est donc injectif à tous les niveaux $r \geqq 2$ et bijectif sur les termes E^∞_p pour $p \geqq 3$, d'où le résultat. $\square$

La proposition 3 permet donc de construire des exemples, comme l'exemple ci-dessus ou celui traité dans [8], où l'invariant $e_\mathbf{k}(X)$ n'augmente pas lorsqu'on attache une cellule à X.

En revanche, on peut montrer que, dans le cas de l'exemple 2, on a $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(X \cup_{\rho} e^7) = 3$, où $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}$ désigne la catégorie (de Lusternik-Schnirelmann) de l'espace « rationalisé » (O-localisé) : ceci fournit un nouveau contre-exemple à la conjecture de [14] et montre que le théorème principal de [14] est le meilleur possible. Pour une discussion détaillée de ces questions, nous renvoyons le lecteur à [10].

Notons pour conclure que si $\bar{r}$ est indécomposable [cas (1) de la proposition (2)], l'invariant e_k augmente en général, même si $\bar{r}$ est dans le noyau de la suspension Σ : l'exemple le plus simple est sans doute $\mathbf{CP}(3) = \mathbf{CP}(2) \cup_{\eta} e^6$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams et P. Hilton, *Comm. Math. Helv.*, vol. 30, 1956, p. 305-330.

[2] H. Baues et J. M. Lemaire, *Math. Ann.*, vol. 225, 1977, p. 219-242.

[3] R. Bott et H. Samelson, *Comm. Math. Helv.*, vol. 27, 1953, p. 320-337.

[4] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton U. Press, 1956.

[5] M. Ginsburg, *Ann. Math.*, vol. 77, 1963, p. 538-551.

[6] J. Labute, *Invent. Math.*, vol. 4, 1967, p. 142-158.

[7] J. M. Lemaire, *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets* (*Springer Lecture. Notes*, n° 422, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974).

[8] J. M. Lemaire, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 1503-1505.

[9] J. M. Lemaire, Exposé aux *Journées Lille-Valenciennes sur les formes différentielles*, Luminy, juin 1976, multigraphié.

[10] J. M. Lemaire et F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L. S. catégorie* (en préparation).

[11] J. Milnor et J. C. Moore, *Ann. Math.*, vol. 81, 1965, p. 211-264.

[12] J. C. Moore, *Séminaire H. Cartan*, 1959-1960, Exposé 6, Publ. Math. I.H.P., 1961.

[13] H. Samelson, *Amer. J. Math.*, vol. 75, 1953, p. 744-752.

[14] G. Toomer, *Math. Z.*, vol. 138, 1974, p. 123-143.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1977,
révisé le 14 février 1978.)

J.-M. Lemaire,
Université de Nice,
parc Valrose,
06034 Nice Cedex.