ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-L. DUPONT
A. GUICHARDET

À propos de l'article « Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels »

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 2 (1978), p. 293-295
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_2_293_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 11, 1978, p. 293 à 296.

A PROPOS DE L'ARTICLE « SUR LA COHOMOLOGIE RÉELLE DES GROUPES DE LIE SIMPLES RÉELS »

PAR J.-L. DUPONT et A. GUICHARDET

ABSTRACT. — We prove that the real continuous 2-cocycles for real simple Lie groups constructed in the preceding paper by Guichardet and Wigner are identical with those constructed by J. L. Dupont by integrating G-invariant differential forms on geodesic simplexes in the symmetric space G/K.

Cette note a pour but de démontrer que les 2-cocycles réels continus sur les groupes de Lie simples réels construits dans [2] sont identiques à ceux construits dans [1] par intégration de formes différentielles G-invariantes sur des simplexes géodésiques dans l'espace symétrique G/K où K est un sous-groupe compact maximal de G (cette dernière construction a aussi été introduite dans [3]).

Rappelons d'abord les constructions de [1] et [2]. On se donne un morphisme non trivial u de K dans **T**; on définit une fonction v sur G par

$$v(g) = u(k) \quad \text{si} \quad g = kp \quad \text{où} \quad k \in \mathrm{K}, \quad p \in \exp \mathfrak{p};$$

le 2-cocycle f construit dans [2] est caractérisé par

$$e^{2\pi i f(g_1, g_2)} = v(g_1) v(g_2) v(g_1 g_2)^{-1}. \tag{1}$$

D'autre part notons u_{*e} la différentielle de u en e et posons

$$\mathrm{P} = u_{*e}/2\pi i;$$

notons $\mathrm{P}(\Omega)$ la 2-forme différentielle G-invariante sur G/K dont la valeur à l'origine 0 de G/K est donnée par

$$\mathrm{P}(\Omega)_0(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -\frac{1}{2}\mathrm{P}([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) \quad \text{pour} \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{p}$$

(rappelons que $\mathfrak{p}$ s'identifie à l'espace tangent en 0 à G/K). Notons enfin $\Delta(g_1, g_2)$ le cône géodésique dans G/K ayant pour sommet 0 et pour base la géodésique joignant $g_1 0$ à $g_1 g_2 0$. Le 2-cocycle c construit dans [1] est donné par

$$c(g_1, g_2) = \int_{\Delta(g_1, g_2)} \mathrm{P}(\Omega). \tag{2}$$

THÉORÈME. — *On a*

$$f(g_1, g_2) = c(g_1, g_2) \quad \textit{pour} \quad g_1, g_2 \in \mathrm{G}. \tag{3}$$

Démonstration. — Comme f et c ne changent pas si l'on remplace (g_1, g_2) par $(k_0\, g_1\, k_1,\ k_1^{-1}\, g_2\, k_2)$ avec $k_0, k_1, k_2 \in \mathrm{K}$, il suffit de démontrer (3) lorsque $g_1, g_2 \in \exp \mathfrak{p}$. Écrivant alors :

$$g_1 g_2 = pk \qquad \text{où} \quad p \in \exp \mathfrak{p}, \quad k \in \mathrm{K},$$

il suffit de montrer que

$$e^{2\pi i c(g_1, g_2)} = u(k^{-1}). \tag{4}$$

La décomposition polaire $\mathrm{G} = \exp \mathfrak{p} . \mathrm{K}$ donne un plongement

$$\tau: \quad \mathrm{G}/\mathrm{K} \xrightarrow{\sim} \exp \mathfrak{p} \in \mathrm{G}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{G}/\mathrm{K} \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "id"'] & \\ & \mathrm{G}/\mathrm{K} \end{tikzcd}$$

Notons Θ la 1-forme différentielle invariante à gauche sur G, à valeurs dans $\mathfrak{k}$, dont la valeur en e est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{k}$ parallèlement à $\mathfrak{p}$, et $\mathrm{P}(\Theta)$ la composée de Θ avec P. Alors :

$$d\mathrm{P}(\Theta) = \pi^*(\mathrm{P}(\Omega))$$

car étant donnés X et $\mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$, on peut écrire

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2,$$
$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2,$$

avec $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1 \in \mathfrak{k}$, $\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2 \in \mathfrak{p}$, et on a

$$\begin{aligned} d\mathrm{P}(\Theta)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= -\frac{1}{2}\mathrm{P}(\Theta([\mathrm{X}, \mathrm{Y}])) = -\frac{1}{2}\mathrm{P}([\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2]) \\ &= \mathrm{P}(\Omega)(\pi_*(\mathrm{X}), \pi_*(\mathrm{Y})). \end{aligned}$$

Par suite on peut remplacer l'intégrale qui figure dans (2) par l'intégrale de $\mathrm{P}(\Theta)$ le long de la frontière de $\tau(\Delta(g_1, g_2))$; mais Θ est nulle le long d'une courbe de la forme $t \mapsto \exp t\mathrm{X}$ où $\mathrm{X} \in p$; donc

$$c(g_1, g_2) = \int_{\tau(\gamma)} \mathrm{P}(\Theta),$$

où γ est la géodésique joignant $g_1\, 0$ à $g_1\, g_2\, 0$. Posons

$$\begin{aligned} g_2 &= \exp \mathrm{Z} && \text{avec} \quad \mathrm{Z} \in \mathfrak{p}, \\ g_t &= \exp \frac{t}{2}\mathrm{Z} && \text{avec} \quad t \in [0, 2], \\ g_1\, g_t &= p_t\, k_t && \text{avec} \quad p_t \in \exp \mathfrak{p},\ k_t \in \mathrm{K}. \end{aligned}$$

On a

$$\gamma(t) = g_1 g_t 0,$$
$$\tau(\gamma(t)) = p_t,$$
$$c(g_1, g_t) = \int_0^t \mathrm{P}(\Theta(\dot{p}_s))\,ds,$$

où $\dot{p}_s$ est le vecteur tangent à la courbe $s \mapsto p_s$. Pour établir (4) il suffit de montrer que

$$e^{2\pi i c(g_1, gt)} = u(k_t^{-1})$$

ou encore que les dérivées logarithmiques des deux membres sont égales, i. e. :

$$2\pi i\,\mathrm{P}(\Theta(\dot{p}_t)) = u(k_t).du(k_t^{-1})/dt. \tag{5}$$

Pour tout $g \in \mathrm{G}$ notons $\mathrm{L}(g)$ et $\mathrm{R}(g)$ les translations à gauche et à droite par g; on a

$$p_t = g_1.\exp\frac{t}{2}\mathrm{Z}.k_t^{-1}$$
$$\dot{p}_t = \mathrm{L}(g_1)_* \mathrm{R}(k_t^{-1})_* \left(\exp\frac{t}{2}\mathrm{Z}\right)^{\cdot} + \mathrm{L}\left(g_1 \exp\frac{t}{2}\mathrm{Z}\right)_* (k_t^{-1})^{\cdot}$$
$$= \mathrm{R}(k_t^{-1})_* \mathrm{L}\left(g_1 \exp\frac{t}{2}\mathrm{Z}\right)_* \mathrm{Z} + \mathrm{L}\left(g_1 \exp\frac{t}{2}\mathrm{Z}\right)_* (k_t^{-1})^{\cdot},$$
$$\mathrm{L}(p_t^{-1})_* \dot{p}_t = \mathrm{Ad}\,k_t.\mathrm{Z} + \mathrm{L}(k_t)_* (k_t^{-1})^{\cdot};$$

Le premier terme est dans p et le second dans k; donc

$$2\pi i\,\mathrm{P}(\Theta(\dot{p}_t)) = 2\pi i\,\mathrm{P}(\mathrm{L}(k_t)_* (k_t^{-1})^{\cdot})$$
$$= u_{*e}(\mathrm{L}(k_t)_* (k_t^{-1})^{\cdot})$$
$$= u(k_t).u_*((k_t^{-1})^{\cdot})$$
$$= u(k_t).du(k_t^{-1})/dt,$$

d'où (5).

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-L. DUPONT, *Simplicial de Rham Cohomology and Characteristic Classes of Flat Bundles* (*Topology*, t. 15, 1976, p. 233-245).

[2] A. GUICHARDET et D. WIGNER, *Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels.* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 11, 1978, p. 277.

[3] H. SHULMAN and D. TISCHLER, *Leaf Invariants for Foliations and the Van Est Isomorphism* (*J. Diff. Geometry*, t. 11, 1976, p. 535-546).

(Manuscrit reçu le 23 février 1978.)

A. GUICHARDET
Centre de Mathématiques,
École polytechnique,
91120 Palaiseau

J.L. DUPONT,
I.E.H.S.,
Bures-sur-Yvette.