ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

I. SATAKE

La déformation des formes hermitiennes et son application aux domaines de Siegel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 3 (1978), p. 445-449
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_3_445_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 11, 1978, p. 445 à 449

LA DÉFORMATION DES FORMES HERMITIENNES ET SON APPLICATION AUX DOMAINES DE SIEGEL

PAR I. SATAKE

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie, que l'on considère comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe I. Alors une forme hermitienne définie positive H sur V est déterminée par sa partie imaginaire A, qui est une forme bilinéaire alternée vérifiant la condition de Riemann : $AI = {}^t(AI) \gg 0$. On considère les couples (X, Y) formés d'un ensemble X de structures complexes I de V et d'un ensemble Y de formes bilinéaires alternées A sur $V \times V$, couples tels que la condition de Riemann soit satisfaite pour tout $A \in Y$ et $I \in X$. Le but de cette note est de déterminer tous les couples (X, Y) maximaux (dits « saturés »). Comme une application, nous démontrons que l'espace classifiant d'un domaine de Siegel (au sens de Piatetsky-Chapiro [1]) est toujours un domaine borné symétrique de type classique.

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2n$. On dira qu'un couple (A, I) formé d'une forme bilinéaire alternée A sur $V \times V$ et d'une structure complexe I de V satisfait à *la condition de Riemann* et notera R (A, I), si la forme bilinéaire $A(x, Iy)$ $(x, y \in V)$ est symétrique et définie positive. Si (A, I) est un tel couple,

$$H(x, y) = A(x, Iy) + iA(x, y)$$

est une forme hermitienne définie positive sur l'espace vectoriel complexe (V, I) (qui est **C**-linéaire en y) et, réciproquement, toute forme hermitienne définie positive s'obtient dans cette manière. On fixe un couple (A_0, I_0) vérifiant la condition de Riemann et on pose $S_0 = A_0 I_0$. (Dans ces notations, une forme bilinéaire sur $V \times V$ est toujours considérée comme une application linéaire $V \to V^*$, V^* désignant le dual de V.) On désignera par $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(V, A_0)$ l'ensemble de toutes les structures complexes I de V telles que $R(A_0, I)$ et par $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}(V, I_0)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires alternées A sur $V \times V$ telles que $R(A, I_0)$. On sait que $\mathfrak{S}_0$ s'exprime comme un domaine borné symétrique $\{ z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbf{C}) \mid 1_n - z\bar{z} \gg 0 \}$ (l'espace de Siegel) et que $\mathfrak{P}_0$ $(\approx \mathfrak{P}_n(\mathbf{C}))$ est un cône homogène auto-adjoint. Pour un sous-ensemble quelconque X (resp. Y) de $\mathfrak{S}_0$ (resp. $\mathfrak{P}_0$) on posera

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}(X) = \{ A \in \mathfrak{P}_0 \mid R(A, I) \text{ pour tout } I \in X \}, \\ \mathfrak{S}(Y) = \{ I \in \mathfrak{S}_0 \mid R(A, I) \text{ pour tout } A \in Y \}. \end{cases}$$

Alors il est clair qu'on a

$$X \subset \mathfrak{S}\mathfrak{P}(X), \qquad \mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{P}(X),$$
$$Y \subset \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y), \qquad \mathfrak{S}(Y) = \mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y).$$

Les correspondances $X \mapsto \mathfrak{S}\mathfrak{P}(X)$, $Y \mapsto \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y)$ sont donc des opérateurs de clôture. Un couple (X, Y) $(X \subset \mathfrak{S}_0, Y \subset \mathfrak{P}_0)$ sera dit *saturé* si on a $Y = \mathfrak{P}(X)$, $X = \mathfrak{S}(Y)$. Un couple saturé (X, Y) est maximal au sens que s'il y a un autre couple (X', Y') tel que $X \subset X'$, $Y \subset Y' \subset \mathfrak{P}(X')$ alors on a $X = X'$, $Y = Y'$. Pour $X \subset \mathfrak{S}_0$, $Y \subset \mathfrak{P}_0$ quelconques, les couples $[\mathfrak{S}\mathfrak{P}(X), \mathfrak{P}(X)]$ et $[\mathfrak{S}(Y), \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y)]$ sont toujours saturés. Dans ce qui suit, on se propose de déterminer tous les couples saturés (X, Y).

2. On désigne par $\mathfrak{P}(V, S_0)$ l'ensemble de toutes les transformations linéaires R de V telles que $S_0 R$ est symétrique et définie positive. [Si on fixe une base orthonormale de V par rapport à S_0, $\mathfrak{P}(V, S_0)$ s'identifie à $\mathfrak{P}_{2n}(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.] Comme d'habitude, on pose

$$GL(V, I_0) = \{ g \in GL(V) \mid [g, I_0] = 0 \},$$
$$Sp(V, A_0) = \{ g \in GL(V) \mid {}^t g A_0 g = A_0 \}.$$

Alors on a les lemmes suivants.

LEMME 1. — *L'application* $I \mapsto I_0^{-1} I$ (*resp.* $A \mapsto A_0^{-1} A$) *donne une correspondance biunivoque entre* $\mathfrak{S}_0$ *et* $Sp(V, A_0) \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$ [*resp.* $\mathfrak{P}_0$ *et* $GL(V, I_0) \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$]. *De plus, on a* $\mathfrak{S}_0 \subset Sp(V, A_0)$.

La démonstration est triviable.

LEMME 2. — *Soient* $A \in \mathfrak{P}_0$ *et* $I \in \mathfrak{S}_0$. *Alors le couple* (A, I) *vérifie la condition de Riemann, si et seulement si on a* $[A_0^{-1} A, I] = 0$.

En effet, supposons d'abord que (A, I) vérifie la condition de Riemann. Alors $A_0 I$ et AI sont symétriques, i. e., $A_0 I = -{}^t I A_0$, $AI = -{}^t I A$, d'où $A_0^{-1} AI = -A_0^{-1}\, {}^t IA = IA_0^{-1} A$. Réciproquement, supposons que $[A_0^{-1} A, I] = 0$. Alors, comme $[A_0^{-1} A, I_0] = 0$, on a

$$AI = A_0 (A_0^{-1} A) I = S_0 (A_0^{-1} A)(I_0^{-1} I).$$

Comme $A_0^{-1} A, I_0^{-1} I \in \mathfrak{P}(V, S_0)$ (lemme 1) et $[A_0^{-1} A, I_0^{-1} I] = 0$ par l'hypothèse, on a $(A_0^{-1} A)(I_0^{-1} I) \in \mathfrak{P}(V, S_0)$, ce qui entraîne que (A, I) vérifie la condition de Riemann.

Soit maintenant (X, Y) un couple saturé, et posons

$$(2) \qquad \begin{cases} G_1 = \{ g \in GL(V) \mid [g, I] = 0 \text{ pour tout } I \in X \}, \\ G_1' = \{ g \in GL(V) \mid {}^t g A g = A \text{ pour tout } A \in Y \}; \end{cases}$$

ce dernier peut s'écrire aussi comme

$$G_1' = \{ g \in Sp(V, A_0) \mid [g, A_0^{-1} A] = 0 \text{ pour tout } A \in Y \}.$$

THÉORÈME 1. — *Les groupes* G_1' *et* G_1 *définis plus haut sont des sous-groupes algébrique, réductifs de* $GL(V)$, *dont* X *et* Y *sont les espaces symétriques associés.*

On note d'abord qu'une involution de Cartan de GL (V) est donnée par

$$\theta: \quad g \mapsto S_0^{-1}\,{}^t g^{-1} S_0$$

et que les sous-groupes GL (V, I_0) et Sp (V, A_0) sont stables par θ. Les involutions de Cartan induites sur ces sous-groupes peuvent s'écrire comme

$$g \mapsto A_0^{-1}\,{}^t g^{-1} A_0, \qquad g \mapsto I_0^{-1} g\, I_0,$$

respectivement; en particulier, on a $I_0^\theta = I_0$. On a d'ailleurs $R^\theta = R^{-1}$ pour tout $R \in \mathfrak{P}(V, S_0)$. D'après les lemmes 1 et 2 et la maximalité du couple (X, Y), on a donc $X^\theta = X$, $(A_0^{-1} Y)^\theta = A_0^{-1} Y$. Par conséquent, G_1 et G'_1 sont des sous-groupes algébriques de GL (V), stables par θ. En vertu d'un théorème de Mostow, il s'ensuit que G_1 et G'_1 sont réductifs. D'après les lemmes 1 et 2, on voit d'ailleurs que l'application $I \mapsto I_0^{-1} I$ (resp. $A \mapsto A_0^{-1} A$) donne une correspondance biunivoque entre X et $G'_1 \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$ [resp. Y et $G_1 \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$]. Cela signifie que X et Y sont les espaces symétriques associés aux groupes G'_1 et G_1.

On notera que Y est un cône (ouvert, convexe) dans un certain sous-espace linéaire de End V, et le théorème 1 entraîne que Y est homogène et auto-adjoint. D'autre part, puisqu'on a $I_0 \in G'_1$, G'_1 est un groupe réductif de type hermitien, et X est un domaine borné symétrique associé, plongé analytiquement dans $\mathfrak{S}_0$.

3. On peut obtenir une description plus précise d'un couple saturé (X, Y) comme suit. En général, une représentation d'un groupe est dite « primaire », si elle est une somme de représentations irréductibles équivalentes. La représentation identique ρ de G'_1 sur V étant complètement réductible, l'espace V se décompose en une somme directe

$$V = V^{(1)} \oplus \ldots \oplus V^{(r)}, \tag{3}$$

où les $V^{(i)}$ sont des « composants primaires » (c'est-à-dire, des sous-espaces primaires maximaux) de V. Puisque $G_1'^{\theta} = G'_1$, les sous-espaces $V^{(i)}$ sont orthogonaux l'un de l'autre par rapport à S_0. Comme on a $[A_0^{-1} A, g] = 0$ pour tout $A \in Y$ et $g \in G'_1$, chaque $V^{(i)}$ est stable par $A_0^{-1} A$ ($A \in Y$). Il s'ensuit que la somme (3) est aussi orthogonale par rapport à toute forme $A \in Y$. Cela signifie que le couple (X, Y) est une somme directe (au sens évident) des couples (X_i, Y_i) sur $V^{(i)}$, qui sont aussi saturés. Donc, pour notre but, nous pouvons supposer que la représentation ρ est primaire; dans ce cas, le couple (X, Y) sera dit *irréductible*.

Étant donné un couple saturé irréductible (X, Y), soit V' un G'_1-espace irréductible contenu dans V. Alors on a

$$\mathscr{K} = \mathrm{End}_{G'_1} V' = \mathbf{R} \quad \text{ou} \quad \mathbf{C} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H},$$

et l'espace V se décompose dans la forme

$$V = V' \underset{\mathscr{K}}{\otimes} V'', \qquad V'' = \mathrm{Hom}_{G'_1}(V', V). \tag{4}$$

Considérons le cas $\mathscr{K} = \mathbf{R}$; alors on a

$$V = V' \underset{\mathbf{R}}{\otimes} V'', \qquad g = g' \otimes \mathrm{id}, \tag{5}$$

où $g\,(\in G'_1) \mapsto g'$ est une représentation absolument irréductible. On a

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' \otimes \mathrm{id} \tag{6}$$

et, en particulier, $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}'_0 \otimes \mathrm{id}$. En vertu du lemme de Schur, on a d'ailleurs

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}'_0 \otimes \mathrm{S}''_0, \qquad \mathrm{A}_0^{-1}\,\mathrm{A} = \mathrm{id} \otimes \mathrm{R}'', \tag{7}$$

où A'_0 (resp. S''_0) est une forme bilinéaire alternée (resp. symétrique définie positive) sur $\mathrm{V}' \times \mathrm{V}'$ (resp. $\mathrm{V}'' \times \mathrm{V}''$). Il s'ensuit que A est de la forme $\mathrm{A}'_0 \otimes \mathrm{S}''$ et que $\mathrm{R}\,(\mathrm{A}, \mathrm{I})$ entraîne $\mathrm{R}\,(\mathrm{A}'_0, \mathrm{I}')$ et $\mathrm{S}'' \in \mathfrak{P}\,(\mathrm{V}'')$, où $\mathfrak{P}\,(\mathrm{V}'')$ désigne l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives sur $\mathrm{V}'' \times \mathrm{V}''$. Vu la maximalité du couple (X, Y) on en conclut que

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \{\, \mathrm{I} = \mathrm{I}' \otimes \mathrm{id} \mid \mathrm{I}' \in \mathfrak{S}(\mathrm{V}', \mathrm{A}'_0) \,\}, \\ \mathrm{Y} = \{\, \mathrm{A} = \mathrm{A}'_0 \otimes \mathrm{S}'' \mid \mathrm{S}'' \in \mathfrak{P}(\mathrm{V}'') \,\} \end{cases} \tag{8}$$

et, par conséquent,

$$\begin{cases} \mathrm{G}_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{V}'} \otimes \mathrm{GL}(\mathrm{V}''), \\ \mathrm{G}'_1 = \mathrm{Sp}(\mathrm{V}', \mathrm{A}'_0) \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{V}''}. \end{cases} \tag{9}$$

Cela montre que Y (resp. X) est un cône homogène auto-adjoint irréductible (resp. un domaine borné symétrique irréductible) de type (III). Dans les autres cas, où $\mathscr{K} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$, on obtient un résultat analogue, sauf que X et Y sont de type (I) ou (II).

THÉORÈME 2. — *Soit* (X, Y) *est un couple saturé irréductible. Alors* Y *est un cône homogène auto-adjoint irréductible de type classique* [(I) – (III)] *et* X *est un domaine borné symétrique irréductible du type correspondant.*

Les cas extrêmes $\mathrm{X} = \mathfrak{S}_0$, $\mathrm{Y} = \{\, \lambda\, \mathrm{A}_0\, (\lambda > 0) \,\}$ et $\mathrm{X} = \{\, \mathrm{I}_0 \,\}$, $\mathrm{Y} = \mathfrak{P}_0$ s'obtiennent en prenant $\mathscr{K} = \mathbf{R}$, $\mathrm{V}'' = \mathbf{R}$ et $\mathscr{K} = \mathbf{C}$, $\mathrm{V}' = \mathbf{C}$, respectivement.

Remarque. — De la définition de G_1 et G'_1, on voit que $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}'_1$ coïncide avec le plus grand sous-groupe normal compact de G_1 et aussi avec celui de G'_1. D'après le théorème 2, $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}'_1$ est toujours abélien. Il s'ensuit que G_1 et G'_1 sont les centrisateurs mutuels dans $\mathrm{GL}\,(\mathrm{V}, \mathrm{I}_0)$ et $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{V}, \mathrm{A}_0)$.

4. Soit $\mathscr{S}$ un domaine de Siegel (de la seconde espèce) définie par

$$\mathscr{S} = \{\, (u, v) \in \mathrm{U}_{\mathbf{C}} \times \mathrm{V} \mid \mathrm{Im}\, u - \mathrm{H}(v, v) \in \Omega \,\},$$

où U est un espace vectoriel réel (de dimension finie), V un espace vectoriel complexe (de dimension finie), Ω est un cône (ouvert, convexe, et « non-dégénéré », c'est-à-dire que Ω ne contient aucune ligne droite), et H est une application hermitienne $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{U}_{\mathbf{C}}$ « Ω-positive » (c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{H}\,(x, x) \in \overline{\Omega} - \{\, 0 \,\}$ pour tout $x \in \mathrm{V}$, $x \neq 0$). On considère V comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe I_0 et pose

$$\mathrm{H}(x, y) = \mathrm{A}(x, \mathrm{I}_0\, y) + i\, \mathrm{A}(x, y). \tag{10}$$

Alors A est une application bilinéaire alternée $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ telle que $\mathrm{A}\,(x, \mathrm{I}_0\, y)$ est symétrique et Ω-positive. Par définition, l'*espace classifiant* de $\mathscr{S}$ (ou « l'espace de Siegel généralisé »), noté $\mathfrak{S}(V, A, \Omega)$, est l'ensemble de toutes les structures complexes I de V telles que l'application $A(x, Iy)$ soit symétrique et Ω-positive (*cf.* [1], V, § 20; [4], III, § 6).

On introduit un produit scalaire (défini positif) $\langle\ \ \rangle$ dans U et on définit le « dual » de Ω par

$$\Omega^* = \{ u \in U \mid \langle u, u' \rangle > 0 \text{ pour tout } u' \in \overline{\Omega} - \{0\} \}.$$

Pour chaque $u \in U$, on pose

$$A_u(v, v') = \langle u, A(v, v') \rangle \qquad (v, v' \in V).$$

Alors A_u est une forme bilinéaire alternée sur $V \times V$; et il est facile de voir que, pour une structure complexe I de V, l'application $A(x, Iy)$ est symétrique et Ω-positive si et seulement si le couple (A_u, I) satisfait à la condition de Riemann pour tout $u \in \Omega^*$. Avec les notations précédentes, cela signifie que, si on pose $Y = \{ A_u (u \in \Omega^*) \}$, on a $Y \subset \mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{S}(Y) = \mathfrak{S}(V, A, \Omega)$. Donc les théorèmes 1 et 2 entraînent le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *L'espace classifiant* $\mathfrak{S}(V, A, \Omega)$ *d'un domaine de Siegel est un domaine borné symétrique, qui est un produit direct de domaines irréductibles de type classique* [(I)−(III)].

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. I. PIATETSKY-CHAPIRO, *Géométrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes* (en russe), Fizmatgiz, Moscow, 1961; traduction française, Dunod, Paris, 1966.

[2] I. SATAKE, Symplectic Representations of Algebraic Groups satisfying a Certain Analyticity Condition (*Acta Math.*, 117, 1967, p. 215-279).

[3] I. SATAKE, Linear Imbeddings of Self-dual Homogeneous Cones (*Nagoya Math. J.*, 46, 1972, p. 121-145; Corrections, *ibid.*, 60, 1976, p. 219).

[4] I. SATAKE, Algebraic Structures of Symmetric Domains [*Pupl. de Math. Soc. Japan*, Iwanami et Princeton Univ. Press (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 3 mars 1978.)

M. I. SATAKE,
Department of Mathematics,
University of California,
Berkeley, California 94720,
U.S.A.