Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Curtz

Stabilité locale des systèmes quadratiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 3 (1980), p. 293-302
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_293_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 13, 1980, p. 293 à 302.

STABILITÉ LOCALE DES SYSTÈMES QUADRATIQUES

PAR PAUL CURTZ

Exauçant Coppel [5], on présente le début d'une étude concernant l'analyse qualitative des systèmes quadratiques en fonction des coefficients supposés réels..

On rappelle le premier théorème de Berlinski [5] :

Quand ses quatre points singuliers sont réels distincts, un système quadratique possède un, deux ou trois cols; les autres points sont des anticols. Le quadrilatère dont les sommets sont les points singuliers est convexe lorsqu'il y a deux cols (*lesquels se situent à des sommets opposés*), *concave quand il y a un ou trois cols.*

On va écrire :

(1) les équations résolvantes générales des points singuliers;

(2) quand un point singulier est à l'origine des coordonnées :

(*a*) le discriminant.

On peut alors dire si on a deux points singuliers réels ou quatre;

(*b*) si on est dans le second cas, les conditions pour lesquelles on a un, deux ou trois cols;

(3) dans le cas général, toujours pour quatre points singuliers réels simples, les conditions pour lesquelles on a soit deux cols, soit un ou trois.

1. Équations résolvantes générales des points singuliers

Soit le système différentiel quadratique à coefficients réels

$$\frac{dx}{dt}=r_0+r_1x+r_2y+r_3x^2+2r_4xy+r_5y^2=\mathrm{P}_2(x,\ y), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}=s_0+s_1x+s_2y+s_3x^2+2s_4xy+s_5y^2=\mathrm{Q}_2(x,\ y). \tag{2}$$

Les coordonnées des points singuliers ont des valeurs x_i, y_i, $i=1$ à 4 qui annulent (1) et (2).

On a

$$r_3x^2+2r_4xy+r_5y^2+r_1x+r_2y+r_0=0, \tag{3}$$

$$s_3x^2+2s_4xy+s_5y^2+s_1x+s_2y+s_0=0. \tag{4}$$

On pose

$$a=r_3 s_4-r_4 s_3, \tag{5}$$

$$b=r_1 s_5-r_5 s_1, \tag{6}$$

$$c=r_1 s_2-r_2 s_1, \tag{7}$$

$$d=r_2 s_5-r_5 s_2, \tag{8}$$

$$e=r_2 s_4-r_4 s_2, \tag{9}$$

$$\alpha=r_4 s_5-r_5 s_4, \tag{10}$$

$$\beta=r_2 s_3-r_3 s_2, \tag{11}$$

$$\gamma=r_3 s_5-r_5 s_3, \tag{12}$$

$$\delta=r_1 s_3-r_3 s_1, \tag{13}$$

$$\varepsilon=r_1 s_4-r_4 s_1, \tag{14}$$

$$\mathfrak{A}=r_0 s_1-r_1 s_0, \tag{15}$$

$$\mathfrak{B}=r_0 s_2-r_2 s_0, \tag{16}$$

$$\mathfrak{C}=r_0 s_3-r_3 s_0, \tag{17}$$

$$\mathfrak{D}=r_0 s_4-r_4 s_0, \tag{18}$$

$$\mathfrak{E}=r_0 s_5-r_5 s_0. \tag{19}$$

Entre ces quinze quantités existent les quinze relations :

$$ab+\alpha\delta=\gamma\varepsilon, \tag{20}$$

$$\alpha\beta+ad=\gamma e, \tag{21}$$

$$d\delta-b\beta=c\gamma, \tag{22}$$

$$d\varepsilon-be=\alpha c, \tag{23}$$

$$\delta e-\beta\varepsilon=ac, \tag{24}$$

$$b\mathfrak{D}-\alpha\mathfrak{A}=\varepsilon\mathfrak{E}, \tag{25}$$

$$\beta\mathfrak{D}+a\mathfrak{B}=e\mathfrak{C}, \tag{26}$$

$$d\mathfrak{D}-\alpha\mathfrak{B}=e\mathfrak{C}, \tag{27}$$

$$\delta\mathfrak{D}+a\mathfrak{A}=\varepsilon\mathfrak{E}, \tag{28}$$

$$\varepsilon\mathfrak{B}-e\mathfrak{A}=c\mathfrak{D}, \tag{29}$$

$$\alpha\mathfrak{C}+a\mathfrak{E}=\gamma\mathfrak{D}, \tag{30}$$

$$d\mathfrak{C}-\beta\mathfrak{E}=\gamma\mathfrak{B}, \tag{31}$$

$$b\mathfrak{C}-\delta\mathfrak{E}=\gamma\mathfrak{A}, \tag{32}$$

$$b\mathfrak{B}-d\mathfrak{A}=c\mathfrak{E}, \tag{33}$$

$$\delta\mathfrak{B}-\beta\mathfrak{A}=c\mathfrak{C}. \tag{34}$$

Des six combinaisons possibles entre (3) et (4) on retient :

$$\gamma x^2 + 2\alpha xy + bx + dy + \mathfrak{E} = 0, \tag{35}$$

$$-2axy - \gamma y^2 + \delta x + \beta y + \mathfrak{C} = 0. \tag{36}$$

On note $b \leftrightarrow \beta$ l'interversion de b et β. Alors :

$$a \leftrightarrow -\alpha, \tag{37}$$

$$b \leftrightarrow \beta, \tag{38}$$

$$c \leftrightarrow -c, \tag{39}$$

$$\gamma \leftrightarrow -\gamma, \tag{40}$$

$$d \leftrightarrow \delta, \tag{41}$$

$$e \leftrightarrow \varepsilon, \tag{42}$$

$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}, \tag{43}$$

$$\mathfrak{D} \leftrightarrow \mathfrak{D}, \tag{44}$$

$$\mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{E} \tag{45}$$

permettent d'associer deux à deux les formules (20)-(21), (23) à (28) et (31) à (34); chacune des formules (22), (29) et (30) est sa propre transformée.

Avec, en plus :

$$x \leftrightarrow y, \tag{46}$$

on associe (35) et (36).

De (35) on tire y que l'on reporte dans (36).

En posant

$$S = \gamma^2 - 4a\alpha, \tag{47}$$

on aboutit aux équations résolvantes de (1) et (2) :

$$\begin{aligned} S x^4 &+ 2[\gamma(b-e) + 2\alpha(\beta-\varepsilon)]x^3 \\ &+ [b(b-e) + d(\beta-\varepsilon) - \alpha(3c + 4\mathfrak{D}) + 2\gamma\mathfrak{E}]x^2 \\ &- [cd + 4\alpha\mathfrak{B} - 2(b-e)\mathfrak{E}]x + \mathfrak{E}^2 - d\mathfrak{B} = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

et, à l'aide de (37) à (46),

$$\begin{aligned} S y^4 &- 2[2a(b-e) + \gamma(\beta-\varepsilon)]y^3 \\ &+ [\delta(b-e) + \beta(\beta-\varepsilon) - a(3c - 4\mathfrak{D}) - 2\gamma\mathfrak{C}]y^2 \\ &+ [c\delta + 4a\mathfrak{A} + 2(\beta-\varepsilon)\mathfrak{C}]y + \mathfrak{C}^2 - \delta\mathfrak{A} = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

2. Systèmes quadratiques sans termes constants

(*a*) ÉQUATIONS RÉSOLVANTES DES POINTS SINGULIERS ET CALCUL DE LEUR DISCRIMINANT. — Le transfert à l'origine du point singulier de coordonnées x_1, y_1 conduit (1)-(2) à un nouveau système qui n'a plus de termes constants. On surmonte d'une barre les lettres relatives à ce système qui s'écrit :

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{r}_1\bar{x}+\bar{r}_2\bar{y}+\bar{r}_3\bar{x}^2+2\bar{r}_4\bar{x}\bar{y}+\bar{r}_5\bar{y}^2=\bar{\mathrm{P}}_2(\bar{x},\bar{y}), \tag{50}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\bar{s}_1\bar{x}+\bar{s}_2\bar{y}+\bar{s}_3\bar{x}^2+2\bar{s}_4\bar{x}\bar{y}+\bar{s}_5\bar{y}^2=\bar{\mathrm{Q}}_2(\bar{x},\bar{y}). \tag{51}$$

Les coordonnées des points singuliers sont les solutions de

$$\bar{r}_3\bar{x}^2+2\bar{r}_4\bar{x}\bar{y}+\bar{r}_5\bar{y}^2+\bar{r}_1\bar{x}+\bar{r}_2\bar{y}=0, \tag{52}$$

$$\bar{s}_3\bar{x}^2+2\bar{s}_4\bar{x}\bar{y}+\bar{s}_5\bar{y}^2+\bar{s}_1\bar{x}+\bar{s}_2\bar{y}=0 \tag{53}$$

qui admet la solution triviale

$$\bar{x}_1=0, \tag{54}$$

$$\bar{y}_1=0. \tag{55}$$

Entre les dix expressions :

$$\bar{a}=\bar{r}_3\bar{s}_4-\bar{r}_4\bar{s}_3, \tag{56}$$

$$\bar{b}=\bar{r}_1\bar{s}_5-\bar{r}_5\bar{s}_1, \tag{57}$$

$$\bar{c}=\bar{r}_1\bar{s}_2-\bar{r}_2\bar{s}_1, \tag{58}$$

$$\bar{d}=\bar{r}_2\bar{s}_5-\bar{r}_5\bar{s}_2, \tag{59}$$

$$\bar{e}=\bar{r}_2\bar{s}_4-\bar{r}_4\bar{s}_2, \tag{60}$$

$$\bar{\alpha}=\bar{r}_4\bar{s}_5-\bar{r}_5\bar{s}_4, \tag{61}$$

$$\bar{\beta}=\bar{r}_2\bar{s}_3-\bar{r}_3\bar{s}_2, \tag{62}$$

$$\bar{\gamma}=\bar{r}_3\bar{s}_5-\bar{r}_5\bar{s}_3, \tag{63}$$

$$\bar{\delta}=\bar{r}_1\bar{s}_3-\bar{r}_3\bar{s}_1, \tag{64}$$

$$\bar{\varepsilon}=\bar{r}_1\bar{s}_4-\bar{r}_4\bar{s}_1, \tag{65}$$

existent les cinq relations :

$$\bar{a}\bar{b}+\bar{\alpha}\bar{\delta}=\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}, \tag{66}$$

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{a}\bar{d}=\bar{\gamma}\bar{e}, \tag{67}$$

$$\bar{d}\bar{\delta}-\bar{b}\bar{\beta}=\bar{c}\bar{\gamma}, \tag{68}$$

$$\bar{d}\bar{\varepsilon}-\bar{b}\bar{e}=\bar{\alpha}\bar{c}, \tag{69}$$

$$\bar{\delta}\bar{e}-\bar{\beta}\bar{\varepsilon}=\bar{a}\bar{c}. \tag{70}$$

Comme, seuls, $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\gamma}$ sont respectivement égaux à a, α et γ :

$$\bar{\mathrm{S}}=\bar{\gamma}^2-4\bar{a}\bar{\alpha}=\gamma^2-4a\alpha=\mathrm{S}. \tag{71}$$

Cette fois, on indice certaines relations :

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\gamma}\bar{x}_i^2+2\bar{\alpha}\bar{x}_i\bar{y}_i+\bar{b}\bar{x}_i+\bar{d}\bar{y}_c=0 && (72)\\ &-2\bar{a}\bar{x}_i\bar{y}_i-\bar{\gamma}\bar{y}_i^2+\bar{\delta}\bar{x}_i+\bar{\beta}\bar{y}_i=0 && (73)\end{aligned}\right\} i=1 \text{ à } 4.$$

De même, avec ces deux équations,

$$\bar{a}\leftrightarrow-\bar{\alpha}, \tag{74}$$

$$\bar{b}\leftrightarrow\bar{\beta}, \tag{75}$$

$$\bar{c}\leftrightarrow-\bar{c}, \tag{76}$$

$$\bar{\gamma}\leftrightarrow-\bar{\gamma}, \tag{77}$$

$$\bar{d}\leftrightarrow\bar{\delta}, \tag{78}$$

$$\bar{e}\leftrightarrow\bar{\varepsilon}, \tag{79}$$

et

$$\bar{x}\leftrightarrow\bar{y} \tag{80}$$

conduisent à

$$\mathrm{S}\bar{x}_i\bar{y}_i+(2\bar{\alpha}\bar{\delta}-\bar{\beta}\bar{\gamma})\bar{x}_i-(2\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{\gamma})\bar{y}_i+\bar{c}\bar{\gamma}=0, \qquad i=2,\ 3,\ 4 \tag{81}$$

et aux équations résolvantes de (50)-(51) :

$$\mathrm{S}\bar{x}^3+2[\bar{\gamma}(\bar{b}-\bar{e})+2\bar{\alpha}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})]\bar{x}^2+[\bar{b}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{d}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})-3\overline{\alpha c}]\bar{x}-\bar{c}\bar{d}=0, \tag{82}$$

$$\mathrm{S}\bar{y}^3-2[2\bar{a}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{\gamma}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})]\bar{y}^2+[\bar{\delta}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{\beta}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})-3\bar{a}\bar{c}]\bar{y}+\bar{c}\bar{\delta}=0. \tag{83}$$

De ces équations on déduit :

$$\mathrm{S}\sum_{i=2}^{4}\bar{x}_i=-2[\bar{\gamma}(\bar{b}-\bar{e})+2\bar{\alpha}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})], \tag{84}$$

$$\mathrm{S}\sum_{i=2}^{4}\bar{y}_i=2[2\bar{a}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{\gamma}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})], \tag{85}$$

$$\mathrm{S}\sum_{i=2}^{4}\bar{x}_i\bar{x}_j=\bar{b}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{d}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})-3\bar{\alpha}\bar{c}, \qquad i\neq j, \tag{86}$$

$$\mathrm{S}\sum_{i=2}^{4}\bar{y}_i\bar{y}_j=\bar{\delta}(\bar{b}-\bar{e})+\bar{\beta}(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})-3\bar{a}\bar{c}, \qquad i\neq j, \tag{87}$$

$$S\,\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4=\bar{c}\,\bar{d}, \tag{88}$$

$$S\,\bar{y}_2\bar{y}_2\bar{y}_4=-\bar{c}\,\bar{\delta}, \tag{89}$$

$$S\sum_{i=2}^{4}\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{y}_k=-\bar{c}\,(\bar{b}+2\bar{e}),\qquad i\neq j,\qquad j\neq k,\quad k\neq i, \tag{90}$$

$$S\sum_{i=2}^{4}\bar{y}_i\bar{y}_j\bar{x}_k=\bar{c}(\bar{\beta}+2\bar{\varepsilon}),\qquad i\neq j,\quad j\neq k,\quad k\neq i, \tag{91}$$

$$S\sum_{i=2}^{4}\bar{x}_i(\bar{y}_j+\bar{y}_k)=3\,\bar{c}\,\bar{\gamma}-2[\bar{\varepsilon}\,(\bar{b}-\bar{e})+\bar{e}\,(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})],\qquad i\neq j,\quad j\neq k,\quad k\neq i. \tag{92}$$

Les équations caractéristiques relatives à $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $i=1$ à 4 s'écrivent :

$$\bar{\lambda}^2-\bar{u}_i\bar{\lambda}+\bar{v}_i=0,\qquad i=1 \text{ à } 4, \tag{93}$$

où

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_i=\left[\frac{\partial\bar{P}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial x}+\frac{\partial\bar{Q}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}\right]_{\bar{x}_i,\,\bar{y}_i} &(94)\\
&\bar{v}_i=\left[\frac{\partial\bar{P}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}\,\frac{\partial\bar{Q}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}-\frac{\partial\bar{P}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}\,\frac{\partial\bar{Q}_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}\right]_{\bar{x}_i,\,\bar{y}_i} &(95)
\end{aligned}\right\}\ i=1 \text{ à } 4,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_i=2(\bar{r}_3+\bar{s}_4)\bar{x}_i+2(\bar{r}_4+\bar{s}_5)\bar{y}_i+\bar{r}_1+\bar{s}_2 &(96)\\
&\bar{v}_i=4(\bar{a}\,\bar{x}_i^2+\bar{\gamma}\,\bar{x}_i\bar{y}_i+\bar{\alpha}\,\bar{y}_i^2)-2(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})\,\bar{x}_i+2(\bar{b}-\bar{e})\,\bar{y}_i+\bar{c} &(97)
\end{aligned}\right\}\ i=1 \text{ à } 4.$$

Pour le point singulier à l'origine :

$$\bar{u}_1=\bar{r}_1+\bar{s}_2, \tag{98}$$

$$\bar{v}_1=\bar{c}. \tag{99}$$

Pour les trois autres points, comme d'après (72)-(73) et (81) :

$$\bar{a}\,\bar{x}_i^2+\bar{\gamma}\,\bar{x}_i\bar{y}_i+\bar{\alpha}\,\bar{y}_i^2=(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})\,\bar{x}_i-(\bar{b}-\bar{e})\,\bar{y}_i-\bar{c}, \tag{100}$$

$$\bar{v}_i=2(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})\,\bar{x}_i-2(\bar{b}-\bar{e})\,\bar{y}_i-3\,\bar{c},\qquad i=2,\,3,\,4. \tag{101}$$

De cette relation et de (84) à (92) on déduit, en posant

$$\begin{aligned}\bar{D}=27\,\bar{c}^2\,S+36\,\bar{c}\,[\bar{a}\,(\bar{b}-\bar{e})^2+\bar{\gamma}\,(\bar{b}-\bar{e})(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})+\bar{\alpha}\,(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})^2]\\
+4[\bar{\delta}\,(\bar{b}-\bar{e})^3+3\bar{\varepsilon}\,(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})(\bar{b}-\bar{e})^2+2(\bar{b}-\bar{e})^2(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})^2+3\,\bar{e}\,(\bar{b}-\bar{e})(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})^2+\bar{d}\,(\bar{\beta}-\bar{\varepsilon})^3],\end{aligned} \tag{102}$$

$$S\,(\bar{v}_2\bar{v}_3+\bar{v}_3\bar{v}_4+\bar{v}_4\bar{v}_2)=\bar{D}. \tag{103}$$

$$S\,\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_4=-\bar{v}_1\,\bar{D}. \tag{104}$$

De (103) et (104) on déduit

$$\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3+\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_4+\bar{v}_3\bar{v}_4\bar{v}_1+\bar{v}_4\bar{v}_1\bar{v}_2=0. \tag{105}$$

Si $\bar{\lambda}_{2i-1}$ et $\bar{\lambda}_{2i}$, $i=1$ à 4 sont les racines de (93) :

$$\bar{v}_i=\bar{\lambda}_{2i-1}\bar{\lambda}_{2i}, \qquad i=1 \text{ à } 4 \tag{106}$$

et

$$\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4\bar{\lambda}_5\bar{\lambda}_6+\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4\bar{\lambda}_5\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8+\bar{\lambda}_5\bar{\lambda}_6\bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2+\bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4=0. \tag{107}$$

$\bar{v}_i<0$ correspondant à un col et $\bar{v}_i>0$ à un anticol, on retrouve ainsi la première partie du théorème de Berlinski pour (50).(51). Ceci est aussi valable pour (1).(2) puisque les formules (105) à (107) peuvent s'écrire sans les barres.

On va maintenant calculer le discriminant de (82).

A un facteur près le discriminant de

$$\bar{k}\bar{x}^3+\bar{l}\bar{x}^2+\bar{m}\bar{x}+\bar{n}=0 \tag{108}$$

est

$$\bar{\Delta}=27\bar{k}^2\bar{n}^2-18\,\bar{k}\bar{l}\bar{m}\bar{n}-\bar{l}^2\bar{m}^2+4(\bar{l}^3\bar{n}+\bar{m}^3\bar{k}), \tag{109}$$

$$=27\,\bar{k}^2\bar{n}^2+2\bar{l}\bar{n}(2\bar{l}^2-9\bar{k}\bar{m})+\bar{m}^2(4\bar{k}\bar{m}-\bar{l}^2). \tag{109 bis}$$

On examine d'abord le cas particulier de (50)-(51), où

$$\bar{r}_4=\bar{s}_4=0. \tag{110}$$

D'après (102) :

$$\bar{\mathrm{D}}=27\bar{c}^2\bar{\gamma}^2+36\bar{b}\bar{\beta}\bar{c}\bar{\gamma}+4(\bar{b}^3\bar{\delta}+2\bar{b}^2\bar{\beta}^2+\bar{\beta}^3\bar{d}). \tag{111}$$

Comme

$$4\bar{k}_1\bar{m}_1-\bar{l}_1^2=4\bar{\beta}\bar{\gamma}^2\bar{d},$$

et

$$2\bar{l}_1^2-9\bar{k}_1\bar{m}_1=-\bar{\gamma}^2(\bar{b}^2+9\bar{\beta}\bar{d}),$$

on obtient le discriminant $\bar{\Delta}_1$ de l'équation en $\bar{x}$:

$$\bar{\Delta}_1=\bar{\gamma}^2\bar{d}^2\bar{\mathrm{D}}. \tag{112}$$

On va généraliser cette formule. Avec $\bar{\mathrm{D}}$ défini par (102), en ordonnant dans le discriminant $\bar{\Delta}_1$ de (82) les termes en $27\bar{c}^2\,\mathrm{S}$, on obtient :

$$\bar{\Delta}_1=(2\bar{\alpha}\bar{b}-\bar{\gamma}\bar{d})^2\bar{\mathrm{D}}. \tag{113}$$

Pour (83) :

$$\overline{\Delta}_2=(2\overline{a}\overline{\beta}-\overline{\gamma}\overline{\delta})^2\,\overline{D}. \tag{114}$$

Hormis certains cas particuliers ($S=0$, $2\overline{\alpha}\overline{b}-\overline{\gamma}\overline{d}=2\overline{a}\overline{\beta}-\overline{\gamma}\overline{\delta}=0$, $\overline{c}=0$, $\overline{d}=\overline{\delta}=0$), $\overline{D}$ peut être considéré comme le discriminant des équations (82) et (83). D'où :

THÉORÈME 1. — *Pour le système* (50)-(51), *avec* $\overline{D}$ *défini par* (56) *à* (65), (71) *et* (102), *la réalité des points singuliers est, en général,*

(115) $\overline{D}<0$, *quatre points réels distincts,*

(116) $\overline{D}=0$, *quatre points réels non distincts,*

(117) $\overline{D}>0$, *deux points réels distincts et deux points imaginaires distincts.*

(*b*) CONDITIONS POUR LESQUELLES ON A UN, DEUX OU TROIS COLS. — En posant

$$\overline{I}=8[\overline{a}(\overline{b}-\overline{e})^2+\overline{\gamma}(\overline{b}-\overline{e})(\overline{\beta}-\overline{\varepsilon})+\overline{\alpha}(\overline{\beta}-\overline{\varepsilon})^2]+9\overline{c}\,S, \tag{118}$$

$$S(\overline{v}_2+\overline{v}_3+\overline{v}_4)=-\overline{I}. \tag{119}$$

L'équation aux cols et aux anticols s'écrit :

$$S\overline{v}^3+\overline{I}\,\overline{v}^2+\overline{D}\,\overline{v}+\overline{c}\overline{D}=0. \tag{120}$$

En tenant compte du signe de $\overline{c}$ (col ou anticol à l'origine) et en appliquant le théorème de Descartes aux seuls cas possibles, on obtient :

THÉORÈME 2. — *Quand le système* (50)-(51) *a ses quatre points singuliers simples réels, avec* (56), (61) *et* (63), S *et* $\overline{I}$ *définis par* (71) *et* (118), *on a les conditions nécessaires et suffisantes :*

(121) $S>0$, *deux cols,*

(122) (123) $S<0\begin{cases}\overline{I}>0, & \textit{un col,}\\ \overline{I}<0, & \textit{trois cols.}\end{cases}$

Ainsi, par exemple, dans le cas des conditions (110) lorsque $\overline{D}$ défini par (111) est négatif, que $\overline{c\gamma}\neq 0$, $\overline{d}\neq 0$ et $\overline{\delta}\neq 0$, on a deux cols.

3. Systèmes quadratiques complets

Les termes de degré deux étant inchangés on peut déjà améliorer le premier théorème de Berlinski :

THÉORÈME 3. — *Lorsque le système* (1)-(2) *a ses quatre points singuliers distincts et réels* (*ce qui implique une ou des conditions non encore établies*), *avec* S *défini par* (56), (61), (63) *et* (71), *on a les conditions nécessaires et suffisantes :*

(124) $S>0$, *deux cols,*

(125) $S<0$, *un ou trois cols.*

Le texte ci-dessus résume les quatre notes déposées sous les numéros 582 (première partie), 583 (deux premières parties) et 584 en archives originales de mon employeur principal, le Centre National de la Recherche Scientifique, 15, quai Anatole-France, 75007 Paris.

BIBLIOGRAPHIE

La liste ci-dessous est fournie à titre purement indicatif. Elle ne mentionne ni les modèles ni les articles concernant les cycles limites existants. Toutefois, à propos de ces derniers, signalons la note dactylographiée de Shi Song-Ling, *A Concrete Example of the Existence of Four Limit Cycles for Quadratic Systems*, Académie des Sciences de Chine, 5 janvier 1979. Je remercie Alain Chenciner, qui me l'a communiquée, ainsi que le referee pour ses indications.

Abréviation : *D.U.= Differentsial'nye Uravneniya*, mensuel russe édité à Minsk depuis 1965. Il existe une traduction américaine: *Differential Equations*, New York.

[1] J. ARGEMI, *Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans* $\mathbb{R}^2$ [*Annali di Mathematica pura ed applicata*, sér. IV, n° 79, 1968, p. 35-69 (extrait d'une thèse, Aix-Marseille, 1967)].
[2] A. N. BERLINSKI, *D.U.*, vol. II, n° 3, 1966, p. 353-360.
[3] L. A. CHERKAS, *D.U.*, vol. III, n° 7, 1967, p. 1060-1069.
[4] C. C. CHICONE, *Quadratic Gradients on the Plane are Generically Morse-Smale* (*Journal of Differential Equations*, vol. 33, n° 2, 1979, p. 159-166).
[5] W. A. COPPEL, *A Survey of Quadratic Systems* (*Journal of Differential Equations*, vol. 2, n° 3, 1966, p. 293-304).
[6] T. DATE, *Classification and Analysis of Two-Dimensional Real Homogeneous Quadratic Differential Equation Systems* (*Journal of Differential Equation*, vol. 32, n° 3, 1979, p. 311-334).
[7] R. J. DICKSON et L. M. PERKO, *Bounded Quadratic Systems in the Plane* (*Journal of Differential Equations*, vol. 7, n° 2, 1970, p. 251-273).
[8] T. A. DRUZHKOVA, *D.U.*, vol. IV, n° 8, 1968, p. 1421-1427.
[9] T. A. DRUZHKOVA, *D.U.*, vol. XI, n° 2, 1975, p. 262-267.
[10] R. M. EVDOKIMENKO, *D.U.*, vol. VI, n° 10, 1970, p. 1780-1791.
[11] R. M. EVDOKIMENKO, *D.U.*, vol. XII, n° 9, 1976, p. 1557-1567.
[12] R. M. EVDOKIMENKO, *D.U.*, vol. XV, n° 2, 1979, p. 215-221.
[13] F. V. FILIPTSOV, *D.U.*, vol. VI, n° 10, 1970, p. 1772-1779.
[14] F. V. FILIPTSOV, *D.U.*, vol. IX, n° 3, 1973, p. 469-476.
[15] E. HILLE, *A Note on Quadratic Systems* (*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Section A, vol. 72, n° 1, 1974, p. 17-37).
[16] E. F. KIRNITSKAYA et K. S. SIBIRSKI, *D.U.*, vol. XIV, n° 9, 1978, p. 1589-1593.
[17] I. S. KUKLES et I. G. ROZET, *D.U.*, vol. VII, n° 10, 1971, p. 1813-1818.
[18] A. A. LEVAKOV et E. S. SHPIGEL'MAN, *D.U.*, vol. VIII, n° 11, 1972, p. 1969-1976.
[19] W. S. LOUD, *Behaviour of the Period of Solutions of Certain Plane Autonomous Systems near Centers. Contributions to Differential Equations III*, R.I.A.S. et Université du Maryland, 1964, p. 21-36, John Wiley, New York.
[20] N. A. LUKASEVIC, *D.U.*, vol. I, n° 1, 1965, p. 82-95.
[21] N. A. LUKASEVIC, *D.U.*, vol. I, n° 2, 1965, p. 196-198.
[22] N. A. LUKASEVIC et V. I. MATATOV, *D.U.*, vol. IX, n° 3, 1973, p. 449-455.
[23] L. MARKUS, *Quadratic Differential Equations and Non-Associative Algebras* (*Ann. Math. Studies*, vol. 45, 1960, p. 185-213, Princeton).
[24] T. A. NEWTON, *Two Dimensional Homogeneous Quadratic Differential Systems* (*S.I.A.M. Review*, vol. 20, n° 1, 1978, p. 120-138).
[25] M. N. POPPA et K. S. SIBIRSKI, *D.U.*, vol. XIV, n° 6, 1978, p. 1028-1033.
[26] H. POINCARÉ, *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, T. I, p. 1-222 (plusieurs éditions).
[27] F. R. SHARPE, *The Topography of Certain Curves defined by a differential Equation* (*Annals of Mathematics*, vol. 11, 1910, p. 97-102).

[28] E. S. SHPIGEL'MAN, *D.U.*, vol. XI, n° 11, 1975, p. 2019-2026.

[29] P. P. SVISTUNOV et D. H. KAJUMOV, *Le cycle séparateur d'une équation...* [*Izv. Akaol Nauk. Uzbekistan, Physique mathématique*, Tachkent, vol. 17, n° 5, 1973, p. 19-23 (en russe)].

[30] G. TAVARES DOS SANTOS, *Classification of Generic Systems Vector Fields with no Limit Cycles* [*Colloque*, Rio de Janeiro, juillet 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 597, *Geometry and Topology*, Springer, 1977, p. 605-640)].

[31] H. R. VAN DER WAART, *Conditions for Periodic Solutions of Volterra Differential Systems* (*Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 40, n° 2, 1978, p. 133-160).

[32] N. I. VULPE et K. S. SIBIRSKI, *D.U.*, vol. X, n° 12, 1974, p. 2111-2124.

[33] N. I. VULPE et K. S. SIBIRSKI, *D.U.*, vol. XIII, n° 5, 1977, p. 803-814.

[34] A. I. YABLONSKI, *D.U.*, vol. VI, n° 10, 1970, p. 1752-1760.

[35] A. I. YABLONSKI, *D.U.*, vol. VII, n° 2, 1971, p. 279-285.

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1979
révisé le 3 janvier 1980.)

Paul CURTZ,
30, rue Saint-Antoine
75004 Paris.