ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. TALAGRAND

Un théorème de théorie de la mesure, lié à deux théorèmes de Mokobodzki

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 2 (1982), p. 391-397
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_2_391_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 15, 1982, p. 391 à 397.

UN THÉORÈME DE THÉORIE DE LA MESURE, LIÉ A DEUX THÉORÈMES DE MOKOBODZKI

PAR M. TALAGRAND

Nous considérons deux espaces lusiniens X et Y, et un noyau markovien P de X dans Y. Soit λ une mesure bornée sur X. Nous construisons sur $X \times Y$ la mesure :

$$\nu = \int_X \lambda(dx)\, \varepsilon_x \otimes P_x,$$

dont la projection sur Y est la mesure $\mu = \lambda P$. En désintégrant la mesure ν par rapport à la projection sur Y, nous construisons un noyau markovien Q de Y dans X, tel que :

$$\nu = \int_Y \mu(dy)\, Q_y \otimes \varepsilon_y \qquad \text{et} \qquad \lambda = \mu Q.$$

Le principal résultat de ce travail est le suivant : il sera démontré dans la section 3.

THÉORÈME 1 (1). — *Si pour presque tout $y \in Y$ la mesure Q_y est diffuse, il existe une mesure θ étrangère à λ telle que θP soit absolument continue par rapport à μ.*

L'hypothèse de l'énoncé peut s'exprimer sans faire appel à la désintégration (Q_y) : elle signifie que la mesure ν ne charge aucun graphe d'application borélienne de Y dans X.

On remarquera d'autre part que seule la structure mesurable de X et Y intervient dans l'énoncé : on pourrait donc remplacer les espaces lusiniens par des espaces métriques compacts (ou par [0, 1], ou par $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ldots$) sans perdre aucune généralité.

Comme illustration du théorème 1, indiquons un théorème qui n'était connu que dans le cas des groupes abéliens (*voir* [3], où la démonstration utilise d'ailleurs des outils puissants, et aussi [4], p. 217, th. 7.5.1).

THÉORÈME 2. — *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable (2), de mesure de Haar à gauche η. Soit H un ensemble de probabilités sur G séparable pour la norme des mesures. Il existe alors une probabilité σ sur G, étrangère à η, telle que $\theta \star \sigma$ soit absolument continue par rapport à η pour tout $\theta \in H$.*

(1) Un résultat plus général a été développé indépendamment par L. Weis.

(2) Cette hypothèse peut être levée assez facilement.

© Gauthier-Villars

Démonstration. — Quitte à remplacer H par une suite dense $(\theta_n)_{n \geqq 1}$, puis à considérer la mesure $\theta = \sum_n 2^{-n} \theta_n$, on se ramène au cas d'une seule mesure θ. Considérons alors le noyau markovien de G dans G ainsi défini : pour tout $y \in G$ et toute fonction borélienne bornée f :

$$P_v f = \int \theta(du) f(uv).$$

Alors pour toute mesure bornée λ, la mesure λP satisfait à :

$$\lambda P(f) = \int f(v) \theta(du) \lambda(dv)$$

et on a donc $\lambda P = \theta \star \lambda$. Si nous prenons pour λ une mesure équivalente à η, λP est équivalente à $\theta \star \eta = \eta$. D'autre part, la mesure $\nu = \int_G \lambda(du) \varepsilon_u \otimes P_u$ sur $G \times G$ est équivalente à $\int_G \eta(du) \varepsilon_u(dx) \otimes P_u(dy)$, dont on vérifie sans peine qu'elle ne charge aucun graphe $\{x = g(y)\}$ d'application borélienne de G dans G. Par conséquent, d'après le théorème 1 il existe une mesure λ' étrangère à λ telle que λP soit absolument continue par rapport à η, et λ' est la mesure σ cherchée.

2. Nous sommes parvenus au théorème 1, en recherchant une démonstration simplifiée du résultat suivant, dû à Mokobodzki [5].

THÉORÈME 3. — *Soit* F *une partie analytique de* $X \times Y$, *et soit* μ *une mesure bornée sur* Y. *Posons pour tout compact* A *de* X :

$$C(A) = \mu(p_Y(F \cap p_X^{-1}(A))).$$

Soit E *l'ensemble des* $y \in Y$ *tels que la coupe* F_y *soit non-dénombrable* ([3]). *Si* E *n'est pas* μ-*négligeable*, *il n'existe aucune mesure* ρ *sur* X *dominant* C *au sens suivant : pour tout compact* $A \subset X$, $\rho(A) = 0 \Rightarrow C(A) = 0$.

Démonstration. — Nous allons supposer qu'une telle mesure ρ existe, et déduire alors du théorème 1 une contradiction.

Tout d'abord, quitte à remplacer Y par un borélien non μ-négligeable, et μ par sa restriction (ce qui ne fait que diminuer C) nous pouvons supposer que F_y est non dénombrable pour tout $y \in Y$. On sait alors (Dellacherie [2]) qu'il existe un noyau markovien Q de Y dans X tel que, pour μ-presque tout y, Q_y soit diffuse et portée par F_y. Nous posons :

$$\nu = \int \mu(dy) Q_y \otimes \varepsilon_y \qquad \text{et} \qquad \lambda = \mu Q (\neq 0).$$

([3]) E est analytique d'après le théorème de Mazurkiewicz-Sierpinsky, dont une démonstration simple figure dans Dellacherie [2].

En désintégrant ν par rapport à λ nous construisons le noyau P de X dans Y tel que :

$$\nu = \int \lambda(dx)\, \varepsilon_x \otimes \mathrm{P}_x \qquad \text{et} \qquad \mu = \lambda\, \mathrm{P}.$$

Comme ν est portée par F, P_x est portée par F_x pour λ presque tout x. Quitte à remplacer X par un sous-ensemble borélien portant λ, ρ par sa restriction, nous pouvons supposer que P_x est portée par F_x pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Soit alors une mesure λ' telle que $\mu' = \lambda' \mathrm{P}$ soit absolument continue par rapport à μ. Construisons $\nu' = \int_{\mathrm{X}} \lambda'(dx)\, \varepsilon_x \otimes \mathrm{P}_x$. Si A est un compact de X tel que $\rho(\mathrm{A}) = 0$, on a :

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}) = 0 = \mu(p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F} \cap p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{A}))), \qquad \text{donc} \quad \mu'(p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F} \cap p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{A}))) = 0,$$

et $p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{F}$ est donc ν'-négligeable. Comme F porte ν', $p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{A})$ est ν'-négligeable aussi, et on a donc $\lambda'(\mathrm{A}) = 0$. Autrement dit, toute mesure λ' telle que $\lambda' \mathrm{P} = \mu' \ll \mu$ est absolument continue par rapport à ρ.

Cela vaut en particulier pour λ, telle que $\lambda\, \mathrm{P} = \mu$. Soit $\overline{\mathrm{X}}$ un borélien non ρ-négligeable, sur lequel λ et ρ sont *équivalentes*, et soient $\bar{\lambda}$, $\bar{\rho}$ les restrictions de λ et ρ à $\overline{\mathrm{X}}$, $\bar{\nu}$ la mesure $\int_{\overline{\mathrm{X}}} \bar{\lambda}(dx)\, \varepsilon_x \otimes \mathrm{P}_x$; $\bar{\mu}$ la mesure $\bar{\lambda}\, \mathrm{P}$ .... Comme $\bar{\nu}$ ne charge aucun graphe, il existe d'après le théorème 1 une mesure λ' portée par $\overline{\mathrm{X}}$, étrangère à $\bar{\lambda}$ (donc à ρ) et telle que $\lambda' \mathrm{P}$ soit absolument continue par rapport à $\bar{\mu}$ (donc à μ). Cela contredit le paragraphe précédent.

3. Nous passons à la démonstration du théorème 1. Tout d'abord nous pouvons supposer que Y est compact et métrisable. Puisque $\lambda = \mu\, \mathrm{Q}$, l'hypothèse sur les Q_y montre que λ est diffuse. D'après le théorème de Lusin, il existe dans X un compact non λ-négligeable homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application $x \to \mathrm{P}_x$ (à valeurs dans l'espace des probabilités sur Y muni de la convergence vague) est continue. Quitte à nous restreindre à ce compact, et à changer de notations, on peut supposer que $\mathrm{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et que l'application $x \to \mathrm{P}_x$ est continue. On appelle *ensemble élémentaire de rang k* toute partie de X obtenue en fixant les k premières coordonnées. On désigne par $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des parties élémentaires de rang k. On va construire par récurrence une suite (k_n) d'entiers, et une suite décroissante d'ensembles A_n, où A_n est réunion d'éléments de $\mathscr{E}_{k_n}$, de sorte que si on pose $h_n(y) = \lambda(\mathrm{A}_n)^{-1}\, \mathrm{Q}_y(\mathrm{A}_n)$, on ait les relations suivantes :

$$0 < \lambda(\mathrm{A}_n) \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{1}$$

$$\| h_n - h_{n-1} \|_2 \leqq 2^{-n}, \tag{2}$$

où la norme est prise dans $\mathrm{L}^2(\mu)$.

On commence la récurrence avec $\mathrm{A}_0 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $k_0 = 0$. Supposons la construction effectuée au rang n. Soit $\varepsilon > 0$ un réel qui sera précisé ultérieurement. Remarquons que si ν est une mesure diffuse sur un espace compact, il existe un nombre $\alpha < 0$ tel que tout ensemble mesurable de diamètre $\leqq \alpha$ ait une mesure $<\varepsilon$. Ainsi, puisque chaque Q_y est diffuse, ainsi que λ, on peut choisir un entier $k_{n+1} > k_n$, tel que les conditions suivantes soient vérifiées, où l'on pose $\mathscr{E} = \{ E \in \mathscr{E}_{k_{n+1}},\ E \subset A_n \}$:

(3) Si B désigne l'ensemble des y tels que : $Q_y(E) \leqq \varepsilon\, Q_y(A_n)$ pour $E \in \mathscr{E}$, on a $\int_{Y \setminus B} h_n \leqq \varepsilon$.

(4) Pour $E \in \mathscr{E}$, on a $\lambda(E) \leqq \varepsilon$.

On va montrer que si ε est assez petit, on peut choisir un sous-ensemble J de $\mathscr{E}$ dont la réunion A_{n+1} vérifie (1) et (2) au rang $n+1$. On va pour cela employer une méthode probabiliste. De façon imagée, on va pour chaque $E \in \mathscr{E}$ tirer à pile ou face, ces tirages étant indépendants, et on va prendre pour A_{n+1} la réunion des $E \in \mathscr{E}$ pour lesquels le tirage a donné pile. La loi faible des grands nombres implique qu'avec une grande probabilité, $\lambda(A_{n+1})$ est proche de $1/2\,\lambda(A_n)$. Pour y fixé, elle implique qu'avec une grande probabilité $Q_y(A_{n+1})$ est proche de $1/2\, Q_y(A_n)$ et donc avec une grande probabilité, que $h_{n+1}(y) = \lambda(A_{n+1})^{-1} Q_y(A_{n+1})$ soit proche de $h_n(y) = \lambda(A_n)^{-1} Q_y(A_n)$. Ainsi, avec une grande probabilité $\| h_{n+1} - h_n \|_2$ sera petit. C'est l'idée qualitative de la méthode.

De façon plus précise, soit η la mesure produit sur $\{0, 1\}^{\mathscr{E}}$. Pour $I \subset \mathscr{E}$, posons $A_I = \bigcup \{ E,\ E \in I \}$. Pour $E \in \mathscr{E}$, posons $f_E(y) = \lambda(A_n)^{-1} Q_y(E)$. On a donc $h_n = \sum_{E \in \mathscr{E}} f_E$. Un calcul élémentaire donne alors :

$$\int \| h_n - 2 \sum_{E \in I} f_E \|_2^2 \, d\eta(I) = \sum_{E \in \mathscr{E}} \int f_E^2 \, d\mu.$$

Pour $E \in \mathscr{E}$, on a $f_E \leqq \varepsilon$ sur B, et d'autre part on a $f_E \leqq \lambda(A_n)^{-1}$, d'où :

$$\int f_E^2 \, d\mu \leqq \int_B + \int_{Y \setminus B} \leqq \varepsilon \int_B f_E \, d\mu + \lambda(A_n)^{-1} \int_{Y \setminus B} f_E \, d\mu.$$

On a donc, puisque $\sum_{E \in \mathscr{E}} f_E = h_n$:

$$\int \| h_n - 2 \sum_{E \in I} f_E \|_2^2 \, d\eta(I) \leqq \varepsilon \int_B h_n \, d\mu + \varepsilon \lambda(A_n)^{-1} = \varepsilon \beta_n, \tag{5}$$

où $\beta_n = \int_B h_n \, d\mu + \lambda(A_n)^{-1}$.

D'autre part, puisque $\lambda(A_I) = \sum_{E \in I} \lambda(E)$, et que $\lambda(E) \leqq \varepsilon$ pour $E \in I$, on a :

$$\int | \lambda(A_n) - 2\lambda(A_I) |^2 \, d\eta(I) = \sum_{E \in \mathscr{E}} \lambda(E)^2 \leqq \varepsilon \sum_{E \in \mathscr{E}} \lambda(E) \leqq \varepsilon. \tag{6}$$

Posons :

$$T = \{ I \subset \mathscr{E};\ \| h_n - 2 \sum_{E \in I} f_E \|_2^2 \leqq 4\varepsilon\beta_n;\ | \lambda(A_n) - 2\lambda(A_I) | \leqq 2\varepsilon \}.$$

D'après (5) et (6), et l'inégalité de Tchebychev, on a $\eta(T) \geqq (3/4)+(3/4)-1>0$, et donc $T \neq \emptyset$. Fixons $I \in T$, et posons $A_{n+1}=A_I$.

On a $|\lambda(A_{n+1})-(1/2)\lambda(A_n)| \leqq \varepsilon$, donc (1) sera satisfaite si $\varepsilon \leqq (1/6)\lambda(A_n)$. D'autre part, on a :

$$h_{n+1}=\frac{\lambda(A_n)}{\lambda(A_{n+1})}\sum_{E\in I} f_E = 2\sum_{E\in I} f_E+\left(\frac{\lambda(A_n)}{\lambda(A_{n+1})}-2\right)\sum_{E\in I} f_E,$$

d'où, puisque $\sum_{E\in I} f_E \leqq h_n$, on a :

$$\| h_n-h_{n+1}\|_2 \leqq \| h_n-2\sum_{E\in I} f_E\|_2+\left(\frac{\lambda(A_n)}{\lambda(A_{n+1})}-2\right)\| h_n\|_2 \leqq 2(\varepsilon\beta_n)^{1/2}+\frac{2}{\lambda(A_n)-\varepsilon}\| h_n\|_2$$

et ceci est inférieur à 2^{-n-1} si ε est assez petit.

La construction est terminée.

Soit θ la suite limite vague des mesures λ_n, où λ_n est la normalisation de la restriction de λ à A_n. Si $A=\bigcap_n A_n$, on a $\theta(A)=1$, $\lambda(A)=0$, donc θ est étrangère à λ.

Pour toute fonction continue g sur Y, on a :

$$\int_X P_x(g)\,d\lambda_n(x)=\lambda(A_n)^{-1}\int_{A_n} P_x(g)\,d\lambda(x)=\lambda(A_n)^{-1}\int g(y)\,Q_y(A_n)\,d\mu(y)=\int gh_n\,d\mu.$$

Puisque la fonction $x \to P_x(g)$ est continue on a, en désignant par h la limite de h_n dans $L^2(\mu)$:

$$\int_X P_x(g)\,d\theta(x)=\int gh\,d\mu,$$

ce qui montre que $\theta P = h\,d\mu$ et prouve le théorème 1.

4. La clef de la preuve du théorème 1 est à chaque étape le choix de A_{n+1}, A_n étant construit. Ce choix a été fait de manière assez triviale. Le résultat suivant utilisera un choix moins trivial.

Il renforce un autre résultat de Mokobodzki [5].

THÉORÈME 5. — *Soit* F *une partie analytique de* $X \times Y$, *et* μ *une mesure bornée sur* Y. *Posons, pour tout compact* A *de* X :

$$C(A)=\mu(p_Y(F\cap p_X^{-1}(A))).$$

Supposons qu'il existe α, $\varepsilon>0$ *et une probabilité* λ *sur* X *telle que* $\lambda(A)\leqq\alpha \Rightarrow \mathscr{C}(A)\leqq\varepsilon$. *Alors pour tout entier* $n \geqq 2/\alpha$ *on a :*

$$\mu(\{y;\ \operatorname{card} F_y \geqq n\}) \leqq a = \varepsilon\left(1+\frac{2}{n\alpha}\right).$$

Ainsi $\mu(\{y;\ F_y \text{ infini}\}) \leqq \varepsilon$.

Dégageons tout d'abord le principe combinatoire que nous utiliserons.

LEMME 6. — *Soient* $N \in \mathbb{N}$, α, $\beta > 0$, $(\lambda_i)_{i \leqq N}$ *des réels avec* $0 \leqq \lambda_i \leqq \alpha/2$ *et* $\sum_{i \leqq N} \lambda_i = 1$, *et soit* $(f_i)_{i \leqq N}$ *une famille de fonctions mesurables sur* Y *telles que* $0 \leqq \lambda_i f_i \leqq \beta$ *pour* $i \leqq N$ *et* $\sum \lambda_i f_i = 1$. *Alors il existe :*

$$J \subset [1, N], \qquad \textit{avec} \quad \sum_{i \in J} \lambda_i \leqq \alpha \quad \textit{et} \quad \mu(\{y;\ \exists i \in J, f_i(y) > 0\}) \geqq \frac{1}{1 + (2\beta/\alpha)}.$$

Preuve. — Il existe $i_1 \in I$ tel que $\beta\mu(\{y; f_{i_1}(y) > 0\}) \geqq \lambda_{i_1} > 0$. En effet, dans le cas contraire on aurait pour tout i :

$$\lambda_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\mu(\{y; f_i(y) > 0\}) < \lambda_i,$$

d'où $\int f_i \, d\mu < 1$, d'où $\int \sum_{i \leqq N} \lambda_i f_i \, d\mu < 1$, ce qui est absurde. En itérant ce procédé, on construit une suite i_k d'entiers distincts de $[1, N]$, tels que si on pose :

$$A_k = \{y;\ \exists p \leqq k, f_{i_p}(y) > 0\},$$

on ait pour tout k :

$$\beta\mu(\{y \notin A_{k-1}; f_{i_k}(y) > 0\}) \geqq \lambda_{i_k}(1 - \mu(A_{k-1})). \tag{7}$$

On appelle r le premier entier tel que $\sum_{p \leqq r} \lambda_{i_p} \geqq \alpha/2$.

On pose $J = \{i_p;\ p \leqq r\}$. On a $\sum_{p \leqq r} \lambda_{i_p} \leqq \sum_{p < r} \lambda_{i_p} + \lambda_r \leqq \alpha$.

D'autre part, par sommation des inégalités (7), pour $1 \leqq k \leqq r$, on a :

$$\beta\mu(A_r) \geqq \Big(\sum_{p \leqq r} \lambda_{i_p}\Big)(1 - \mu(A_{r-1})) \geqq \alpha/2\,(1 - \mu(A_r)),$$

d'où :

$$\mu(A_r) \geqq \frac{1}{1 + (2\beta/\alpha)},$$

C.Q.F.D.

Revenons à la preuve du théorème 5.

Soit $B_1 = \{y;\ \text{card}\, F_y \geqq n\}$. Supposons $\mu(B_1) > a$. Soit d la distance sur X. Il existe alors un nombre $\eta > 0$ tel que si $B = \{y;\ F_y$ contient n points à des distances mutuelles $\geqq 2\eta\}$ on ait $\mu(B) > a$.

Il est facile de voir qu'il existe une partition finie de X en ensembles boréliens de diamètre $\leqq \eta$ qui ont chacun même mesure que leur adhérence. On désigne par $U_1, \ldots, U_s$ ceux qui ont des mesures $>\alpha/2$, par $(X_i)_{i \leqq N}$ les autres et on pose $\tau=\lambda(\bigcup_{i \leqq N} X_i)$. Supposons $\tau>0$. Pour $y \in B$, soit $n(y)$ le nombre de X_i qui rencontrent F_y. On a $n(y) \geqq n-s$. Pour $i \leqq N$, posons :

$$\lambda_i=\tau^{-1} \lambda(X_i),$$

$$f_i(y)=\frac{1}{\lambda_i n(y)} \chi_{\{y;\, F_y \cap X_i \neq 0\}} \quad \text{si} \quad \lambda_i>0, \quad f_i(y)=0 \text{ sinon.}$$

On a :

$$\lambda_i \leqq \frac{\tau^{-1} \alpha}{2}, \qquad \lambda_i f_i \leqq \frac{1}{n-s}, \quad \text{et} \quad \sum_{i \leqq N} \lambda_i f_i=1.$$

Le lemme 4 (où l'on remplace α par $\tau^{-1} \alpha$ et β par $1/(n-s)$) montre alors qu'il existe une partie $J \subset [1, N]$ avec $\sum_{i \in J} \lambda_i \leqq \tau^{-1} \alpha$ et :

$$\mu(\{y \in B;\, \exists i \in J, f_i(y)>0\}) \geqq \mu(B) . \frac{1}{1+(2 \tau/(n-s) \alpha)}>\frac{a}{1+2(n \alpha)^{-1}},$$

en tenant compte du fait que $\tau \leqq 1-(s \alpha/2)$ et $n \geqq 2/\alpha$. Ainsi, si :

$$A=\bigcup_{i \in J} \overline{X}_i, \qquad \text{on a} \quad \lambda(A)=\sum_{i \in J} \tau \lambda_i \leqq \alpha,$$

et :

$$\mathscr{C}(A) \geqq \mu(\{y \in B;\, \exists i \in J, f_i(y)>0\})>\varepsilon,$$

une contradiction. Si $\tau=0$, on conclut de même avec $A=\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{X}_i$.

Remerciements

L'auteur remercie P. A. Meyer d'avoir considérablement amélioré la première rédaction de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Dellacherie, *Appendice à l'exposé de Makobodzki*, [*Séminaire de probabilité*, XII, p. 509 (*Lecture Notes in Math.*, p. 649)].

[2] C. Dellacherie, *Capacités et processus stochastiques, Springer Verlag, 1972.*

[3] C. Graham et A. Maclean, *A Multiplier Theorem for Continuous Measures* (*Studia Math.*, vol. XVI, 1980, p. 213-225).

[4] C. Graham et A. Mc Gehee, *Essay in Commutative Harmonic Analysis*, Springer Verlag, 1979.

[5] G. Mokobodzki, *Ensembles à coupes dénombrables et capacités dominées par une mesure* [*Séminaire de Probabilités*, XII, p. 491 (*Lecture Notes in Math.*, n° 469)].

[6] M. Talagrand, *Somme vectorielle d'ensembles de mesure nulle* (*Ann. Int. Fourier*, vol. XXVI, 1976, p. 137-172).

M. Talagrand
Équipe d'analyse,
Tour 46,
Université Paris-VI,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.

(Manuscrit reçu le 9 juin 1981,
révisé le 12 décembre 1981.)