JEAN-CLAUDE SIKORAV

Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 4 (1986), p. 543-552
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_4_543_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 19, 1986, p. 543 à 552.

UN PROBLÈME DE DISJONCTION PAR ISOTOPIE SYMPLECTIQUE DANS UN FIBRÉ COTANGENT

PAR JEAN-CLAUDE SIKORAV

Introduction

Soit M une variété différentiable fermée; le fibré cotangent $T^* M$ est muni de la 1-forme de Liouville $\lambda_M = p \,.\, dq$, dont la différentielle ω_M définit sa structure symplectique canonique. On regarde M comme plongée dans $T^* M$ par la section nulle.

Soit (φ_t) une isotopie symplectique de $T^* M$; alors, pour tout t, la forme $\alpha_t = (\varphi_t \mid M)^* (\lambda_M)$ est fermée, et (φ_t) est hamiltonienne si et seulement si α_t est exacte pour tout t. D'autre part, si t est assez petit, $\varphi_t(M)$ est un graphe au-dessus de M, donc les zéros de α_t sont les points d'intersection de M et de $\varphi_t(M)$; les zéros du type de Morse (c'est-à-dire tels que l'on ait localement $\alpha_t = df$ où f a une singularité de Morse) sont les points où l'intersection est transverse.

Dans un article précédent de François Laudenbach [LS], le problème de minorer le nombre de points de $\varphi_1(M) \cap M$ est traité dans le cas où (φ_t) est hamiltonienne. Claude Viterbo m'a fait remarquer que la méthode pouvait s'étendre au cas où (φ_t) est symplectique et permettre ainsi d'aborder les conjectures suivantes.

CONJECTURE 1. — *Le nombre de points de* $\varphi_1(M) \cap M$ *est au moins égal à celui des zéros d'une forme fermée cohomologue à* α_1. *En abrégé,* $\# (\varphi_1(M) \cap M) \geqslant c(M; [\alpha_1])$.

CONJECTURE 1′ (*générique*). — *Si* $\varphi_1(M)$ *rencontre* M *transversalement, alors le nombre de points d'intersection est au moins égal au nombre des zéros d'une forme fermée de Morse cohomologue à* α_1 (*une forme fermée est dite de Morse si tous ses zéros sont de Morse*) :

$$\varphi_1(M) \pitchfork M \quad \Rightarrow \quad \# (\varphi_1(M) \cap M) \geqslant c_g(M; [\alpha_1]).$$

CONJECTURE 2. — *Si l'on peut disjoindre* M *d'elle-même par une isotopie symplectique* (φ_t) *de* $T^* M$, *alors il existe une* 1-*forme fermée non singulière cohomologue à* $\alpha_1 = (\varphi_1 \mid M)^* (\lambda_M)$. *En particulier,* M *doit fibrer sur le cercle* (*d'après D. Tischler* [T]).

Bien entendu, la conjecture 2 est une conséquence immédiate de la conjecture 1 ou de la conjecture 1′. La conjecture 1 est assez peu accessible car on ne sait pas grand chose sur $c(\mathrm{M}; [\alpha_1])$ si $[\alpha_1]$ n'est pas nulle (si elle l'est, on verra qu'on est ramené au problème de [LS]), donc nous nous concentrerons sur les conjectures 1′ et 2.

Notons que si $\dim \mathrm{M} \leqq 2$, les conjectures 1, 1′ et 2 sont vraies, le seul cas difficile étant $[\alpha_1]=0$, $\dim \mathrm{M}=2$, qui résulte de [LS]. Pour les dimensions supérieures, le cas où $\dim \mathrm{M} \geqq 6$ est *a priori* plus abordable grâce au théorème du *s*-cobordisme, ainsi que le cas où $\dim \mathrm{M}=3$ et M est irréductible (pour contourner la conjecture de Poincaré).

Le résultat principal de ce travail est le théorème 1, qui associe aux points de $\varphi_1(\mathrm{M}) \cap \mathrm{M}$ les zéros d'une 1-forme fermée Ω sur une certaine variété produit $\mathrm{M} \times \mathrm{V}$, les intersections transverses étant associées aux zéros de Morse. Ce théorème est une conséquence facile du résultat de [LS] convenablement généralisé.

Dans la partie II, nous énonçons, pour une forme de Morse dans une classe de cohomologie rationnelle, des minorations du nombre de zéros analogues aux inégalités de Morse : ces minorations sont dues à S. P. Novikov [N]. Nous donnons aussi un cas où ces inégalités sont optimales, dû à M. C. Farber [F]. Dans la partie III, nous les utilisons pour déduire du théorème 1 une minoration de $\#(\varphi_1(\mathrm{M}) \cap \mathrm{M})$ dans le cas où $\varphi_1(\mathrm{M})$ est transverse à M : *voir* le corollaire 1. Enfin, le résultat de Farber permet de prouver les conjectures 1′ et 2 dans le cas où $\dim \mathrm{M} \geqq 6$ et $\pi_1(\mathrm{M}) \approx \mathbb{Z}$: *voir* les corollaires 2 et 3.

Dans un travail ultérieur, j'essaierai d'étendre la conjecture 2 à des cas plus généraux : il me semble qu'on doit pouvoir la montrer pour $\dim \mathrm{M} \geqq 6$, tout au moins si $\mathrm{Wh}_1(\pi_1 \mathrm{M})=0$ et si $[\alpha_1]$ est rationnelle. Un autre cas qui me paraît abordable est celui où M est de dimension 3 et irréductible, cette fois pour $[\alpha_1]$ quelconque, en utilisant des résultats de Thurston.

Outre Claude Viterbo, je remercie François Laudenbach pour les discussions que nous avons eues sur ces questions.

I. Énoncé et démonstration du résultat principal

LEMME PRÉLIMINAIRE. — *Pour tout entier $k \geqq 1$, il existe une variété V_{4k} munie d'une application $p_{4k}: \mathrm{V}_{4k} \to \mathrm{S}^1$ avec les propriétés suivantes :*

(1) *V_{4k} est fermée et de dimension $4k$;*

(2) *p_{4k} a un unique point critique, et celui-ci est de Morse et d'indice $2k$;*

(3) *p_{4k} induit un isomorphisme de $\pi_1(\mathrm{V}_{4k})$ sur $\pi_1(\mathrm{S}^1) \approx \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Partons de l'exemple favori de Bott d'une fonction de Morse parfaite, c'est-à-dire la fonction f sur $\mathbb{P}^{2k}\mathbb{C}$ définie par

$$f([z_0, z_1, \ldots, z_{2k}]) = \sum_{0}^{2k} j\,|z_j|^2,$$

où un point de $\mathbb{P}^{2k}\mathbb{C} \approx S(\mathbb{C}^{2k+1})/S^1$ est représenté par $(z_0, z_1, \ldots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$ tel que $\sum_0^{2k} |z_j|^2 = 1$. Cette fonction est de Morse, avec un point critique pour chaque indice pair $0, 2, \ldots, 2k, \ldots, 4k$, le point d'indice $2j$ ayant pour valeur critique j. Notant s l'involution de $\mathbb{P}^{2k}\mathbb{C}$ définie par $s([z_0, z_1, \ldots, z_{2k}]) = [z_{2k}, z_{2k-1}, \ldots, z_0]$, on vérifie que l'on a $f \circ s = 2k - f$. On en déduit que, pour le cobordisme élémentaire d'indice $2k$: $W = f^{-1}([k-(1/2), k+(1/2)]$, le bord inférieur $F = f^{-1}(k-(1/2))$ est difféomorphe au bord supérieur $f^{-1}(k+(1/2))$. La variété V_{4k} s'obtient à partir de $W \perp\!\!\!\perp (F \times [1/2, 1])$ en recollant $F \times \{1/2\}$ à $f^{-1}(k+(1/2))$ et $F \times \{1\}$ à $f^{-1}(k-(1/2))$.

L'application p_{4k} est définie par :

$$p_{4k} \mid W = \frac{1}{2}\left(f - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \bmod 1$$

$$p_{4k} \mid F \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] = pr_2 \bmod 1,$$

le recollement se faisant de façon à ce que p_{4k} soit C^∞ (*fig.* 1).

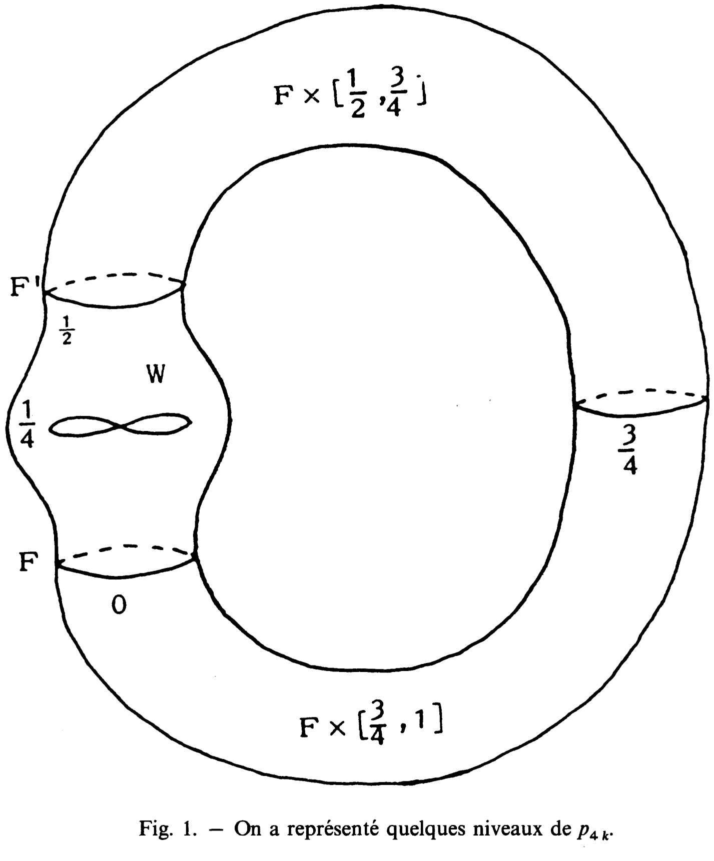

Fig. 1. — On a représenté quelques niveaux de p_{4k}.

La vérification des propriétés (1) et (2) est immédiate. La propriété (3) est laissée en exercice au lecteur.

Remarque. — Si l'on remplace $4k$ par $4k-2$ et $2k$ par $2k-1$, on peut encore construire (V_{4k-2}, p_{4k-2}) vérifiant les analogues de (1) et de (2) : par exemple à partir de $\mathbb{P}^{4k-2}\mathbb{R} \approx S^{4k-3}/S^0$ (pour $k=1$, on obtient la bouteille de Klein). Mais il ne semble pas qu'on puisse en outre obtenir (3). Il est vrai que cette dernière condition ne sera pas utilisée dans ce papier, mais elle pourrait jouer un rôle dans la généralisation éventuelle du corollaire 3 évoquée à la fin de l'introduction.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses de l'introduction, il existe un entier $k \geqq 1$ et, pour tout nombre* A *assez grand, une* 1*-forme fermée* Ω_A *sur* $M \times V_{4k}$, *avec les propriétés suivantes :*

— Ω_A *est cohomologue à* $\alpha_1 \oplus A p_{4k}^* d\theta$;

— *les zéros de* Ω_A *sont en bijection avec les points de* $\varphi_1(M) \cap M$, *les zéros de Morse correspondant aux points d'intersection transversale.*

Démonstration. — Tout d'abord, nous allons « remplacer » l'isotopie symplectique par une isotopie hamiltonienne : précisément, soit (φ_t') l'isotopie de T^*M définie par $\varphi_t'(q, p) = (q, p - \alpha_t(q))$; on a $\varphi_t'^* \lambda_M = \lambda_M - \pi^* \alpha_t$, où $\pi : T^*M \to M$ est la projection canonique, donc (φ_t') est symplectique, ainsi que $(\psi_t) = (\varphi_t \circ \varphi_t')$. En fait (ψ_t) est hamiltonienne; en effet, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_t^* \lambda_M &= \lambda_M + \pi^* \alpha_t + dH_t, \\
\psi_t^* \lambda_M &= \varphi_t'^* (\lambda_M + \pi^* \alpha_t + dH_t) \\
&= \lambda_M - \pi^* \alpha_t + \varphi_t'^* \circ \pi^* (\alpha_t) + d(H_t \circ \varphi_t').
\end{aligned}$$

Comme φ_t' est homotope à l'identité, $\psi_t^* \lambda_M - \lambda_M$ est exacte, donc (ψ_t) est hamiltonienne. D'autre part, on a :

$$\varphi_1(M) \cap M = \psi_1(\varphi_1'^{-1}(M)) \cap M = \psi_1(\alpha_1(M)) \cap M.$$

Dans [LS], on étudie l'intersection de $\psi_1(M)$ et de M au moyen des trajectoires brisées issues de M pour le champ hamiltonien $X_t = \dfrac{d\psi_t}{dt} \circ \psi_t^{-1}$. En faisant une étude tout à fait analogue avec les trajectoires issues de $\alpha_1(M)$, on arrive à la généralisation suivante du résultat de [LS].

PROPOSITION. — *Pour* N *assez grand, il existe un* 2N*-fibré* $E \xrightarrow{\pi} M$ *muni d'une forme quadratique* S_0 *sur les fibres de signature* (N, N), *et une fonction* $S : E \to \mathbb{R}$ *avec les propriétés suivantes :*

— *les zéros de* $\pi^* \alpha_1 + dS$ *sont en bijection avec les points de* $\psi_1(\alpha_1(M)) \cap M$, *les zéros de Morse correspondant aux intersections transversales;*

— S *coïncide avec* S_0 *hors d'un compact.*

Remarque. — Si $[\alpha_1]=0$, cela implique les minorations de [LS] pour $\#(\varphi_1(M)\cap M)$; en particulier, $\varphi_1(M)\cap M$ ne peut être vide.

Moyennant une construction de « suspension » par une forme quadratique S'_0 de signature $(2k-N, 2k-N)$ sur un $(4k-2N)$-fibré E′ tel que $E\oplus E'$ soit trivial, on peut supposer qu'on a :

$E = M\times\mathbb{R}^{4k}$; $\quad e\in E$ est noté (q, v);

$S_0(q, v)=Q(v)$, $\quad$ où $\quad$ Q est une forme quadratique de signature $(2k, 2k)$;

$S = S_0$ hors de $M\times D_K$, $\quad$ où $\quad D_K = \{v: |v| \leqq K\}$.

La propriété 2) de (V_{4k}, p_{4k}) et le lemme de Morse permettent alors de trouver, pour tout A assez grand, une carte $\chi_A: U_A \overset{\approx}{\to} D_{2K}$ au voisinage du point critique de p_{4k}, telle que l'on ait $A\tilde{p} = Q\circ\chi_A+\text{Cte}$, où $\tilde{p}$ est un relevé à $\mathbb{R}$ de $p_{4k}\mid U_A$.

On définit alors $F_A: M\times V_{4k}\to\mathbb{R}$:

$$F_A \mid M\times U_A = (S-S_0)\circ(\mathrm{id}\times\chi_A)$$
$$F_A \mid M\times(V_{4k}\setminus U_A) = 0.$$

C'est une fonction C^∞ car sur $M\times(U_A\setminus\chi_A^{-1}(D_K))$, on a

$$S\circ(\mathrm{id}\times\chi_A) = S_0\circ(\mathrm{id}\times\chi_A).$$

De plus, on a sur $M\times U_A$

$$S_0\circ(\mathrm{id}\times\chi_A) = Q\circ\chi_A\circ\mathrm{pr}_2 = A(\tilde{p}\circ pr_2)+\text{Cte}.$$

Donc, si l'on pose $\Omega_A = (\alpha_1\oplus Ap^*_{4k}\,d\theta)+dF_A$, il vient :

$$\Omega_A \mid M\times U_A = (\mathrm{id}\times\chi_A)^*(\pi^*\alpha_1+dS),$$
$$\Omega_A \mid M\times(V_{4k}\setminus U_A) = \alpha_1\oplus Ap^*_{4k}\,d\theta,$$

ce qui entraîne les propriétés annoncées. □

II. Inégalités de Novikov (*voir* [N] et [F])

Soit $\xi\in H^1(M;\mathbb{R})$ une classe rationnelle, c'est-à-dire $\xi=\lambda\xi_1$ où $\xi_1\in H^1(M;\mathbb{Z})$; si $\xi=0$ on peut prendre $\lambda=1$; sinon on suppose $\lambda>0$ et ξ_1 primitive, ce qui définit λ et ξ_1 de façon unique. Si α est une forme représentant ξ, on a $\alpha=\lambda f^*\,d\theta$ où f est une application de M dans $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $d\theta$ la forme de Lebesgue.

On note $\hat{M}\overset{\pi}{\to}M$ le revêtement infini cyclique associé à $\xi_1=[f]: \pi_1 M\to\pi_1 S^1=\mathbb{Z}$, et $\hat{f}: \hat{M}\to\mathbb{R}$ un relèvement de f. Ensuite, on note Λ l'anneau du groupe $\mathbb{Z}$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = \left\{\sum_{j_0}^{j_1} a_j t^j,\ a_j\in\mathbb{Z}\right\},$$

et $\hat{\Lambda}$ l'anneau complété de Λ pour la topologie t^{-1}-adique :

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}[t][[t^{-1}]] = \left\{ \sum_{-\infty}^{j_1} a_j t^j,\ a_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(Novikov et Farber posent $\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$, mais pour avoir les bons indices dans les inégalités (*) ils doivent prendre pour générateur préféré τ du groupe du revêtement celui qui vérifie $\hat{f} \circ \tau - \hat{f} = -1$, c'est-à-dire faire agir $g \in \pi_1 M$ sur Λ et $\hat{\Lambda}$ comme la multiplication par $t^{-\xi_1(g)}$).

Le morphisme $\xi_1 : \pi_1 M \to \mathbb{Z}$ définit des actions de $\pi_1 M$ sur Λ et $\hat{\Lambda}$: $g \in \pi_1 M$ agit comme la multiplication par $t^{\xi_1(g)}$. On définit ainsi des systèmes de coefficients locaux Λ_ξ et $\hat{\Lambda}_\xi$ (*cf.* [S], p. 282), donc des modules d'homologie $H_*(M; \Lambda_\xi)$ et $H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi)$ dont voici les principales propriétés :

– comme M est compacte et que Λ et $\hat{\Lambda}$ sont nœthériens, ce sont des modules de type fini;

– $H_*(M; \Lambda_\xi) \approx H_*(\hat{M}; \mathbb{Z})$, qui est un Λ-module grâce à l'action de $\mathbb{Z}$ comme groupe du revêtement (*cf.* [M], p. 116 sqq.);

– $H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi) \approx H_*(\hat{M}, \hat{\infty}_-; \mathbb{Z})$ où $\hat{\infty}_-$ est le bout négatif (correspondant à $\hat{f} \to -\infty$) de $\hat{M}$ (*cf.* [M], p. 124-126) : ceci est capital car on voit aisément que la nullité du module de droite est une condition nécessaire pour que ξ puisse être représentée par une forme non singulière;

– $\hat{\Lambda}_\xi = \Lambda_\xi \underset{\Lambda}{\otimes} \hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}$ est plat sur Λ, donc

$$H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi) \approx H_*(M; \Lambda_\xi) \underset{\Lambda}{\otimes} \hat{\Lambda} \approx H_*(\hat{M}; \mathbb{Z}) \underset{\Lambda}{\otimes} \hat{\Lambda}.$$

C'est en fonction de $H_*(M; \xi) \overset{\text{déf}}{=} H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi)$ que Novikov exprime ses inégalités. Précisément, $\hat{\Lambda}$ est un anneau principal, donc tout $\hat{\Lambda}$-module de type fini se décompose ainsi :

$$E \approx \hat{\Lambda}^r \oplus \hat{\Lambda}/\mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{\Lambda}/\mathfrak{a}_q, \qquad 0 \neq \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_q \neq \hat{\Lambda},$$

où r, q et les idéaux $\mathfrak{a}_i$ (facteurs invariants) sont définis de façon unique; $r = r(E)$ est le rang de E et $q = q(E)$ son nombre de torsion. Cela permet de définir, pour $0 \leqq i \leqq \dim M = n$,

$$b_i(M; \xi) = r(H_i(M; \xi))$$
$$q_i(M; \xi) = q(H_i(M, \xi)).$$

Le résultat de Novikov est le suivant :

THÉORÈME. – *Si α est une forme de Morse représentant ξ, alors on peut construire un $\hat{\Lambda}$-complexe $\hat{C}$, libre avec un générateur de degré i par zéro de α d'indice i, et tel que* $H_*(\hat{C}) = H_*(M; \xi)$.

COROLLAIRE. — *Si $c_i(\alpha)$ est le nombre de zéros d'indice i, on a :*

$$(*)\qquad c_i(\alpha) \geqq b_i(M;\, \xi) + q_i(M;\, \xi) + q_{i-1}(M;\, \xi), \qquad \xi = [\alpha].$$

En particulier, on a pour le nombre total de zéros $c(\alpha)$:

$$(**)\qquad c(\alpha) \geqq r(H_*(M;\, [\alpha])) + 2\, q(H_*(M;\, [\alpha])).$$

Remarques. — (1) On peut prouver que si $\xi \neq 0$, on a $H_0(M;\, \xi) = H_n(M;\, \xi) = 0$; les inégalités $(*)$ permettent de retrouver ce résultat puisque ξ peut être représentée par une forme de Morse sans centre.

(2) Si au contraire $\xi = 0$, alors $\hat{M} \approx M \times \mathbb{Z}$ et $H_*(M;\, 0) \approx H_*(M;\, \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \hat{\Lambda}$, d'où $b_i(M;\, 0) = \operatorname{rg} H_i(M;\, \mathbb{Z})$ et $q_i(M;\, 0) =$ nombre de torsion sur $\mathbb{Z}$ de $H_i(M;\, \mathbb{Z})$. On retrouve alors les inégalités de Morse usuelles.

(3) On a aussi, comme corollaire du théorème, les inégalités plus précises :

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} c_i(\alpha) \geqq \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} b_i(M;\, \xi) + q_m(M;\, \xi), \qquad 0 \leqq m \leqq n;$$

ainsi que les égalités :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i(M;\, \xi) = \chi(M;\, \xi) = \chi(M),$$

mais nous ne nous en servirons pas.

Voici maintenant des exemples du calcul de $H_*(M;\, \xi)$ à l'aide du complexe de Novikov.

(1) Si V_{4k} et p_{4k} satisfont aux conditions (1) et (2) du lemme préliminaire de I, alors pour tout $\lambda \neq 0$, le complexe de Novikov $\hat{C}$ associé à $\lambda p_{4k}^* d\theta$ est nul sauf en degré $2k$, et $\hat{C}_{2k} \approx \hat{\Lambda}$; il en résulte :

$$\begin{aligned} H_i(V_{4k};\, [\lambda p_{4k}^* d\theta]) &= 0 \quad \text{si } i \neq 2k \\ &= \hat{\Lambda} \quad \text{si } i = 2k. \end{aligned}$$

(2) Plus généralement, on obtient immédiatement $H_*(M;\, [\alpha])$ si la suite des indices de α est lacunaire. Par exemple, soit W^n un cobordisme élémentaire d'indice i de F à F'; si W' est le cobordisme miroir de W, qui est d'indice $n-i$ et va de F' à F, on définit M par recollements à partir de $W \perp\!\!\perp W' \perp\!\!\perp (F \times I)$ comme l'indique la figure 2.

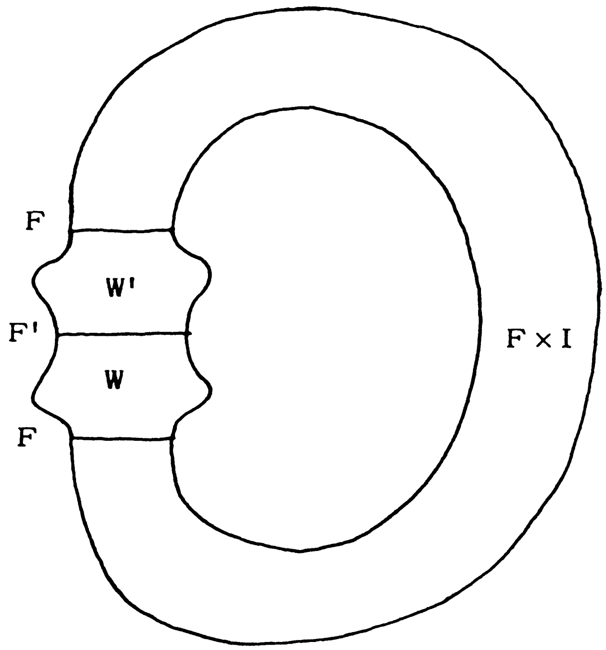

Fig. 2.

Cette variété admet une application $f: M \to S^1$ ayant un point critique d'indice i et un d'indice $n-i$. Si $|(n-i)-i| \geqq 2$ soit $i \notin [(n/2)-1,\ (n/2)+1]$, il en résulte $H_j(M;\ [f^* d\theta])=0$, sauf $H_i = H_{n-i} = \hat{\Lambda}$. Notons que si n est impair, on a $\chi(M) = (-1)^i + (-1)^{n-i} = 0$, donc il n'était pas évident *a priori* que M ne fibrait pas sur le cercle dans la classe d'homotopie de f.

Résultat de Farber sur l'exactitude des inégalités de Novikov (voir [F]).

THÉORÈME. — *On suppose* $\dim M \geqq 6$ et $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$. *Alors, si* $\xi \in H^1(M;\ \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$ *est non nulle, elle est représentée par une forme de Morse* α *telle que l'on ait pour tout* i :

$$c_i(\alpha) = b_i(M;\ \xi) + q_i(M;\ \xi) + q_{i-1}(M;\ \xi).$$

On a donc :

$$c(\alpha) = r(H_*(M;\ \xi)) + 2q(H_*(M;\ \xi)) = c_g(M;\ \xi).$$

COROLLAIRE. — *Si* $H_*(M;\ \xi)=0$, *alors* ξ *est représentée par une forme non singulière.*

Remarque. — L'hypothèse $\xi \neq 0$ est évidemment inutile pour ce corollaire.

III. Minorations du nombre de points d'intersection dans le cas transverse

On revient à l'isotopie (φ_t) et l'on suppose dorénavant que $\varphi_1(M)$ est transverse à M.

La forme $\alpha_1=(\varphi_1 \mid M)^*(\lambda_M)$ n'est peut-être pas de classe rationnelle, mais on peut déformer (φ_t) en ajoutant une petite forme fermée sur M pour qu'elle le devienne, en conservant la transversalité de $\varphi_1(M) \cap M$ donc le nombre de points d'intersection.

On supposera donc maintenant $[\alpha_1]$ rationnelle, ou ce qui revient au même entière. Appliquant le théorème 1, où l'on choisit A entier, et l'inégalité (**), on obtient une minoration de $\#(\varphi_1(M) \cap M)$ en fonction de $H_*(M \times V; [\alpha_1 \oplus Ap^* d\theta])$, où l'on a posé $V=V_{4k}$ et $p=p_{4k}$.

LEMME. — *Les* $\hat{\Lambda}$*-modules* $H_i(M \times V; [\alpha_1 \oplus Ap^* d\theta])$ *et* $H_{i-2k}(M; [\alpha_1])$ *sont isomorphes pour tout i.*

Démonstration. — Notons $[\alpha_1]=\xi_1$, $[Ap^* d\theta]=\xi_2$. Le système de coefficients locaux $\hat{\Lambda}_{\xi_1 \oplus \xi_2}$ sur $M \times V$ est défini par l'action de $\pi_1(M \times V) \approx \pi_1 M \times \pi_1 V$ sur $\hat{\Lambda}$ donnée par : $(g_1, g_2).\lambda=t^{\xi_1(g_1)+\xi_2(g_2)}\lambda$.

Comme $\hat{\Lambda}$ est commutatif, on peut définir le produit tensoriel sur $\hat{\Lambda}$ des coefficients locaux $\hat{\Lambda}_{\xi_1}$ sur M et $\hat{\Lambda}_{\xi_2}$ sur V (voir [S], p. 282) : le module des coefficients est $\hat{\Lambda} \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda} \approx \hat{\Lambda}$, et l'action de $\pi_1 M \times \pi_1 V$ est donnée par

$$(g_1, g_2).(\lambda \otimes \lambda') = t^{\xi_1(g_1)}\lambda \otimes t^{\xi_2(g_2)}\lambda' = t^{\xi_1(g_1)+\xi_2(g_2)}(\lambda \otimes \lambda'),$$

c'est-à-dire qu'on a :

$$\hat{\Lambda}_{\xi_1 \oplus \xi_2} \approx \hat{\Lambda}_{\xi_1} \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}_{\xi_2}.$$

Le lemme résulte alors de la formule de Künneth pour les coefficients locaux (*ibid.*) et du fait que $H_*(V; \xi_2)=H_{2k}=\hat{\Lambda}$.

On déduit immédiatement de ce lemme et de l'inégalité (**), le corollaire suivant du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *On suppose* $[\alpha_1]$ *rationnelle. Alors, si* $\varphi_1(M)$ *est transverse à* M, *on a :*

$$\#(\varphi_1(M) \cap M) \geqq r(H_*(M; [\alpha_1]))+2q(H_*(M; [\alpha_1])).$$

Remarque. — Si $[\alpha_1]$ n'est pas rationnelle, cette inégalité reste vraie si on remplace $[\alpha_1]$ dans le membre de droite par une classe rationnelle assez proche.

En utilisant le résultat de Farber, on en déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 2. — *On suppose* $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$ *et* $\dim M \geqq 6$. *Alors si* $[\alpha_1] \neq 0$ *et si* $\varphi_1(M)$ *est transverse à* M, *le nombre de points de* $\varphi_1(M) \cap M$ *est au moins égal à celui des zéros d'une forme de Morse cohomologue à* α_1.

COROLLAIRE 3. — *On suppose* $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$ *et* $\dim M \geqq 6$. *Alors si* $\varphi_1(M) \cap M=\varnothing$, *il existe une forme non singulière cohomologue à* α_1, donc M fibre sur le cercle.

BIBLIOGRAPHIE

[F] M. C. FARBER, *Exactitude des inégalités de Novikov* [*Funct. Anal. i ego Pril.*, vol. 19, 1985, p. 49-59 (en russe)]; [*Funct. Anal. and its Appl.*, vol. 19, p. 40-49 (en anglais)].

[LS] F. LAUDENBACH et J.-C SIKORAV, *Persistance d'intersection avec la section nulle...* (*Invent. Math.*, vol. 82, 1985, p. 349-357).

[M] J. MILNOR, *Infinite cyclic coverings, in Conf. on the Topology of manifolds* (éditée par J. C. Hocking), Prindle, Weber & Schmidt, 1968, p. 115-133.

[N] S. P. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory* (*Soviet. Math. Dokl.*, vol. 24, n° 2, 1981, p. 222-226).

[S] E. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York, 1966.

[T] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1, (Topology 9, 1970, p. 153-154).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1985,
révisé le 3 juin 1986.)

J.-C. SIKORAV
U.A. n° 1169 du C.N.R.S.,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques, bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex.