ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL BRION

Points entiers dans les polyèdres convexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 4 (1988), p. 653-663
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_653_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 653 à 663.

POINTS ENTIERS DANS LES POLYÈDRES CONVEXES

PAR MICHEL BRION

1. Introduction

Dans un espace vectoriel réel, considérons un polyèdre convexe P dont tous les sommets sont des points d'un certain réseau M. Le but de ce travail est de décrire les points entiers de P, c'est-à-dire l'intersection de P et de M, et en particulier d'énumérer les points entiers dans un multiple nP de P. (Ce problème intervient souvent en combinatoire; *voir* [Sta] pour des exemples). A cet effet, on introduit la «fonction caractéristique» de P, notée $F(P)$: à tout point de M on associe un monôme de Laurent (qui est $x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$ pour le point de coordonnées $m_1, \ldots, m_d$ dans une base de M sur $\mathbf{Z}$); alors $F(P)$ est la somme des monômes associés aux points entiers de P. On définit de même la fonction caractéristique d'un «cône convexe polyédral rationnel» C, comme la somme des monômes associés aux points entiers de C; c'est en fait une fraction rationnelle. Le résultat principal (théorème 2.2) exprime le polynôme de Laurent $F(P)$ comme somme des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P (si s est un tel sommet, le cône tangent en s à P est le plus petit cône de sommet s, qui contient P).

De ce résultat et de ses variantes découle immédiatement une version quantitative du fait classique [Ehr] que le nombre de points entiers dans nP, est un polynôme en n. On retrouve également la «loi de réciprocité» [Mac] qui relie le nombre de points entiers dans nP, et dans l'intérieur relatif de nP. On détermine enfin l'intégrale d'une puissance de forme linéaire sur un polyèdre convexe, d'où découle l'existence de «volumes mixtes généralisés» pour les compacts convexes (3.2).

La démonstration du résultat principal utilise les relations entre polyèdres convexes et variétés toriques (le livre [Oda] est une bonne référence pour cette théorie, commencée par Demazure [Dem]). La fonction caractéristique de P s'interprète comme le caractère de l'espace des sections d'un fibré en droites sur une certaine variété torique. Ce caractère se détermine grâce à des théorèmes d'annulation, et à la «formule de Lefschetz-Riemann-Roch» en K-théorie équivariante [BFQ]. La méthode est analogue à celle de Danilov [Dan] qui interprétait le nombre de points entiers dans nP comme la dimension d'un

Mots-clés: polyèdre convexe, variété torique.
Classification A.M.S.: 11H06, 14L32, 52A25.

espace de sections, et estimait celle-ci par le théorème de Riemann-Roch. Malheureusement, la classe de Todd d'une variété torique n'a pas d'expression connue à l'aide de cycles « naturels »; l'utilisation de résultats de K-théorie équivariante permet de lever cette difficulté.

2. Fonctions caractéristiques de polyèdres et de cônes

2.1. Soit M un réseau dans un espace vectoriel réel V de dimension d. Soit P un *polyèdre convexe entier*, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M. On veut décrire les points entiers de P, *i. e.* $P \cap M$. Pour cela, introduisons l'algèbre $\mathbf{Z}[M]$ du groupe M sur $\mathbf{Z}$: elle a une base $(x^m)_{m \in M}$ telle que $x^m . x^{m'} = x^{m+m'}$ pour tous m, m' dans M. Définissons la *fonction caractéristique* de P par $F(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$.

Un *cône convexe rationnel polyédral* (en abrégé c.c.r.p. ou cône) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites de V, issues de 0 et contenant chacune un point de $M \setminus \{0\}$. Le cône C est dit *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il peut être engendré par n demi-droites, où n est la dimension de C. Si le cône C est saillant, on définit sa fonction caractéristique par

$$F(C) = \sum_{m \in C \cap M} x^m.$$

Cette série a un sens dans une certaine complétion de $\mathbf{Z}[M]$, car C est contenu dans un demi-espace ouvert. En fait, on a un résultat plus précis. Notons $\mathbf{Z}(M)$ le corps des fractions de l'anneau $\mathbf{Z}[M]$.

Proposition. — *Pour tout cône* C *saillant*, $F(C)$ *est un élément de* $\mathbf{Z}(M)$.

Démonstration. — Soit k un corps. Considérons le sous-espace vectoriel A de $k[M] = k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[M]$, engendré par les x^m, $m \in C \cap M$. Puisque C est un cône, A est une sous-algèbre M-graduée de $k[M]$; de plus, le lemme de Gordan [Oda; proposition 1.1] garantit que A est de type fini. Comme $F(C)$ est la série de Poincaré de l'algèbre M-graduée A, la proposition résulte de [Sta; th. 2.3]. ■

Il n'est pas facile de décrire la fraction rationnelle $F(C)$, sauf lorsque C est simplicial. Notons dans ce cas $d_1, \ldots, d_n$ les arêtes de C (où n est la dimension de C). Pour $1 \leqq i \leqq n$, soit m_i l'unique générateur du monoïde $d_i \cap M$; notons P_C l'ensemble des $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n$, où chaque λ_i est dans l'intervalle $[0, 1[$. Puisque $C = \mathbf{R}^+ m_1 + \ldots + \mathbf{R}^+ m_n$, tout élément de $C \cap M$ s'écrit de façon unique sous la forme $m + x_1 m_1 + \ldots + x_n m_n$ où $m \in P_C \cap M$, et les x_i sont des entiers non négatifs. On en déduit immédiatement que

$$F(C) = \Big(\sum_{m \in P_C \cap M} x^m\Big) . \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i})^{-1}.$$

En particulier, lorsque $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est une partie d'une $\mathbf{Z}$-base de M, on voit aussitôt que $P_C \cap M = \{0\}$, d'où

$$F(C) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i})^{-1}.$$

2.2. On va donner uune première détermination de la fonction caractéristique d'un polyèdre convexe entier P.

Soit S l'ensemble des sommets de P. Pour tout $s \in S$, notons C_s le cône engendré par les points $-s+p$, $p \in P$. On peut voir C_s comme le cône tangent en s à P, translaté de façon que son sommet soit en 0; c'est un cône convexe rationnel polyédral.

Le résultat ci-dessous exprime la fonction caractéristique F(P) comme somme de fractions rationnelles.

THÉORÈME :

$$F(P) = \sum_{s \in S} x^s F(C_s).$$

Démonstration. — Au polyèdre P est associée une *variété torique* X avec un fibré en droites L sur X [Oda; th. 2.22]; rappelons-en brièvement une construction. Pour toute face F de P, soit C_F le cône engendré par les $-f+p$ où $f \in F$ et $p \in P$. Notons A_F la sous-algèbre de $k[M]$ (où k est un corps quelconque) ayant pour base les x^m, $m \in C_F \cap M$. On peut recoller les $X_F = \operatorname{Spec} A_F$ pour former une variété algébrique complète X.

Le tore T dont le réseau des caractères est M, opère naturellement dans chaque A_F, donc dans X; en fait, il a une orbite ouverte dans X. Pour toute face F de P, notons I_F le A_F-sous-module de $k(M)$ engendré par les x^{-f}, $f \in F \cap M$. Les I_F se recollent en un faisceau localement libre de rang 1 sur X. Notons L le fibré en droites qui lui est associé. Par construction, l'opération de T dans X se relève à L. Par suite T opère linéairement dans l'espace $H^0(X, L)$ des sections globales de L.

Plus généralement, lorsque T opère linéairement dans un espace vectoriel V de dimension finie, on peut décomposer V en somme directe des $V(m)$, $m \in M$, tels que T opère dans $V(m)$ par multiplication par le caractère m. Donc la représentation de T dans V est déterminée par son *caractère*

$$\operatorname{car} V = \sum_{m \in M} (\dim V(m))\, x^m \in \mathbf{Z}[M].$$

L'application qui, à une représentation de T, associe son caractère, induit un isomorphisme de l'anneau de Grothendieck des représentations de T, noté R(T), sur $\mathbf{Z}[M]$.

D'après [Oda; Lemma 2.3], on a

$$H^0(X, L)(m) = \begin{cases} k & \text{si } m \in P \cap M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $F(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$ s'interprète comme le caractère de $H^0(X, L)$. De plus, L est ample [Oda; Corollary 2.14] donc $H^i(X, L) = 0$ pour tout $i \geqq 1$ [loc. cit.; Corollary 2.9]. Finalement, $F(P)$ est le caractère de la caractéristique d'Euler $\chi(X, L)$.

2.3. Pour terminer la démonstration du théorème 2.2, on va calculer $\chi(X, L)$ grâce à un théorème de « localisation » en K-théorie équivariante, dû à Nielsen [Nie] pour les variétés lisses, et à Baum-Fulton-Quart [BFQ] dans le cas général. Pour tout schéma projectif Y avec action du tore T, introduisons le groupe de Grothendieck $K_T^0(Y)$ [resp. $K_0^T(Y)$] des fibrés vectoriels (resp. faisceaux cohérents) T-linéarisés sur Y; le produit tensoriel fait de $K_0^T(Y)$ un $K_T^0(Y)$-module, et tous les deux sont des modules sur $R(T)$ (le groupe de Grothendieck des représentations de T). La caractéristique d'Euler induit un $R(T)$-morphisme $\chi : K_0^T(Y) \to R(T)$.

Notons $i : Y^T \to Y$ l'inclusion dans Y du sous-schéma des points fixes de T. Voici l'énoncé du corollaire du « théorème de localisation » que nous allons utiliser: pour tout $E \in K_T^0(Y)$, on a l'égalité

$$\chi(Y, E) = \chi(Y^T, (i^* E) . \gamma_Y)$$

où γ_Y est un élément d'un localisé du $R(T)$-module $K_0^T(Y^T)$, défini comme suit.

Si Y est lisse, alors Y^T l'est également. Soit N le fibré conormal de Y^T dans Y. On a

$$\gamma_Y = \Big(\sum_{i \geqq 0} (-1)^i [\Lambda^i N]\Big)^{-1}$$

où $[\Lambda^i N]$ est la classe dans $K_0^T(Y^T)$ de la i-ième puissance extérieure de N.

Dans le cas général, on peut plonger Y de façon T-équivariante dans une T-variété lisse M, et choisir une résolution équivariante $(\mathscr{L}^\cdot)$ de $\mathscr{O}_Y$ par des $\mathscr{O}_M$-Modules localement libres. Alors

$$\gamma_Y = (\alpha^* \gamma_M) . \sum_{i \geqq 0} (-1)^i [\mathscr{H}_i(\mathscr{L}^\cdot \otimes_{\mathscr{O}_M} \mathscr{O}_{M^T})]$$

où $\alpha : Y^T \to M^T$ est l'inclusion, et les $\mathscr{H}_i$ sont les faisceaux d'homologie. Ainsi γ_Y ne dépend que d'un voisinage de Y^T dans Y.

Dans le cas qui nous intéresse, on vérifie sans peine que le schéma X^T est réduit, et indexé par l'ensemble S des sommets de P: à tout $s \in S$ on associe le point de $X_s = \operatorname{Spec} A_s$ formé de l'idéal maximal $\bigoplus_{\substack{m \in C_s \cap M \\ m \neq 0}} k x^m$ de A_s. Par suite, $\chi(X, L)$ est la somme sur les $s \in S$, de termes $(i^* L)_s . \gamma_s$ dans le corps des quotients de $R(T)$. Il suit de la définition de L que $(i^* L)_s = x^s$; il ne reste plus qu'à déterminer γ_s.

Soit $\{m_1, \ldots, m_p\}$ le système générateur minimal du monoïde $C_s \cap M$; d'où un homomorphisme surjectif $k[X_1, \ldots, X_p] \to A_s = \bigoplus_{m \in C_s \cap M} k x^m$, c'est-à-dire une immersion fermée T-équivariante α de X_s dans M, où M est une T-représentation de caractère $x^{-m_1} + \ldots + x^{-m_p}$. Il est clair que $\alpha(s) = 0$, l'origine de M, qui est l'unique point fixe de

T dans M. Le i-ième terme d'une résolution libre équivariante de A_s sur $k[X_1, \ldots, X_p]$, est de la forme $k[X_1, \ldots, X_p] \otimes_k E_i$, où E_i est une représentation de dimension finie de T. Par suite, $\gamma_s = (\alpha^* \gamma_M) . (\sum_{i \geqq 0} (-1)^i E_i)$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{p} (1-x^{m_i})^{-1} . (\sum_{i \geqq 0} (-1)^i \operatorname{car} E_i)$ dans $\mathbf{Z}(M)$. Mais cette dernière expression n'est autre que la série de Poincaré de A_s, c'est-à-dire $F(C_s)$. ■

2.4. Le théorème 2.2 exprime F(P) comme somme de fractions rationnelles associées à certains cônes. Il peut être agréable de n'utiliser que des cônes de type simple (par exemple engendrés par des parties de **Z**-bases de M); c'est l'objectif de ce paragraphe.

Soit V* l'espace vectoriel dual de V; il contient le réseau dual N de M. Pour tout c.c.r.p. C, on définit le *cône dual* $\check{C}$ comme l'ensemble des $u \in V^*$ telles que $u \geqq 0$ sur C; c'est aussi un c.c.r.p., et le dual de $\check{C}$ s'identifie à C.

On considère toujours un polyèdre convexe P, avec S l'ensemble de ses sommets, et $(C_s)_{s \in S}$ ses « cônes tangents ».

THÉORÈME. — *Pour toute subdivision de chaque* $\check{C}_s$ *en cônes* $\sigma_{s,i} (i \in I_s)$, *on a*

$$F(P) = \sum_{s \in S} x^s \sum_{i \in I_s} F(\check{\sigma}_{s,i}).$$

Démonstration. — (On conserve les notations de 2.2.) A une telle subdivision est associée une variété torique complète $\tilde{X}$ munie d'un morphisme birationnel T-équivariant $\pi : \tilde{X} \to X$ [Oda; § 2.3]. On a $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$, et $R^i \pi_* O_{\tilde{X}} = 0$ pour tout $i \geqq 1$ [*loc. cit.;* Corollary 3.9]. A l'aide de la formule de projection et de la suite spectrale de Leray, on en déduit des isomorphismes $H^i(\tilde{X}, \pi^* L) \simeq H^i(X, L)$ pour tout $i \geqq 0$. Par suite F(P) est le caractère de $\chi(\tilde{X}, \pi^* L)$; ensuite la démonstration du théorème 2.2 s'applique sans changement. ■

Remarque. — On peut choisir une subdivision de $\check{C}_s$ en cônes $\sigma_{s,i}$ engendrés par des parties de **Z**-bases de N. Leurs cônes duaux $\check{\sigma}_{s,i}$ sont aussi engendrés par des parties $\Gamma_{s,i}$ de **Z**-bases de M; d'où $F(\check{\sigma}_{s,i}) = \prod_{m \in \Gamma_{s,i}} (1-x^m)^{-1}$ d'après 2.1. Finalement,

$$F(P) = \sum_{s \in S} x^s \sum_{i \in I_s} \prod_{m \in \Gamma_{s,i}} (1-x^m)^{-1}.$$

Avec les notations de la démonstration ci-dessus, cela revient à choisir une variété $\tilde{X}$ *lisse*.

Le cas d'un polyèdre *absolument simple* (c'est-à-dire tous les cônes C_s sont engendrés par des parties de **Z**-bases de M) correspond à celui où X est lisse; on a alors

$$F(P) = \sum_{s \in S} x^s \prod_{m \in \Gamma_s} (1-x^m)^{-1}.$$

2.5. Notons $\mathring{P}$ l'intérieur du polyèdre convexe entier P (on suppose, pour simplifier, que P engendre l'espace vectoriel V). Posons

$$F(\mathring{P}) = \sum_{m \in \mathring{P} \cap M} x^m.$$

Dans ce paragraphe, on va déterminer $F(\mathring{P})$; le résultat peut être considéré comme une généralisation de la « loi de réciprocité » pour les polyèdres (*voir* [Oda; Proposition 2.24] et ses références).

Pour tout c.c.r.p. saillant C, on définit de même son intérieur (relatif) $\mathring{C}$, et sa fonction caractéristique $F(\mathring{C})$. Notons * l'unique involution de $\mathbf{Z}(M)$ telle que $(x^m)^* = x^{-m}$.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône saillant de dimension d; alors*

$$F(\mathring{C}) = (-1)^d F(C)^*.$$

Démonstration. — Soit $A = \bigoplus_{m \in C \cap M} k x^m$ l'algèbre déjà utilisée en 2.1. On sait [Dan; § 1.3] que A est Cohen-Macaulay, avec pour module canonique l'idéal $\omega_A = \bigoplus_{m \in \mathring{C} \cap M} k x^m$, dont la série de Poincaré est $F(\mathring{C})$. Soit $\{m_1, \ldots, m_p\}$ le système générateur minimal du monoïde $C \cap M$; posons $B = k[X_1, \ldots, X_p]$ et choisissons une résolution libre équivariante $(B \otimes_k E_i)_{i \geqq 0}$ du B-module A, comme en 2.3. Le B-module ω_A admet une résolution libre équivariante de i-ième terme $E^*_{d-i} \otimes \omega_B$. Sa série de Poincaré est donc

$$\Big(\sum_{i \geqq 0} (-1)^i \operatorname{car} E^*_{d-i}\Big) \cdot \prod_{j=1}^{p} \frac{x^{m_i}}{1 - x^{m_i}} = (-1)^d \left[\Big(\sum_{i \geqq 0} (-1)^i \operatorname{car} E_i\Big) \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - x^{m_i}}\right)\right]^*$$
$$= (-1)^d F(C)^*. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME. — *Pour tout polyèdre convexe entier* P, *on a*

$$F(\mathring{P}) = \sum_{s \in S} x^s F(\mathring{C}_s).$$

Démonstration. — On reprend les notations de 2.2 et 2.3; notons de plus ω_X le module dualisant de X. D'après [Dan; 7.5.2], $F(\mathring{P})$ est le caractère de $H^0(X, L \otimes \omega_X)$; de plus $H^i(X, L \otimes \omega_X) = 0$ pour tout $i \geqq 1$. Par dualité de Serre, les T-modules $H^i(X, L \otimes \omega_X)$ et $H^{d-i}(X, L^{-1})$ sont duaux pour $0 \leqq i \leqq d$; comme l'involution * provient de la dualité entre T-modules, on a

$$\begin{aligned} F(\mathring{P})^* &= \operatorname{car} H^d(X, L^{-1}) = (-1)^d \operatorname{car} \chi(X, L^{-1}) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in S} (i^* L^{-1})_s \cdot \gamma_s \quad \text{d'après le théorème de localisation} \\ &= (-1)^d \sum_{s \in S} x^{-s} F(C_s) \quad \text{d'après 2.3.} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{F}(\mathring{\mathrm{P}})=(-1)^d \sum_{s\in \mathrm{S}} x^s \mathrm{F}(\mathrm{C}_s)^* = \sum_{s\in\mathrm{S}} x^s \mathrm{F}(\mathring{\check{\mathrm{C}}}_s). \quad \blacksquare$$

Remarque. — De même qu'en 2.4, on montre que pour toute subdivision de $\check{\mathrm{C}}_s$ en cônes $\sigma_{s,\,i}\,(i\in \mathrm{I}_s)$, on a :

$$\mathrm{F}(\mathring{\mathrm{P}})=\sum_{s\in\mathrm{S}} x^s \sum_{i\in \mathrm{I}_s} \mathrm{F}(\mathring{\check{\mathrm{C}}}_{s,\,i}).$$

En particulier, si les $\check{\sigma}_{s,\,i}$ sont engendrés par des **Z**-bases $\Gamma_{s,\,i}$ de M, on a :

$$\mathrm{F}(\mathring{\mathrm{P}})=\sum_{s\in\mathrm{S}} x^s \sum_{i\in \mathrm{I}_s} \prod_{m\in\Gamma_{s,\,i}} \frac{x^m}{1-x^m}.$$

3. Quelques applications

3.1. ÉNUMÉRATION DES POINTS ENTIERS DANS UN POLYÈDRE CONVEXE ENTIER. — On conserve les notations de 2.1 et 2.2; on va déterminer le nombre $f(\mathrm{P})$ des points entiers dans le polyèdre convexe entier P. Pour cela, on aura besoin des *polynômes de Todd* T_q définis par la série génératrice

$$\sum_{q=0}^{\infty} t^q\, \mathrm{T}_q(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{i\geqq 1} \frac{t x_i}{1-\exp(-t x_i)}.$$

Chaque T_q est un polynôme homogène de degré q en $x_1, x_2, \ldots$, symétrique, à coefficients rationnels (qui s'expriment en fonction des nombres de Bernoulli; *voir* [Hir]).

Soit C un cône engendré par une **Z**-base $\Gamma=\{m_1, \ldots, m_d\}$ de M; soit $\lambda\in\mathrm{N}$ (le réseau dual de M) tel que $\langle m_i, \lambda\rangle\neq 0$ pour tout i. Pour simplifier l'énoncé qui va suivre, on pose pour tout $s\in\mathrm{M}$:

$$f(\mathrm{C})(s,\lambda)=\Big(\sum_{p+q=d} (-1)^p \frac{\langle s,\lambda\rangle^p}{p!} \mathrm{T}_q(\langle m_1,\lambda\rangle, \ldots, \langle m_d,\lambda\rangle)\Big).\prod_{i=1}^{d} \langle m_i,\lambda\rangle^{-1}.$$

THÉORÈME. — *Soit* P *un polyèdre convexe entier de dimension d. Choisissons des subdivisions* $(\sigma_{s,\,i})_{i\in \mathrm{I}_s}$ *des* $\check{\mathrm{C}}_s$, *en cônes engendrés par des* **Z**-*bases de* N. *Pour tout* $\lambda\in\mathrm{N}$ *assez général, le nombre de points entiers dans* P *est*

$$f(\mathrm{P})=\sum_{s\in\mathrm{S}}\sum_{i\in \mathrm{I}_s} f(\check{\sigma}_{s,\,i})(s,\lambda).$$

Démonstration. — On sait que

$$\sum_{m\in \mathrm{P}\cap\mathrm{C}} x^m = \sum_{s\in\mathrm{S}}\sum_{i\in \mathrm{I}_s} x^s\, \mathrm{F}(\check{\sigma}_{s,\,i}) \quad \text{dans } \mathbf{Z}(\mathrm{M}).$$

De plus, si $\check{\sigma}_{s,i}$ est engendré par la **Z**-base $\Gamma_{s,i}$ de M, on a:

$$F(\check{\sigma}_{s,i}) = \prod_{m \in \Gamma_{s,i}} (1-x^m)^{-1}.$$

Par suite, pour tout $t \in \mathbf{R}$, et tout $\lambda \in N$, on a:

$$\sum_{m \in P \cap C} \exp t \langle m, \lambda \rangle = \sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} \exp t \langle s, \lambda \rangle . \prod_{m \in \Gamma_{s,i}} \frac{1}{1-\exp t \langle m, \lambda \rangle}.$$

La valeur en $t=0$ du membre de gauche est $f(P)$. En développant en série le membre de droite par rapport à t, on trouve que le coefficient de t^0 est $\sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} f(\check{\sigma}_{s,i})(s, \lambda)$. ■

Corollaire. — *La fonction* $n \to f(nP)$ *est égale à un polynôme* $H(n)$ *pour tout entier* $n \geqq 0$. *On a de plus* (*« loi de réciprocité »*)

$$f(n\mathring{P}) = (-1)^d H(-n)$$

où $f(\mathring{P})$ *est le nombre de points entiers dans l'intérieur de* P.

Démonstration. — La première assertion résulte immédiatement du théorème; il suffit de remarquer que l'ensemble des sommets de nP est nS, et que les « cônes tangents » de P et nP sont les mêmes.

On déduit de 2.5 (avec les notations de la démonstration ci-dessus) que

$$\sum_{m \in \mathring{P} \cap C} \exp t \langle m, \lambda \rangle = \sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} \exp \langle s, \lambda \rangle . \prod_{m \in \Gamma_{s,i}} \frac{1}{1-\exp(-t \langle m, \lambda \rangle)}$$

d'où aussitôt

$$f(\mathring{P}) = \sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} f(C_{s,i})(-s, \lambda)$$

et la seconde assertion. ■

3.2. Intégration d'une fonction polynomiale sur un polyèdre. — Notons dm la mesure de Lebesgue sur le polyèdre P, normalisée de façon que la maille du réseau M soit de volume 1. On va calculer la transformée de Fourier de dm. Subdivisions chaque cône $\check{C}_s$ en cônes *simpliciaux* $\sigma_{s,i} (i \in I_s)$. A tout cône (simplicial) $\check{\sigma}_{s,i}$, associons l'ensemble $\Gamma_{s,i}$ des générateurs entiers de ses arêtes, ainsi que

$$P_{s,i} = \{ \sum_{\gamma \in \Gamma_{s,i}} \lambda_\gamma \gamma, 0 \leqq \lambda_\gamma < 1 \}.$$

Notons $v_{s,i}$ le nombre de points de $P_{s,i} \cap \Gamma$; c'est aussi le volume de $P_{s,i}$, ou la valeur absolue du déterminant des éléments de $\Gamma_{s,i}$.

THÉORÈME. — *Pour tout polyèdre convexe entier* P *de dimension d, on a*

$$\int_{\mathrm{P}} \exp\langle m, \lambda\rangle\, dm = (-1)^d \sum_{s\in \mathrm{S}} \exp\langle s, \lambda\rangle \sum_{i\in \mathrm{I}_s} \frac{v_{s,i}}{\prod_{m\in\Gamma_{s,i}} \langle m, \lambda\rangle}$$

pour tout $\lambda\in\mathrm{N}$ *tel que le membre de droite ait un sens.*

Démonstration. — Soit n un entier positif. Considérons l'expression

$$\varphi(n) = \sum_{m\in(n\mathrm{P})\cap\mathrm{M}} \exp\langle m, \frac{\lambda}{n}\rangle = \sum_{m'\in \mathrm{P}\cap(1/n)\mathrm{M}} \exp\langle m', \lambda\rangle.$$

Comme $\varphi(n)/n^d$ est une « somme de Riemann », on a

$$\varphi(n) \underset{n\to\infty}{\sim} n^d \int_{\mathrm{P}} \exp\langle m, \lambda\rangle\, dm.$$

D'autre part, d'après le théorème 2.4 et le calcul de la fonction caractéristique d'un cône simplicial :

$$\sum_{m\in \mathrm{P}\cap\mathrm{M}} \exp\langle m, \lambda\rangle = \sum_{s\in\mathrm{S}} \exp\langle s, \lambda\rangle \sum_{i\in\mathrm{I}_s} \Big(\sum_{m\in \mathrm{P}_{s,i}\cap\mathrm{M}} \exp\langle m, \lambda\rangle\Big) \prod_{m\in\Gamma_{s,i}} (1-\exp\langle m, \lambda\rangle)^{-1}$$

d'où

$$\varphi(n) = \sum_{s\in\mathrm{S}} \exp\langle s, \lambda\rangle \sum_{i\in\mathrm{I}_s} \left(\sum_{m\in \mathrm{P}_{s,i}\cap\mathrm{M}} \exp\langle m, \frac{\lambda}{n}\rangle\right) \prod_{m\in\Gamma_{s,i}} \left(1-\exp\langle m, \frac{\lambda}{n}\rangle\right)^{-1}.$$

Le théorème s'en déduit aussitôt. ■

En développant en série $\exp\langle m, \lambda\rangle$, on obtient le

COROLLAIRE 1. — *Pour tout entier* $n\geqq 0$, *on a*

$$\int_{\mathrm{P}} \langle m, \lambda\rangle^n\, dm = \frac{(-1)^d}{(n+1)(n+2)\dots(n+d)} \sum_{s\in\mathrm{S}} \langle s, \lambda\rangle^{n+d} \sum_{i\in\mathrm{I}_s} \frac{v_{s,i}}{\prod_{m\in\Gamma_{s,i}} \langle m, \lambda\rangle}.$$

Puisque les fonctions $m\to\langle m, \lambda\rangle^n$ engendrent l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur V, on a ainsi une formule d'intégration d'une fonction polynomiale sur un polyèdre convexe (rationnel). Le cas de la dimension 2 est particulièrement simple : en effet tous les cônes C_s sont alors simpliciaux. Soient a_s , b_s les générateurs entiers des arêtes de C_s; notons v_s l'aire du parallélogramme construit sur a_s et b_s. Finalement

$$\int_{\mathrm{P}} \langle m, \lambda\rangle^n\, dm = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{s\in\mathrm{S}} \langle s, \lambda\rangle^{n+2} \frac{v_s}{\langle a_s, \lambda\rangle\langle b_s, \lambda\rangle},$$

ce qu'on peut bien sûr prouver de façon élémentaire.

Le cas particulier $n=0$ du corollaire 1 est amusant.

COROLLAIRE 2. — *Le volume de* P *est égal à*

$$\frac{(-1)^d}{d!}\sum_{s\in S}\langle s,\lambda\rangle^d\sum_{i\in I_s}\frac{\operatorname{card}(P_{s,i}\cap M)}{\prod\limits_{m\in\Gamma_{s,i}}\langle m,\lambda\rangle},$$

pour tout $\lambda\in N$ *assez général.*

Considérons maintenant deux polyèdres convexes entiers P et Q, avec pour ensembles de sommets respectifs S et T. Choisissons une subdivision de V* en cônes simpliciaux $\sigma_i (i\in I)$ plus fine que les deux subdivisions $(\check{C}_s)_{s\in S}$ et $(\check{C}_t)_{t\in T}$. Le corollaire 2 fournit alors une expression du volume de $\lambda P+\mu Q$ pour tous les nombres rationnels λ et μ, qui est clairement polynomiale en λ et μ. On en déduit (*voir* [Tei]) l'existence de *volumes mixtes* pour les compacts convexes de V; on peut les expliciter pour les polyèdres convexes rationnels, grâce à une version « polarisée » du corollaire 2.

Le résultat suivant se démontre de façon analogue.

COROLLAIRE 3. — *Quels que soient les compacts convexes* P *et* Q *de* V, *et la fonction polynomiale f sur* V, *de degré n, l'expression* $\int_{\lambda P+\mu Q} f\,dm$ *est un polynôme en* λ *et* μ, *de degré au plus* $n+d$.

Ce corollaire signifie qu'il existe des « volumes mixtes généralisés », qui sont peut-être des objets intéressants (les inégalités classiques sur les volumes mixtes se généralisent-elles à ce contexte?).

Remarque. — Soient X une variété torique projective lisse sur **C**, et L un fibré en droites très ample sur X (d'où une structure kählérienne sur X). A ces données est associée une application moment $\mu: X\to V$, dont l'image est un polyèdre convexe entier Γ [Ati]. La variété X est munie d'une mesure canonique dx (provenant de la forme de Kähler) et la mesure image de dx par μ est la mesure de Lebesgue sur Γ [Ati § 5]. D'après un résultat de Duistermaat et Heckman [DH], la transformée de Fourier de cette mesure image est donnée par

$$\int_\Gamma \exp\langle m,\lambda\rangle\,dm=\int_X \exp\langle\mu(x),\lambda\rangle\,dx=\sum_{x\in X^T}\frac{\exp\langle\mu(x),\lambda\rangle}{\det_x\lambda}$$

où X^T est l'ensemble (fini) des points fixes de T, et $\det_x\lambda$ est le déterminant de l'action infinitésimale de $\lambda\in N$ (vu comme sous-groupe à un paramètre de T) dans l'espace tangent en x à X. En explicitant le membre de droite de cette égalité, on retrouve le théorème 3.2. De plus, le volume de Γ s'interprète comme le degré du fibré L; Atiyah en a déduit une jolie démonstration d'un théorème de Koushnirenko [Ati; § 3].

Tout ceci n'est pas une coïncidence: le résultat de Duistermaat et Heckman sur les variétés algébriques avec action de tore, se déduit du théorème de localisation en K-théorie équivariante, et a des liens étroits avec des généralisations du polynôme d'Hilbert-Samuel. L'auteur espère revenir là-dessus ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[Ati] M.-F. ATIYAH, *Angular Momentum, Convex Polyhedra, and Algebraic Geometry* (*Proc. Edinburg Math. Soc*, vol. 26, 1983, p. 121-138).

[BFQ] P. BAUM, W. FULTON et G. QUART, *Lefschetz-Riemann-Roch for Singular Varieties* (*Acta Mathematica*, vol. 143, 1979, p. 193-211).

[Dan] V. I. DANILOV, *The Geometry of Toric Varieties* (*Russian Math. Surveys*, vol. 32, 1978, p. 97-154).

[Dem] M. DEMAZURE, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona* (*Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4), 3, 1970, p. 507-588).

[DH] J.-J. DUISTERMAAT et G. HECKMAN, *On the Variation in the Cohomology Class of the Symplectic Form of the Reduced Phase Space* (*Invent. Math.*, vol. 69, 1982, p. 259-268).

[Ehr] E. EHRART, *Sur un problème de géométrie diophantienne. I, Polyèdres et réseaux* (*J. Reine Angew. Math.*, vol. 226, 1967, p. 1-29).

[Hir] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie* (*Ergeb. Math. Grenzgeb*, 1962).

[Mac] I. G. MACDONALD, *Polynomials Associated with Finite Cell-Complexes* (*J. London Math. Soc.*, vol. 4, 1973, p. 181-192).

[Nie] H. A. NIELSEN, *Diagonalizably Linearized Coherent Sheaves* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 102, 1974, p. 85-97).

[Oda] T. ODA, *Convex Bodies and Algebraic Geometry* (*Ergeb. Math. Grenzgeb.*, vol. 15, 1988).

[Sta] R. P. STANLEY, *Combinatorics and Commutative Algebra* (*Progr. Math.*, vol. 41, 1983).

[Tei] B. TEISSIER, *Variétés toriques et polytopes* (*Exposé n° 565 au séminaire Bourbaki*, 1980-1981).

(Manuscrit reçu le 20 juin 1988,
révisé le 6 septembre 1988).

M. BRION,
Institut Fourier,
Laboratoire de Mathématiques,
Grenoble.