ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

THIERRY BOUCHE

Inégalités de Morse pour la d''-cohomologie sur une variété holomorphe non compacte

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 4 (1989), p. 501-513

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_501_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 501 à 513.

INÉGALITÉS DE MORSE POUR LA d''-COHOMOLOGIE SUR UNE VARIÉTÉ HOLOMORPHE NON COMPACTE

PAR THIERRY BOUCHE

0. Introduction

Soit X une variété analytique de dimension complexe n, L un fibré holomorphe en droites hermitien de classe $\mathscr{C}^\infty$ au-dessus de X, E un fibré holomorphe vectoriel de rang r au-dessus de X. Soit $\mathrm{D}=\mathrm{D}'+\mathrm{D}''$ la connexion canonique de L, $c(\mathrm{L})=\mathrm{D}^2$ la forme de courbure associée. Nous ferons l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes sur la géométrie de X et L, m et l étant des entiers $\geqq 1$:

• Hypothèse $\mathrm{P}(m, l)$: X est fortement m-convexe [*i. e.* il existe une fonction exhaustive ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, telle que $id'd''\psi$ ait au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors d'un compact K] et $ic(\mathrm{L})$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors de K.

• Hypothèse $\mathrm{Q}(m)$: X est kählérienne hors d'un compact K, et faiblement 1-complète (*i. e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, exhaustive et plurisousharmonique), en outre, la courbure de L est semi-positive de rang supérieur à $(n-m+1)$ sur $\mathrm{X}\setminus\mathrm{K}$.

Soit q un entier $\geqq 0$, nous notons $\mathrm{X}(q)$ l'ensemble des points de X où $ic(\mathrm{L})$ est non dégénérée et admet exactement q valeurs propres négatives, $\mathrm{X}(\geqq q)=\bigcup_{\nu\geqq q}\mathrm{X}(\nu)$. Nous notons également $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathrm{E}\otimes\mathrm{L}^k)$ le q-ième groupe de cohomologie de Dolbeault à valeur dans $\mathrm{E}\otimes\mathrm{L}^k$, où L^k est la puissance tensorielle k-ième du fibré L. Nous démontrons les deux thèoremes suivants :

THÉORÈME 0.1. — *Soient* $m, l\geqq 1$. *Si* X *et* L *vérifient* $\mathrm{P}(m, l)$, *on a, pour tout* $q\geqq m+l-1$

(1) *Inégalités de Morse asymptotiques :*

$$\dim \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathrm{E}\otimes\mathrm{L}^k)\leqq r\frac{k^n}{n!}\int_{\mathrm{X}(q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(\mathrm{L})\right)^n+o(k^n).$$

Mots clés : inégalités de Morse, d''-cohomologie, fibré linéaire hermitien, variété q-convexe, fonction q-convexe, opérateur de Monge-Ampère.

Classification A.M.S. : 32 L 10, 32 F 10.

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim \mathrm{H}^{\nu}(\mathrm{X}, \mathrm{E}\otimes \mathrm{L}^{k})\leqq r\frac{k^n}{n!}\int_{\mathrm{X}(\geqq q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(\mathrm{L})\right)^n+o(k^n).$$

THÉORÈME 0.2. — *Soit* $m\geqq 1$. *Si* X *et* L *vérifient l'hypothèse* $\mathrm{Q}(m)$, *on a, pour tout* $q\geqq m$ *:*

(1) *Inégalités de Morse asymptotiques :*

$$\dim \mathrm{H}^{n,\,q}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{k})\leqq \frac{k^n}{n!}\int_{\mathrm{X}(q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(\mathrm{L})\right)^n+o(k^n).$$

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim \mathrm{H}^{n,\nu}(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{k})\leqq \frac{k^n}{n!}\int_{\mathrm{X}(\geqq q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(\mathrm{L})\right)^n+o(k^n).$$

Notre méthode utilise pour une part les techniques des articles [D1] et [D2] de Jean-Pierre Demailly : nous majorons la dimension des espaces propres du laplacien antiholomorphe à l'aide du théorème de répartition spectrale de [D1], appliqué à un ouvert relativement compact de X, contenant K; on utilise aussi pour cela l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [D2] à l'extérieur de cet ouvert. De cette façon, nous obtenons les inégalités des théorèmes 0.1 et 0.2 pour les groupes de cohomologie à croissance qui s'identifient au premier espace propre du laplacien antiholomorphe.

Comme application de ces résultats, nous démontrons une estimation pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe. Notre résultat généralise l'estimation obtenue récemment par Siu pour les domaines m-convexes d'une variété de Stein [S], avec une démonstration différente plus directe.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Demailly, dont les conseils m'ont aidé à mettre au point la rédaction définitive de ce travail.

I. Estimation des premières fonctions propres de Δ'' hors d'un compact

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Soit ω, une métrique hermitienne complète sur X (définie ultérieurement), $\langle .,\ .\rangle$ l'accouplement sesquilinéaire canonique des formes et $\|.\|$ la norme associée. Que nous soyons dans l'une ou l'autre des hypothèses $\mathrm{P}(m, l)$, $\mathrm{Q}(m)$, nous noterons ψ la fonction d'exhaustion $\mathscr{C}^{\infty}$ et $\mathrm{X}_c=\{x\in \mathrm{X} : \psi(x)<c\}$ la famille croissante d'ouverts relativement compacts associée, $a_0<a_1<a_2$, des réels tels que $\mathrm{K}\subset \mathrm{X}_a$. Λ est l'adjoint de l'opérateur de multiplication extérieur par ω, $\delta=\delta'+\delta''$ l'adjoint formel de D. Si A et B sont deux endomorphismes de degré resp. δ_1 et δ_2 du module gradué $\mathscr{C}^{\infty}_{\bullet}(\mathrm{X}, \mathrm{E}\otimes \mathrm{L})=\mathscr{C}^{\infty}(\Lambda^{\bullet}\mathrm{T}^*\mathrm{X}\otimes \mathrm{E}\otimes \mathrm{L})$, on pose $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]=\mathrm{AB}-(-1)^{\delta_1\delta_2}\mathrm{BA}$. On définit alors $\Delta'=[\mathrm{D}', \delta']$, $\Delta''=[\mathrm{D}'', \delta'']$ les laplaciens holomorphe et antiholomorphe. Enfin, $\mathscr{C}$ est

le cône des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ convexes, croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ et, si $\chi \in \mathscr{C}$, on note L_χ le fibré hermitien obtenu à partir de L en multipliant la métrique de chaque fibre par le poids $e^{-\chi \circ \psi}$.

Soit $L^2_{n,\,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ l'espace des (n, q)-formes sur $(L_\chi)^{\otimes k}$ de carré intégrable par rapport à l'élément de volume $dV = \omega^n/n!$. D'' définit sur cet espace un opérateur dont l'adjoint hilbertien est δ'' — cela car la métrique ω est complète, en vertu du lemme de Hörmander sur la densité des formes à support compact dans Dom (D'') pour la norme du graphe (*cf.* [H]). Par conséquent, $\Delta'' = D''\delta'' + \delta'' D''$ est son propre adjoint hilbertien. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, notons $\mathscr{H}^{n,\,q}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres de Δ'', pour les valeurs propres $\leqq k\lambda$ dans $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$. Pour mener de front les démonstrations des théorèmes 0.1 et 0.2, nous ferons la convention suivante sur E : $E = \mathbf{C}$ (fibré hermitien trivial) si X et L vérifient $Q(m)$. Sous l'hypothèse $P(m, l)$, nous démontrerons en fait le théorème 0.1 pour les groupes $H^{n,q}(X, E \otimes L^k)$, l'énoncé que nous en avons donné sera retrouvé en remplaçant E par le fibré $E' = \Lambda^n TX \otimes E$ car

$$H^{n,q}(X, E \otimes L^k) \simeq H^q(X, \Lambda^n T^*X \otimes E \otimes L^k).$$

PROPOSITION 1.1. — *Si* X *et* L *vérifient l'une ou l'autre des hypothèses* $P(m, l)$ *ou* $Q(m)$, *si* $q \geqq m$, *si* X *est muni d'une métrique complète, et si* χ *est suffisamment croissante, on a l'isomorphisme :*

$$\mathscr{H}^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi) \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$$

où le groupe de droite désigne le groupe de cohomologie à croissance *associé aux métriques de* X *et de* $E \otimes L^k_\chi$.

En effet, nous avons la décomposition en somme orthogonale de ker D'' : $\ker D'' = \ker \Delta'' \oplus \overline{\operatorname{Im} D''}$. Or, nous savons que $\ker D''/\overline{\operatorname{Im} D''} \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ est de dimension finie si χ est à croissance assez forte (la méthode du théorème de finitude de [D3] s'applique ici sans difficulté). Par utilisation du théorème de l'application ouverte, il est facile d'en déduire que Im D'' est fermée et que $\ker D''/\operatorname{Im} D'' \simeq \ker \Delta''$. ■

Le lemme suivant exprime intuitivement le fait que les éléments de $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ sont assez précisément connus par leur restriction à un compact assez grand, si λ reste petit.

LEMME 1.2. — *Il existe* k_0, *un entier positif, et* $\chi_0 \in \mathscr{C}$ *tels que, si* $h \in \mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ *avec* $\lambda < 1/4$, *on ait :*

$$\int_{X \setminus X_a} \| h \|^2 \leqq \int_{X_a} \| h \|^2$$

dès que $a > a_1$, $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, *et* $k \geqq k_0$.

Ce résultat est une conséquence d'une étude assez poussée de la courbure de $E \otimes L^k_\chi$, combinée avec l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne de [D2], que nous rappelons ci-dessous :

PROPOSITION 1.3. — *Soient* $\tau=[\Lambda, d'\omega]$, τ^* *son adjoint formel*, $\Delta'_\tau=[D'+\tau, \delta'+\tau^*]$, $T_\omega=[\Lambda, [\Lambda, (i/2)\, d' d''\omega]]-[d'\omega, (d'\omega)^*]$; *alors*

$$\Delta''=\Delta'_\tau+[ic(E\otimes L_\chi^k), \Lambda]+T_\omega. \tag{1.5}$$

Démonstration du lemme 1.2. — (1) Supposons que X *vérifie* $P(m, l)$. — $id'd''\psi$ ayant $(n-m+1)$ valeurs propres strictement positives hors de $K\subset X_{a_0}$, il existe une métrique ω_1, sur X, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que les valeurs propres ε_j de $id'd''\psi$ par rapport à ω_1 vérifient sur $X\diagdown X_{a_0}$: $-1/2m\leqq\varepsilon_j\leqq 1, j=1, \ldots, n$, et $\varepsilon_m=\ldots=\varepsilon_n=1$, les ε_j étant rangées par ordre croissant. On peut alors choisir $\rho\in\mathscr{C}$, suffisamment croissante pour que $\omega=e^{\rho\circ\psi}\omega_1$ soit une métrique complète sur X. Par rapport à ω, les valeurs propres de $id'd''\psi$ sont $\varepsilon'_j=e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j$.

D'autre part, soit $\chi\in\mathscr{C}$;

$$\begin{aligned} ic(L_\chi) &= ic(L)+id'd''\chi\circ\psi \\ &= ic(L)+i(\chi''\circ\psi)\, d'\psi\wedge d''\psi+i(\chi'\circ\psi)\, d'd''\psi \\ &\geqq ic(L)+i(\chi'\circ\psi)\, d'd''\psi. \end{aligned}$$

Soient λ_j, α_j les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ et $ic(L)$, respectivement, par rapport à ω, rangées par ordre croissant. Nous avons :

$$\alpha_n\geqq\ldots\geqq\alpha_1$$

et

$$\lambda_j\geqq\alpha_1+\chi'\circ\psi\, e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j.$$

Soit $u\in\mathscr{C}^\infty_{n,\,q}(X, E\otimes L^k_\chi)$, un calcul explicite donne :

$$\begin{aligned} \langle [ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle &\geqq (\lambda_1+\ldots+\lambda_q)\|u\|^2 \qquad (\textit{cf. } [\text{D2}] \text{ par exemple}) \\ &\geqq [(q\alpha_1)+\chi'\circ\psi\, e^{-\rho\circ\psi}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_q)]\|u\|^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_q\geqq-((m-1)/2m)+1\geqq 1/2$ si $q\geqq m$.

Soit χ_0, une fonction de $\mathscr{C}$, supposée nulle sur $\psi(K)$, choisie assez croissante pour que

$$\chi'_0\circ\psi\geqq[1+2|[ic(E), \Lambda]|_\omega+2|T_\omega|_\omega+|2n\alpha_1|]e^{\rho\circ\psi}$$

sur $X\diagdown X_{a_0}\subset X\diagdown K$; alors, si $\chi\in\chi_0+\mathscr{C}$ (dans la suite, nous choisirons $\chi-\chi_0$ nulle sur $]-\infty, a_0[$), $\chi'\geqq\chi'_0$, et, par conséquent, d'après (1.3)

$$\begin{aligned} \langle\Delta''u, u\rangle &= \langle\Delta'_\tau u, u\rangle+k\langle[ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle+\langle[ic(E), \Lambda]u, u\rangle+\langle T_\omega u, u\rangle \\ &\geqq\langle\Delta'_\tau u, u, \rangle+\frac{k}{2}\|u\|^2 \qquad \text{sur} \quad X\diagdown X_{a_0} \end{aligned}$$

donc

$$(1.5)\qquad \int_{X}\langle \Delta'' u, u\rangle \geqq \frac{k}{2}\int_{X\setminus X_{a_0}}\|u\|^2 - k\,C_1\int_{X_{a_0}}\|u\|^2$$

Comme $a_1 > a_0$, il existe $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(X, [0, 1])$, telle que $\varphi(X_{a_0})=\{0\}, \varphi(X\setminus X_{a_1})=\{1\}$. Soit $\lambda<1/4$, $h\in\mathscr{H}^{n,\,q}(\lambda)$; le lemme 1.2 va résulter de la minoration (1.5) appliquée à φh. Pour tout $\varepsilon>0$, en posant $C=1+(1/\varepsilon)$, on a la majoration : pour $(x, y)\in\mathbf{R}^2$, $(x+y)^2\leqq(1+\varepsilon)x^2+Cy^2$. Donc

$$(1.6)\qquad \int_{X}\langle \Delta''(\varphi h), (\varphi h)\rangle = \int_{X}(\|D''\varphi\wedge h+\varphi D'' h\|^2+\|d'\varphi \lrcorner h+\varphi\delta'' h\|^2)$$
$$\leqq (1+\varepsilon)\int_{X}(\|D'' h\|^2+\|\delta'' h\|^2)+C_2\int_{X}\|h\|^2$$
$$\leqq (k\lambda(1+\varepsilon)+C_2)\int_{X}\|h\|^2$$

et

$$(1.5)\qquad \Rightarrow\quad k\int_{X\setminus X_{a_1}}\|h\|^2\leqq k\lambda\left(1+\varepsilon+\frac{C_3}{k}\right)\int_{X}\|h\|^2$$
$$\Rightarrow\quad k\int_{X\setminus X_{a_1}}\|h\|^2\leqq\frac{2\lambda(1+2\varepsilon)}{1-2\lambda(1+2\varepsilon)}\int_{X_{a_1}}\|h\|^2$$

si $k_0\geqq C_3/\varepsilon$, une fois ε choisi de sorte que $\lambda(1+2\varepsilon)<1/4$, le lemme 1.2 est démontré. ∎

(2) *Supposons que* X *vérifie* Q(m). — Soit α, une métrique hermitienne, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, kählérienne sur $X\setminus K$, où $ic(L)$ est semi-positive; soit $\varphi\in\mathscr{C}$, nous posons :

$$\omega = ic(L_\chi)+e^{-\rho\circ\psi}\alpha$$

LEMME 1.7. — *Pour tout* $\chi_1\in\mathscr{C}$, $\chi_1\not\equiv 0$, *si* $\chi\in\chi_1^2+\mathscr{C}$, *alors* ω *est complète.*

En effet,

$$\omega\geqq id'd''(\chi_1^2\circ\psi)=2i(\chi_1\circ\psi.\chi_1''\circ\psi\, d'd''\psi+(\chi_1'\circ\psi)^2 d'\psi\wedge d''\psi)$$
$$\geqq 2i d'(\chi_1\circ\psi)\wedge d''(\chi_1\circ\psi).$$

Ainsi, si χ_1 est une fonction de $\mathscr{C}$ non bornée (*i.e.* non nulle), $\chi_1\circ\psi$ est une fonction exhaustive sur X et $|\chi_1\circ\psi(x)-\chi_1\circ\psi(y)|$ minore la distance géodésique $\delta(x, y)$. ∎

Notons λ_j(resp. λ_j', λ_j''), les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ [resp. $ic(L_\chi)$, $ic(L)$] par rapport à la métrique ω(resp. α, α), rangées par ordre croissant, on a les relations $\lambda_j'\geqq\lambda_j''$ par le minimax, donc

$$\lambda_j=\frac{\lambda_j'}{\lambda_j'+e^{-\rho\circ\psi}}\geqq\frac{\lambda_j''}{\lambda_j''+e^{-\rho\circ\psi}}\cdot$$

L'hypothèse sur le rang de $ic(\mathrm{L})$ signifie que $\lambda''_m > 0$ sur $X \setminus X_{a_0}$. Choisissons ρ suffisamment grand pour que $e^{-\rho\circ\psi} \leqq \lambda''_m/2$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

Soit $u \in \mathscr{C}^{\infty}_{n,q}(X, L^k_\chi)$; la minoration (1.4) s'écrit ici

$$(1.8) \qquad \langle [ic(L_\chi), \Lambda] u, u \rangle \geqq \lambda_m \| u \|^2 \quad \text{si} \quad q \geqq m$$

car $\forall j = 1, \ldots, n$, $\lambda_j \geqq 0$, et $\lambda_m \geqq (\lambda''_m / \lambda''_m + e^{-\rho\circ\psi}) \geqq 2/3$.

1.9 LEMME. — *ρ étant fixée, il existe $\chi_0 \in \chi_1^2 + \mathscr{C}$, telle que, si $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$,*

$$| T_\omega |_\omega \leqq \frac{1}{6} \quad \textit{sur} \quad X \setminus X_{a_0}$$

Ceci est démontré dans [D3] (lemme 1.5), il suffit de voir que comme $d\alpha = 0$, T_ω ne fait apparaître que des dérivées de $\rho \circ \psi$, que l'on peut contenir par la croissance de $\chi \circ \psi$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

L'inégalité (1.5) est une conséquence immédiate de l'inégalité (1.8) et du lemme 1.9 grâce à l'identité 1.3. La fin de la démonstration du lemme 1.2, dans ce cas, est donc similaire au cas précédent. ■

II. Application du théorème de répartition spectrale et conclusion

Nous notons $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres du laplacien antiholomorphe Δ'' sur X_{a_2}, avec conditions de Dirichlet au bord, pour les valeurs propres $\leqq k\lambda$; soit $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E \otimes L^k_\chi)$ l'adhérence dans $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ de l'espace des (n, q)-formes $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans X_{a_2}, et soit P_λ le projecteur orthogonal de $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E \otimes L^k_\chi)$ sur $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$. Soit κ une fonction tronquante $\mathscr{C}^\infty$ nulle sur $X \setminus X_{a_2}$, valant 1 sur X_{a_1}. On note $C = 4 \sup\limits_{X_{a_2}} \| d\kappa \|^2$.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $0 < \lambda < 1/4$. Si X vérifie l'une ou l'autre des hypothèses $P(m, l)$, $Q(m)$, et si $q \geqq m$, l'endomorphisme de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$, $\tilde{\kappa}(h) = P_{3(\lambda + (C/k))}(\kappa . h)$ définit une injection de $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(3(\lambda + (C/k)))$ dès que $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, $k \geqq k_0$.*

COROLLAIRE 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ est un espace de dimension finie, et l'on a : si $k \geqq k_1 = k_1(\lambda)$,*

$$\dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda) \leqq \dim \mathscr{H}^{n,q}(\lambda) \leqq \dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda).$$

Démonstration du corollaire 2.2. — L'elliplicité de Δ'' garantit par le lemme de Rellich la finitude de l'espace $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda)$, et la première inégalité est conséquence immédiate du principe du minimax; il suffit de choisir $k_1 \geqq \sup(k_0, 3C/\lambda)$.

Démonstration du théorème 2.1. — Si $h \in \mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$, d'après le lemme 1.2, nous avons :

$$\int_X \| h \|^2 \leqq 2 \int_{X_{a_1}} \| h \|^2 = 2 \int_{X_{a_1}} \| \kappa . h \|^2$$

et, par le calcul (1.6) :

$$\int_{X_{a_2}} \langle \Delta''(\kappa . h), \kappa . h \rangle \leqq \frac{3}{2} k \left(\lambda \int_X \|h\|^2 + \frac{C}{k} \int_{X_{a_2}} \|h\|^2 \right)$$
$$\leqq \frac{3}{2} k \left(\lambda + \frac{C}{k} \right) \int_X \|h\|^2$$
$$\leqq 3k \left(\lambda + \frac{C}{k} \right) \int_{X_{a_2}} \|\kappa . h\|^2.$$

Ceci montre que pour $h \neq 0$ (*donc* $\kappa . h \neq 0$), les composantes de $\kappa . h$ sur les espaces propres de Δ'' de valeur propre $\leqq 3k(\lambda + (C/k))$ ne peuvent être toutes nulles [*i. e.* $P_{3(\lambda+(C/k))}(\kappa . h) \neq 0$]. ■

Définissons $\mathrm{Dom}^q D'' \subset L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ le domaine de l'opérateur D'' au sens des distributions [*i. e.* l'ensemble des éléments u de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ tels que $D'' u$ (calculé au sens des distributions) soit dans $L^2_{n,q+1}(X, E \otimes L^k_\chi)$].

PROPOSITION 2.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, $\mathscr{H}^{n,\bullet}(\lambda)$ *est un sous-complexe du complexe de Dolbeault* D'' : $\mathrm{Dom}^\bullet D''$, *ayant même cohomologie.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ est un complexe de rang fini si $\lambda < 1/4$, en degré $q \geqq m$, le spectre de Δ'' est discret au voisinage de 0. Par conséquent, l'opérateur de Green $G = \int_{\lambda > 0} (1/\lambda)\, dP_\lambda$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$ (de norme $1/\lambda_1$ si λ_1 est la première valeur propre non nulle de Δ''). Il vérifie les relations :

$$\Delta'' G = G \Delta'' = \mathrm{Id} - P_0, \qquad [G, D''] = 0.$$

L'opérateur $\delta'' G$ est donc un opérateur fermé dans $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$ et, comme la métrique ω est complète, pour $u \in L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$, on a :

$$\int_X \|\delta'' G u\|^2 dV \leqq \int_X \langle \Delta'' G u, G u \rangle dV$$
$$\leqq \frac{1}{\lambda_1} \int_X \|u\|^2 dV$$

Il en résulte que $\delta'' G$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$. D'autre part,

$$\mathrm{Id} - P_\lambda = \Delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda) + P_0(\mathrm{Id} - P_\lambda)$$
$$= \Delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)$$
$$= D''(\delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)) + \delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda) D''$$

si bien que $\delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)$ définit une homotopie entre Id et P_λ sur $\mathrm{Dom}^\bullet D''$. ■

LEMME 2.4. — *Soit*

$$0 \to C^0 \overset{d^0}{\to} C^1 \overset{d^1}{\to} \dots \to C^n \overset{d^n}{\to} 0$$

un complexe d'espaces vectoriels de dimensions c^q, *finies si* $q \geqq m$, *sur un corps* K. *Soit* $h^q = \dim H^q(C^\bullet)$. *On a les inégalités suivantes, si* $m \leqq q \leqq n$:

(1) *Inégalités de Morse :*

$$h^q \leqq c^q.$$

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$h^q - h^{q+1} + \dots + (-1)^{n-q} h^n \leqq c^q - c^{q+1} + \dots + (-1)^{n-q} c^n.$$

Démonstration. — Si $Z^q = \ker d^q$, et $B^q = \operatorname{Im} d^{q-1}$, ont pour dimension z^q et b^q, les inégalités (1) et (2) résultent des formules

$$c^q = z^q + b^{q+1}, \qquad h^q = z^q - b^q.$$

$$h^q - h^{q+1} + \dots + (-1)^{n-q} h^n = -b^q + c^q - c^{q+1} + \dots + (-1)^{n-q} c^n. \quad \blacksquare$$

Notons λ_j^x les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ sur X, rangées par ordre décroissant de la valeur absolue, $s = s(x)$ le rang de $ic(L_\chi)_x$. Soit J un multiindice de longueur q dans $\{1, \dots, n\}$, $\lambda > 0$, nous définissons les C_n^q fonctions semi-continues supérieurement suivantes :

$$\nu_J(\lambda) = \frac{2^{s-2n} \pi^{-n}}{\Gamma(n-s+1)} |\lambda_1^x \dots \lambda_s^x| \sum_{(p_1, \dots, p_s) \in \mathbf{N}^s} \left(2\lambda + \lambda_{\complement J}^x - \lambda_J^x - \sum_{j=1}^{s} (2p_j + 1) |\lambda_j^x| \right)_+^{n-s}$$

avec les conventions $\lambda_J^x = \sum_{j \in J} \lambda_j^x$,

$$x_+^0 = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$x_+^0 = 1 \quad \text{si} \quad x \geqq 0.$$

Nous allons maintenant utiliser un théorème de répartition spectrale dû à J.-P. Demailly. D'après ce résultat (avec les changements de notations adéquats), le spectre de l'opérateur $(1/k)\Delta''$ pour le problème de Dirichlet sur X_{a_2} admet la répartition spectrale asymptotique décrite par le théorème 2.5.

THÉORÈME 2.5 (*cf.* [D1], th. 2.16 et 3.14, calculs des parties III et IV). — *Il existe un ensemble dénombrable* $N \subset \mathbf{R}$ *tel que, si* $\lambda \in \mathbf{R}_+^* \setminus N$,

$$\dim \mathscr{H}_{a_2}^{n, q}(\lambda) = r k^n \sum_{|J| = q} \int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda)\, dV + o(k^n).$$

Soit $I(q, \lambda) = \sum_{|J|=q} \int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda)\, dV$. Le lemme 2.4 appliqué au complexe $\mathscr{H}^{n,\bullet}(\lambda)$, moyennant le corollaire 2.2, la proposition 2.3 et le théorème 2.5, implique le

Corollaire 2.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *on a : si* $\lambda \in]0, 1/4[\setminus \mathbb{N}$ *et* $q \geqq m$, *il existe* $k_1 = k_1(\lambda)$ *tel que, si* $k \geqq k_1$:

(1) $\dim H^{n,q}(X, E \otimes L_\chi^k) \leqq rk^n I(q, 4\lambda) + o(k^n)$.

(2) $$\sum_{\nu=q}^{n} (-1)^{\nu-q} \dim H^{n,\nu}(X, E \otimes L_\chi^k)$$
$$\leqq rk^n [I(q, 4\lambda) - I(q+1, \lambda) + \ldots + (-1)^{n-q} I(n, \tilde{\lambda}) + o(k^n)$$

(*avec* $\tilde{\lambda} = \lambda$ *si* $n-q$ *est impair*, $\tilde{\lambda} = 4\lambda$ *si* $n-q$ *est pair*).

Faisons maintenant tendre λ vers 0 par valeurs dans $]0, 1/4[\setminus \mathbb{N}$ et k vers l'infini. La limite de $I(q, \lambda)$ [resp. $I(q, 4\lambda)$] est, par la convention faite sur x_+^0, $I(q, 0)$. Notons $X(q, \chi)$ l'ensemble des points de X où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q.

Lemme 2.7. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *on a :*

$$I(q, 0) = \frac{1}{n!} \int_{X_{a_2} \cap X(q,\chi)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(L_\chi) \right)^n.$$

Démonstration. — La quantité $\lambda_{\complement J}^\chi - \lambda_J^\chi - \sum (2p_j + 1) |\lambda_j^\chi|$ est toujours $\leqq 0$, nulle aux seuls points $x \in X(q, \chi)$ où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q, avec $(p_1, \ldots, p_n) = 0$, et $J = \{ j = 1, \ldots, n \mid \lambda_j^\chi < 0 \}$. En un tel point,

$$\nu_J(\lambda) = 2^{-n} \pi^{-n} (-1)^q (\lambda_1^\chi \ldots \lambda_n^\chi)$$
$$\nu_J(\lambda)\, dV = \frac{1}{n!} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(L_\chi) \right)^n. \quad \blacksquare$$

Nous retrouvons maintenant les groupes sans conditions de croissance que nous voulons estimer par la

Proposition 2.8 ([D3], lemme 1.9). — *On a la décomposition en réunion filtrante croissante :* $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k, \mathrm{loc}) = \bigcup_{\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}} L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L_\chi^k)$ où χ *est choisie égale à* χ_0 *sur* X_{a_2}.

Ceci résulte du fait que le poids $e^{-\chi \circ \psi}$ sur les fibres permet de rendre toute forme L^2_{loc} sur X globalement de carré intégrable dès lors que $e^{-\chi \circ \psi}$ est à décroissance assez rapide à l'infini.

De plus, d'après [D3], on a le

Lemme 2.9. — *Pour* χ *à croissance assez rapide et* $k \geqq k_0$, $q \geqq m$,

$$\dim H^{n,q}(X, E \otimes L^k) = \dim H^{n,q}(X, E \otimes L_\chi^k).$$

Ce lemme résulte des propositions (3.12) et (3.13) de [D3], où l'on a pris garde de choisir χ suffisamment croissante, permettant de vérifier le lemme 2.9 indépendamment de k.

Fin de la démonstration des théorèmes 0.1 *et* 0.2. — Le corollaire 2.6, combiné avec les lemmes 2.7 et 2.9, permet d'obtenir maintenant les théorèmes 0.1 et 0.2. Observons tout d'abord que le majorant $I(q, 0)$ est en fait uniforme par rapport à χ (car χ est toujours choisie égale à χ_0 sur X_{a_2}). D'autre part :

• sous l'hypothèse $P(m, l)$, $ic(L)$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors de K, et $id'd''(\chi_0 \circ \psi)$ au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors de K; donc $ic(L_{\chi_0}) = ic(L) + id'd''\chi_0 \circ \psi$ est positive sur l'intersection des sommes directes des espaces propres attachés aux valeurs propres $\geqq 0$ de $ic(L)$ et $id'd''\chi_0 \circ \psi$ respectivement. Cette intersection est de codimension $\leqq m-1+l-1$, donc de dimension $\geqq n-(m+l-1)+1$. Par conséquent, si $q \geqq m+l-1$, on a $X(q, \chi_0) \subset K$, et $\chi_0 \circ \psi$ a été choisie nulle sur K donc $X(q, \chi_0) = X(q)$ et $ic(L_\chi) = ic(L)$ sur $X(q)$.

• *sous l'hypothèse* $Q(m)$, $ic(L_\chi) \geqq ic(L)$ sur X et $ic(L)$ admet au moins $n-m+1$ valeurs propres $\geqq 0$ sur $X \setminus K$, donc $ic(L_\chi)$ aussi. Par conséquent, si $q \geqq m$, on a $X(q, \chi) \subset K$, donc $X(q, \chi) = X(q)$ et $ic(L) = ic(L_\chi)$ sur $X(q)$. ■

Remarques sur le théorème 0.1. — (2.10) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q \geqq m$, sans hypothèse sur la courbure de L, pour le fibré L_{χ_0}.

(2.11) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q \geqq \sup(m, l)$ si l'on admet l'hypothèse supplémentaire suivante :

$R(m, l)$: X est très fortement m-convexe [*i.e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, exhaustive, *plurisousharmonique*, dont le hessien complexe admet au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors d'un compact, et $ic(L)$ possède au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors d'un compact].

En effet, sous cette hypothèse, $id'd''\chi_0 \circ \psi$ est semi-positive hors de K, et par conséquent $ic(L_{\chi_0})$ possède au moins l valeurs propres $\geqq 0$ hors de K. Par conséquent $X(q, \chi_0) \subset K$ dès que $q \geqq l$; d'autre part les inégalités du corollaire 2.6 sont valides dès que $q \geqq m$.

(2.12) Enfin, remarquons que nous avons en fait la proposition suivante sensiblement plus forte que le corollaire 2.2 :

PROPOSITION 2.12. — *Si* X *est fortement m-convexe, avec les notations précédentes, il existe un choix de* $\chi_0 \in \mathscr{C}$, *tel que, pour* $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, *on ait, si* $q \geqq m$:

$$\dim \mathscr{H}_\chi^{n,q}(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q} \int_X \nu_J(\lambda)\, dV + o(k^n)$$

pour tout λ *en dehors d'une partie dénombrable* $N \subset \mathbf{R}$.

Démonstration. — Avec les notations de la démonstration du lemme 1.2, choisissons χ_0 assez croissante pour que :

$$(2.13)\qquad \chi_0'\circ\psi \geqq [2j+1+2\,|\,[ic(\mathrm{E}),\Lambda]\,|_\omega+2\,|\,\mathrm{T}_\omega\,|_\omega+2n\,|\,\alpha_1\,|\,]\,e^{\rho\circ\psi}$$

sur $\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j}$.

Alors, si $\chi\in\chi_0+\mathscr{C}$, $\chi'\geqq\chi_0'$, et par conséquent, d'après le calcul (1.6), on a :

$$(1.6)'\qquad \text{si } h\in\mathscr{H}^{n,q}_\chi(\lambda),\quad \int_{\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j+1}}\|h\|^2\leqq\frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{j-\lambda(1+2\varepsilon)}\int_{\mathrm{X}_{a_0+j+1}}\|h\|^2$$

d'où l'on déduit :

$$(2.2)'\qquad \int_{\mathrm{X}_{a_0+j+2}}\langle\Delta''(\kappa.h),\kappa.h\rangle\leqq\frac{j}{j-\lambda(1+2\varepsilon)}\left(\frac{\mathrm{C}}{k}+\lambda\right)(1+2\varepsilon)\int_{\mathrm{X}_{a_0+j+2}}\|\kappa.h\|^2$$

si κ est une fonction tronquante nulle sur $\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j+2}$, égale à 1 sur X_{a_0+j+1}. Pour j assez grand, cela démontre l'inégalité :

$$(2.14)\qquad \text{si } q\geqq m,\quad \dim\mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda)\leqq\dim\mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda(1+3\varepsilon))$$

qui permet de conclure en faisant tendre ε vers 0 et j, k vers l'infini. En effet, par le théorème 2.5, nous savons que

$$\dim\mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda)=\frac{rk^n}{n!}\int_{\mathrm{X}_{a_0+j+2}}\nu_\mathrm{J}(\lambda)\,d\mathrm{V}+o(k^n)$$

où $\nu_\mathrm{J}(\lambda)=2^{-n}\pi^{-n}\,|\,\lambda_1^\chi\ldots\lambda_s^\chi\,|\,(2\lambda-\lambda_\mathrm{J}^\chi+\lambda_{\complement\mathrm{J}}^\chi-\sum_{(pj)}(2p_j+1)\,|\,\lambda_j^\chi\,|\,)_+^{n-s}$.

Notons que, si $q\geqq m$, il existe un $s\geqq m$ tel que $s\in\mathrm{J}$. Dans ce cas, et d'après (2.13), $\lambda_s^\chi\geqq\lambda_m^\chi\geqq 2j$ sur $\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j}$. Par conséquent

$$2\lambda-\lambda_\mathrm{J}^\chi+\lambda_{\complement\mathrm{J}}^\chi-\sum(2p_j+1)\,|\,\lambda_j^\chi\,|\leqq 2(\lambda-\lambda_m^\chi)\leqq 2(\lambda-2j)$$

sur $\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j}$.

En définitive, pour tout multiindice J de longueur q, $\nu_\mathrm{J}(\lambda)$ est nul sur $\mathrm{X}\diagdown\mathrm{X}_{a_0+j}$ dès que $j>\lambda/2$, donc les majorants intégraux restent à support dans un compact fixe lorsque j tend vers l'infini, et ε vers 0. ■

III. Estimations pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe

Nous dirons qu'une fonction φ est faiblement l-convexe sur une variété X de dimension n sur **C** si son hessien complexe admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$. Les fonctions faiblement 1-convexes sont donc les fonctions plurisousharmoniques.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* X *une variété* **C**-*analytique de dimension n, fortement m-convexe,* φ *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* X, *faiblement l-convexe hors d'un compact* K *de* X. *Pour* $0 \leqq \nu \leqq n$, *soit* G_ν *l'ensemble des points de* X *où* $id'd''\varphi$ *est non dégénérée et admet* ν *valeurs propres* <0. *Alors, pour tout* $q \geqq m+l-1$, *on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \geqq 0 \qquad \textit{si} \quad q \textit{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \leqq 0 \qquad \textit{si} \quad q \textit{ est impair}$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{C}_\varphi$ le fibré hermitien trivial $X \times \mathbf{C}$ muni de la métrique $e^{-\varphi}$ sur les fibres. Ce fibré vérifie l'hypothèse P(m, l) car sa courbure est exactement $id'd''\varphi$. Si nous appliquons le théorème 0.1 à ce fibré, les inégalités de Morse fortes se retranscrivent comme suit :

$$(3.2) \qquad \sum_{\nu=q}^{n} (-1)^{q-\nu} \dim H^\nu(X, \mathbf{C}) \leqq \frac{k^n}{(n!)(2\pi)^n}(-1)^q \sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n + o(k^n)$$

car $\mathbf{C}^{\otimes k} \simeq \mathbf{C}$. Divisons l'inégalité (3.2) par k^n, et faisons tendre k vers l'infini, nous obtenons le théorème 3.1 car le membre de gauche est fini et ne dépend pas de k. Celui-ci généralise les théorèmes 3 et 4 de [S], qui n'étaient valables que pour des domaines m-convexes d'une variété de Stein.

De façon analogue, le théorème 0.2 implique le

THÉORÈME 3.2. — *Soit* X, *une variété faiblement* 1-*complète, kählérienne hors d'un compact, et* φ, *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* X, *dont le hessien est semi-positif de rang au moins* $(n-m+1)$ *hors d'un compact* (φ *plurisousharmonique et fortement m-convexe hors d'un compact*). *Alors, pour tout* $q \geqq m$, *on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \geqq 0 \qquad \textit{si} \quad q \textit{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \leqq 0 \qquad \textit{si} \quad q \textit{ est impair}$$

BIBLIOGRAPHIE

[D1] J.-P. DEMAILLY, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie* [*Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), t. XXXV, n° 4, 1985, p. 189-229].

[D2] J.-P. DEMAILLY, *Sur l'identité de Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne* [*Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda* (*Analyse*), 1983/1984, p. 88-97, *Lecture Notes in Math.*, n° 1198, Springer, 1986].

[D3] J.-P. DEMAILLY, *Sur les théorèmes d'annulation et de finitude de T. Ohsawa et O. Abdekader* [*Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda* (*Analyse*), 1985/1986, *Lecture Notes in Math.*, n° 1295, Springer, 1987].

[H] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 2nd edition, 1973.

[S] Y.-T. SIU, *Calculus Inequalities Derived from Holomorphic Morse Inequalities*, Prépublication, 1987 [*Math. Annalen* (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 3 mars 1988).

Thierry BOUCHE,
Institut Fourier,
Laboratoire de Mathématiques,
B.P. 74,
38402 Saint-Martin d'Hères