P. DELIGNE
A. DIMCA

Filtrations de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 4 (1990), p. 645-656
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_4_645_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 23, 1990, p. 645 à 656.

FILTRATIONS DE HODGE ET PAR L'ORDRE DU PÔLE POUR LES HYPERSURFACES SINGULIÈRES

PAR P. DELIGNE ET A. DIMCA

1. Énoncé des résultats

Soient V une hypersurface de degré d dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et μ la partie entière de n/d. Si le corps de base est un corps fini $\mathbb{F}_q$, un théorème de J. Ax [1], précisant un théorème antérieur de E. Warning, équivaut à

$$(1.1) \qquad \# \mathrm{V}(\mathbb{F}_q) \equiv \sum_{0}^{n} q^i \qquad \bmod q^{\mu}.$$

Il reviendrait au même au second membre de prendre la somme de 0 à $n-1$. Si U est le complément $\mathbb{P}^n - \mathrm{V}$ de V, cette congruence se récrit plus simplement

$$(1.2) \qquad \# \mathrm{U}(\mathbb{F}_q) \equiv 0 \qquad \bmod q^{\mu}.$$

Dans cet article, nous prouvons un analogue de (1.1), (1.2) en théorie de Hodge. L'analogie est basée sur la conjecture de Grothendieck (étendue aux motifs mixtes) comme quoi si la réalisation de de Rham d'un motif M vérifie $\mathrm{M}_{\mathrm{DR}} = \mathrm{F}^{\mu} \mathrm{M}_{\mathrm{DR}}$, alors M est produit tensoriel du motif de Tate $\mathbb{Q}(-\mu)$ par un motif effectif, et qu'en conséquence, pour une réduction modulo p de M sur $\mathbb{F}_q$ les valeurs propres de Frobenius sont divisibles par q^{μ}. Cette conjecture et les travaux de Dwork sont à la base de la conjecture de Katz (*cf.* [11] 2.9, B. Mazur [13]).

Supposons que le corps de base est $\mathbb{C}$. En cohomologie rationnelle, ou complexe, le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{V})$$

est injectif, sauf en degré $i = 2n$. Son composé avec le morphisme de Gysin $\mathrm{H}^*(\mathrm{V}) \to \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n)$ est en effet la multiplication par la classe de cohomologie de V, à savoir $d\eta$ où $\eta = c_1 \mathcal{O}(1)$, et $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\eta]/(\eta^{n+1})$.

Le morphisme de restriction s'insère dans une suite exacte longue de structures de Hodge mixtes:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^i_c(\mathrm{U}) \to \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{V}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{i+1}_c(\mathrm{U}) \to \dots \tag{1.3}$$

Notre analogue de (1.1) est :

THÉORÈME 1. — *Le conoyau coker* $(\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{V}))$ *est de filtration de Hodge* $\geqq \mu$.

Une structure de Hodge mixte H est dite de filtration de Hodge $\geqq \mu$ si $\mathrm{H}=\mathrm{F}^\mu \mathrm{H}$. La suite exacte (1.3) montre que le théorème équivaut à l'analogue suivant de 1.2.

VARIANTE 1. — *La cohomologie à support compact* $\mathrm{H}^*_c(\mathrm{U})$ *est de filtration de Hodge* $\geqq \mu$.

La variété U est lisse purement de dimension n. Par dualité de Poincaré, $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{U})$ et $\mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{U})$ sont duaux l'un de l'autre, pour une dualité à valeur dans la structure de Hodge $\mathbb{Q}(-n)$ purement de type de Hodge (n, n). Le théorème équivaut donc encore à

VARIANTE 2. — *La cohomologie de* U *vérifie*.

$$\mathrm{F}^{n-\mu+1}\mathrm{H}^*(\mathrm{U})=0. \tag{1.4}$$

Si V est la sous-variété de $\mathbb{P}^n$ définie par des équations $f_i=0$ de degré $d_i (1 \leqq i \leqq r)$, J. Ax déduit de son théorème appliqué aux hypersurfaces d'équation un produit de f_i que

$$\# \mathrm{V}(\mathbb{F}_q) \equiv \sum_0^n q^i \qquad \mathrm{mod}\, q^\mu \tag{1.5}$$

pour

$$\mu=[n/\textstyle\sum d_i].$$

Pour le complément U de V, ceci équivaut à

$$\# \mathrm{U}(\mathbb{F}_q) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\, q^\mu. \tag{1.6}$$

De même, on déduit de la variante 1 du théorème 1 et de la suite spectrale définie par le recouvrement ouvert de U par les ouverts $f_i \neq 0$ de $\mathbb{P}^n$ que, sur $\mathbb{C}$, la cohomologie à support compact de U est de filtration de Hodge $\geqq [n/\sum d_i]$.

Dans le cas du corps de base $\mathbb{F}_q$, N. Katz [11] a montré que (1.5) (1.6) reste vrai avec $[n/\sum d_i]$ remplacé par le plus petit entier $\geqq (n+1-\sum d_i)/\sup(d_i)$. Si d_1 est le plus grand des d_i, cet entier est la partie entière $\left[\left(n-\sum_2^r d_i\right)/d_1\right]$. Nous ne savons pas prouver l'analogue en théorie de Hodge de ce raffinement — sauf pour V lisse, auquel cas le résultat (SGA 7 XI 2.5) précède [11]. Ajouté lors de la révision : H. Esnault vient de le prouver lorsque V est de codimension r. Son approche est en gros duale de la nôtre, et a l'avantage de ne pas exiger un contrôle aussi précis du procédé de désingularisation utilisé (*cf.* 2.8).

Soient X lisse sur $\mathbb{C}$, D un diviseur, i l'inclusion de D dans X et $j : \mathrm{U} \subsetneq \mathrm{X}$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. D'après A. Grothendieck [8], on a

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{U}, \Omega_{\mathrm{U}}^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathrm{U}). \tag{1.7}$$

A gauche, on considère U muni de sa topologie de Zariski et l'hypercohomologie du complexe de de Rham algébrique. A droite la cohomologie est la cohomologie complexe de l'espace topologique usuel $\mathrm{U}(\mathbb{C})$. La flèche est définie par l'application continue $\varepsilon : \mathrm{U}(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}$ et par le morphisme naturel de $\varepsilon^* \Omega_{\mathrm{U}}^*$ dans la résolution $\Omega_{\mathrm{U}(\mathbb{C})^{an}}^*$ du faisceau constant $\mathbb{C}$. Le morphisme j étant affine, on a $\mathrm{R}^i j_* \Omega_{\mathrm{U}}^p = 0$ pour $i > 0$, donc $j_* \Omega_{\mathrm{U}}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R} j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*$ et

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{X}, j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^*(\mathrm{U}, \Omega_{\mathrm{U}}^*). \tag{1.8}$$

La flèche est la restriction à U. Au total, on a donc

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{X}, j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathrm{U}). \tag{1.9}$$

Pour tout sous-complexe P de $j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*$ on dispose de

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{P}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{U})$$

défini au choix par (1.9) ou par (1.7) composé avec la restriction à U.

Chaque $j_* \Omega_{\mathrm{U}}^p$ est la réunion croissante des $\Omega_{\mathrm{X}}^p(a\mathrm{D})$ $(a \geqq 0)$. *La filtration par l'ordre du pôle* P (ou P_{D}, si le choix de D est ambigu) de $j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*$ est la suivante :

$$\mathrm{P}^s j_* \Omega_{\mathrm{U}}^p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p < s \\ \Omega_{\mathrm{X}}^p((p-s+1)\mathrm{D}) & \text{si} \quad p \geqq s. \end{cases}$$

C'est une filtration décroissante, $\mathrm{P}^s = 0$ pour $s > \dim(\mathrm{X})$ et $j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*$ est la réunion de P^s.

On sait que si D est lisse l'inclusion de complexes filtrés

$$(\Omega_{\mathrm{X}}^*(\log \mathrm{D}), \mathrm{F}) \to (j_* \Omega_{\mathrm{U}}^*, \mathrm{P}) \tag{1.10}$$

est un quasi-isomorphisme fitré ([4] II 3.13, inspiré par [9]; le lecteur trouvera aussi dans loc. cit. un énoncé analogue, plus compliqué, pour D un diviseur à croisements normaux). Rappelons que pour tout diviseur à croisements normaux D, $\Omega_{\mathrm{X}}^*(\log \mathrm{D}) \subset j_* \Omega_{\mathrm{X}}^*$ est le sous-faisceau des formes α telle que α et $d\alpha$ aient au plus un pôle simple le long de D. Autre description pour D lisse :

$$\Omega_{\mathrm{X}}^*(\log \mathrm{D}) = \mathrm{Ker}(\Omega_{\mathrm{X}}^* \to i_* \Omega_{\mathrm{D}}^*)(\mathrm{D}).$$

La filtration de Hodge F est la filtration par les tronqués bêtes $\sigma_{\geqq p}$.

THÉORÈME 2. — *Soient* X *propre et lisse et* $D \subset X$ *un diviseur. Avec les notations précédentes, pour tout s, l'image dans* $H^*(U, \mathbb{C})$ *de* $\mathbb{H}^*(X, P^s(j_* \Omega_U^*))$ *contient* $F^s H^*(U, \mathbb{C})$.

Si D est lisse, il résulte des définitions et du quasi-isomorphisme filtré 1.10 que $\mathbb{H}^*(X, P^s(j_* \Omega_U^*)) \xrightarrow{\sim} F^s H^*(U, \mathbb{C})$.

Déduisons la variante 2 du théorème 1 du théorème 2. Il suffit de montrer que, avec les notations du théorème 1, on a

$$R\Gamma(\mathbb{P}^n, P^{n-\mu+1} j_* \Omega_U^*) = 0.$$

A fortiori, il suffit de montrer que pour chaque p on a

$$R\Gamma(\mathbb{P}^n, P^{n-\mu+1} j_* \Omega_U^p) = 0.$$

Les faisceaux dont il s'agit de prendre la cohomologie sont soit nuls, soit de la forme $\Omega^p(a)$ avec $0 \leqq p \leqq n$, $a > 0$ et $a = (p-(n-\mu+1)+1)d$. On sait que $R\Gamma\Omega^p(a) = 0$ si $0 < a \leqq p$ (R. Bott [3] prop. 14.4 p. 246; pour une preuve algébrique, valable en toute caractéristique, voir SGA 7 XI 1.1). Il reste à vérifier que

$$(p-(n-\mu+1)+1)\,d \leqq p. \tag{1.6}$$

Quand p croît, le premier membre de cette inéquation croît plus vite que le second. Il suffit donc de considérer le cas $p = n$, auquel cas (1.6) se réduit à l'inéquation $\mu d \leqq n$ qui définit μ.

2. Preuve du théorème 2

2.1. PROPOSITION. — *Soient* X *lisse*, $Y \subset X$ *lisse*, i *l'inclusion de* Y *dans* X, $f : \tilde{X} \to X$ *l'éclaté de* X *le long de* Y *et* $\tilde{Y} = f^{-1}(Y) \subset \tilde{X}$ *le diviseur exceptionnel. On a sur* X

$$f_* \Omega^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y}) = \operatorname{Ker}(\Omega_X^p \to i_* \Omega_Y^p)$$

et

$$R^i f_* \Omega^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad i > 0$$

PREUVE. — Notant encore i l'inclusion de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{X}$, on a

$$\Omega^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y}) = \operatorname{Ker}(\Omega_{\tilde{X}}^p \to i_* \Omega_{\tilde{Y}}^p),$$

d'où un morphisme

$$\operatorname{Ker}(\Omega_X^p \to i_* \Omega_Y^p) \to f_* \Omega^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y})$$

dont il s'agit de voir qu'il induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker}(\Omega_X^p \to i_* \Omega_Y^p)$, placé en degré 0, avec $Rf_* \Omega^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y})$.

La proposition est locale pour la topologie étale. Il suffit donc de traiter le cas où X est l'espace affine $A^{n_1+n_2}=A^{n_1}\times A^{n_2}$ et où $Y=\{0\}\times A^{n_2}$. Des formules de Kunneth ramènent alors au cas où $n_2=0$: (X, Y) se déduit de $(A^{n_1}, 0)$ par multiplication par A^{n_2}, et la somme sur p des faisceaux à considérer se déduit de la somme analogue sur $(A^{n_1}, 0)$ par produit tensoriel externe avec $\oplus\,\Omega^p_{A^{n_2}}$. On peut donc supposer, et on suppose, que Y est réduit à un point.

Pour Y réduit à point, nous donnerons deux preuves de 2.1. La première a l'avantage de s'appliquer en toute caractéristique. La seconde explique pourquoi 2.1 est « évident » du point de vue de la théorie de Hodge.

1[re] Preuve. — On suppose Y réduit à un point Y. Pour $p>0$, un calcul local montre que le morphisme $f^*\Omega^p_X\to\Omega^p_{\tilde X}$ induit un isomorphisme

$$f^*\Omega^p_X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(\Omega^p_{\tilde X}\to i_*\Omega^p_{\tilde Y}).$$

Puisque Ω^p_X est localement libre et que $\Omega^p_Y=0$, le résultat à prouver se ramène donc à $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f_*\,\mathcal{O}_{\tilde X}$.

Pour $p=0$, on utilise la suite exacte longue déduite de

$$0\to \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_{\tilde X}\to i_*\,\mathcal{O}_{\tilde Y})\to \mathcal{O}_{\tilde X}\to i_*\,\mathcal{O}_{\tilde Y}\to 0,$$

la même formule $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f_*\,\mathcal{O}_{\tilde X}$ et le fait que pour l'espace projectif $\tilde Y$, $\mathrm{H}^*(\tilde Y, \mathcal{O}_{\tilde Y})$ est réduit à $\mathbb{C}$ en degré 0.

2[e] Preuve. — La relation avec la théorie de Hodge est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.2. — *Soient* S *projectif et lisse*, $i\colon T\hookrightarrow S$ *un sous-schéma fermé lisse et* $U:=S-T$. *Le sous-complexe* $\operatorname{Ker}(\Omega^*_S\to i_*\Omega^*_T)$ *du complexe de de Rham a pour hypercohomologie la cohomologie à support propre* $\mathrm{H}^*_c(U)$, *la suite spectrale définie par la filtration bête* $\sigma_{\geq p}$ *est dégénérée en* E_1 *et elle aboutit à la filtration de Hodge de* $\mathrm{H}^*_c(U)$.

Appliquons ce lemme à (X, Y) et $(\tilde X, \tilde Y)$, pour X propre et lisse et Y réduit à un point. Parce que $\tilde X-\tilde Y \xrightarrow{\sim} X-Y$, on a $\mathrm{H}^*_c(X-Y)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^*_c(\tilde X-\tilde Y)$ et, passant à Gr_F, on obtient

(2.2.1) $$\mathrm{R}\Gamma(X, \operatorname{Ker}(\Omega^p_X\to i_*\Omega^p_Y))\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}\Gamma(\tilde X, \operatorname{Ker}(\Omega^p_{\tilde X}\to i_*\Omega^p_{\tilde Y})).$$

Le second membre est encore

$$\mathrm{R}\Gamma(X, \mathrm{R}f_*\operatorname{Ker}(\Omega^p_{\tilde X}\to i_*\Omega^p_{\tilde Y})).$$

Soit C le cône du morphisme

(2.2.2) $$\operatorname{Ker}(\Omega^p_X\to i_*\Omega^p_Y)\to \mathrm{R}f_*\operatorname{Ker}(\Omega^p_{\tilde X}\to c_*\Omega^p_{\tilde Y}).$$

Appliquant $R\Gamma$ au triangle distingué qui le définit, on déduit de (2.2.1) que $R\Gamma C=0$. D'autre part, C, ou plutôt ses faisceaux de cohomologie, est à support le point Y. De $R\Gamma C=0$ résulte que $C=0$: (2.2.2) est un isomorphisme. Ceci termine la 2[e] preuve de 2.1, modulo 2.2.

Le lemme 2.2 provient de ce que le complexe simple déduit du double complexe $\Omega_S^* \to i_* \Omega_T^*$, avec la filtration par le poids

$$0 \subset W_{-1} = \mathbf{s}(0 \to i_* \Omega_T^*) \subset W_0 = \mathbf{s}(\Omega_S^* \to i_* \Omega_T^*)$$

et la filtration de Hodge par les sous-complexes

$$\mathbf{s}(\sigma_{\geqq p} \Omega_S^* \to \sigma_{\geqq p} i_* \Omega_T^*)$$

est un complexe de Hodge mixte cohomologique. Ceci sous-entend la structure rationnelle :

$$\text{complexe } \mathbb{Q} \to i_* \mathbb{Q} \text{ filtré par}$$

$$W^{-1} : 0 \to i_* \mathbb{Q}.$$

Le morphisme

$$(\mathrm{Ker}(\Omega_S^* \to i_* \Omega_T^*), \sigma_{\geqq p}) \to (\mathbf{s}(\Omega_S^* \to i_* \Omega_T^*), F)$$

est un quasi-isomorphisme filtré. Ceci exprime simplement que $\Omega_S^p \to i_* \Omega_T^p$ est un épimorphisme. Ceci suffit à établir 2.2, pour une structure de Hodge mixte sur $H_c^*(U)$, fonctorielle en (S, T). Cet énoncé, un peu moins précis que 2.2, suffit pour l'application à 2.1.

2.3. Soient X lisse, $V \subset X$ un diviseur, $Y \subset X$ un sous-schéma fermé lisse, contenu dans le lieu singulier de V. Soient $f : \tilde{X} \to X$ l'éclaté de X le long de Y, $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$ le diviseur exceptionnel et $\tilde{V} = f^{-1}(V)$. Parce que Y est contenu dans le lieu singulier de V, on a

$$(2.3.1) \qquad 2\tilde{Y} \leqq \tilde{V}.$$

Soit $V_1 = \tilde{V} - \tilde{Y}$. D'après 2.3.1, on a

$$(V_1)_{\mathrm{red}} = (f^{-1} V)_{\mathrm{red}}.$$

Soient $U = X - V = \tilde{X} - \tilde{V}$, j son inclusion dans X et $\tilde{j}$ son inclusion dans $\tilde{X}$. Nous noterons P tant la filtration par l'ordre du pôle (rel. V) de $j_* \Omega_U^*$ et que celle de $\tilde{j}_* \Omega_U^*$, rel. V_1.

Corollaire 2.4. — *Avec les hypothèses et notations de* 2.3, *il existe, dans la catégorie dérivée, un morphisme*

$$(2.4.1) \qquad Rf_* P^s \tilde{j}_* \Omega_U^* \to P^s j_* \Omega_U^*$$

induisant l'identité sur U.

PREUVE. — Le complexe $P^s \tilde{j}_* \Omega_U^*$ a pour composantes les

$$\Omega_{\tilde{X}}^p((p-s+1)V_1) \qquad (p \geqq s),$$

et, par (2.3.1), ces faisceaux sont des sous-faisceaux des

$$\Omega_{\tilde{X}}^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y})((p-s+1)\tilde{V}) = \Omega_{\tilde{X}}^p(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y}) \otimes f^* \mathcal{O}((p-s+1)V).$$

Par 2.1, ces derniers sont acycliques : $R^i f_* = 0$ pour $i > 0$. Le Rf_* du complexe qu'ils forment s'obtient donc simplement en appliquant f_* composante à composante : c'est le complexe des $\mathrm{Ker}(\Omega_X^p \to \Omega_Y^p)((p-s+1)V)$.

Appliquant Rf_* au morphisme d'inclusion

$$P^s \tilde{j}_* \Omega_U^* \to \sigma_{\geqq s}(\Omega_{\tilde{X}}^*(\log \tilde{Y})(-\tilde{Y})((*-s+1)\tilde{V}),$$

on obtient donc un morphisme

$$Rf_* P^s \tilde{j}_* \Omega_U^* \to \sigma_{\geqq s} \mathrm{Ker}(\Omega_X^* \to \Omega_Y^*)((*-s+1)V).$$

Le composant avec l'inclusion de $\mathrm{Ker}(\Omega_X^p \to \Omega_Y^p)$ dans Ω_X^p, on obtient le morphisme

$$Rf_* P^s \tilde{j}_* \Omega_U^* \to P_{j_*}^s \Omega_U^*$$

promis.

COROLLAIRE 2.5. — *Avec les hypothèses et notations de* 2.3, *l'image dans* $H^*(U)$ *de* $R^*\Gamma(X, P^s j_* \Omega_U^*)$ *contient celle de* $R^*\Gamma(\tilde{X}, P^s \tilde{j}_* \Omega_U^*)$.

PREUVE. — Pour tout complexe de faisceaux K sur $\tilde{X}$, on a $R\Gamma(X, Rf_* K) = R\Gamma(\tilde{X}, K)$. Par application de $R\Gamma(X, \ )$, 2.4 fournit donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R^*\Gamma(\tilde{X}, P^s \tilde{j}_* \Omega_U^*) & \to & R^*\Gamma(X, P^s j_* \Omega_U^*) \\ & \searrow & \\ & & H^*(U) = R^*\Gamma(U, \Omega_U^*). \end{array}$$

2.6. D'après Hironaka [10], partant de (X, V), on peut construire une suite d'éclatement (X_i, V_i) $(0 \leqq 0 \leqq r)$, avec $(X_0, V_0) = (X, V)$, (X_{i+1}, V_{i+1}) déduit de (X_i, V_i) comme, dans 2.3, $(\tilde{X}, V_1)$ est déduit de (X, V), de telle sorte que $(V_r)_{\mathrm{red}}$ soit un diviseur à croisements normaux dans X_r. Soit j_i l'inclusion de $U = X - V$ dans X_i et P la filtration par l'ordre du pôle de $j_{i*}\Omega_U^*$ rel. le diviseur V_i. Itérant 2.5, on trouve que l'image dans $H^*(U)$ de $R^*\Gamma(X, P^s j_* \Omega_U^*)$ contient celle de $R^*\Gamma(X_r, P^s j_{r*} \Omega_U^*)$. Dans X_r, U est le complément du diviseur à croisements normaux $(V_r)_{\mathrm{red}}$. Par définition, $F^s H^*(U)$ est donc l'hypercohomologie, sur X_r, du complexe $\sigma_{\geqq s} \Omega_X^*(\log (V_r)_{\mathrm{red}})$.

On a

$$\sigma_{\geqq s} \Omega_X^*(\log (V_r)_{\mathrm{red}}) \subset P^s j_{r*} \Omega_U^*,$$

$F^s H^*(U)$ est contenu dans l'image de l'hypercohomologie sur X_r de $P^s j_{r*} \Omega_U^*$ et le théorème 2 en résulte.

REMARQUE 2.7. — De même que 2.5 a été déduit de 2.4 sur X, on peut préciser le théorème 2 par un résultat sur X : pour X_r, V_r comme en 2.6, il existe un morphisme

$$Rf_* F^s \Omega_{X_r}^* (\log (V_r)_{\mathrm{red}}) \to P^s j_* \Omega_U^*$$

qui soit l'identité sur U. Plus précisément encore, il existe dans la catégorie dérivée filtrée de X un morphisme

$$Rf_* (\Omega_{X_r}^* (\log (V_r)_{\mathrm{red}}), F) \to (j_* \Omega_U^*, P)$$

induisant l'identité sur U. La preuve est la même, utilisant 2.4 au lieu de 2.5.

Une variante des résultats de Ph. Du Bois [7] dit par ailleurs que $Rf_* (\Omega_{X_r}^* (\log V_r), F)$ est indépendant du choix de (X_r, V_r) dominant (X, V) avec X_r propre sur X, $X_r - V_r \xrightarrow{\sim} X - V$ et tel que $V_r = f^{-1}(V)$ soit un diviseur à croisements normaux dans X_r.

REMARQUE 2.8. — Notre preuve a utilisé le fait que, dans le théorème de résolution plongée de Hironaka, on peut choisir des éclatements successifs ayant un centre dans le lieu singulier de $f^{-1}(V)$. Ce fait n'est pas dit explicitement dans [10], mais résulte de la démonstration.

3. Applications et variantes

3.1. Soient X propre et lisse purement de dimension n, D un diviseur, $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$ et $U := X - D$. Les démonstrations données au paragraphe 1 montrent encore que si $H^*(X, \Omega^{n-i} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (\mu - i)}) = 0$ pour $0 \leqq i < \mu$, alors $F^{n-\mu+1} H^*(U) = 0$. Par dualité de Serre, l'hypothèse peut se reformuler : $H^*(X, \Omega^i \otimes \mathscr{L}^{\otimes -(\mu - i)}) = 0$ pour $0 \leqq i < \mu$. Par dualité de Poincaré, la conclusion équivaut à : $H_c^*(U)$ est de filtration de Hodge $\geqq \mu$.

Si on s'intéresse à un seul $H^m(U)$, il suffit de considérer les $H^q(X, \Omega^{n-i} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (\mu - i)})$ pour $q + n - i = m$. En particulier, si U est affine, donc $H^m(U) = 0$ pour $m > n$, il suffit de considérer les $H^q(X, \Omega^{n-i} \otimes L^{\otimes (\mu - i)})$ pour $q + n - i \leqq n$: $0 \leqq q \leqq i < \mu$. Pour $\mu = 1$, cela donne :

3.2. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, si* U *est affine et que* $\Omega^n(D)$ *n'a pas de section globale non nulle, alors* $F^n H^*(U) = 0$.

Voici une preuve plus directe de 3.2. On considère encore $f : \tilde{X} \to X$ propre, avec $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$, $\tilde{X}$ lisse et $\tilde{D} := f^{-1}(D)$ un diviseur à croisements normaux. Par définition,

$$F^n H^i(U) = H^{i-n}(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^n (\log \tilde{D})).$$

Ce groupe s'annule pour $i < n$, ainsi que pour $i > n$ car U est affine. Pour $i = n$, c'est l'espace des n-formes sur U à pôle simple le long de $\tilde{D}$. Le morphisme f induit un isomorphisme au-dessus d'une partie de X de codimension $\geqq 2$. Une forme α à pôle simple le long de $\tilde{\mathrm{D}}$ est donc aussi à pôle simple le long de D en les points génériques de D, donc partout. Elle est donc nulle et 3.2 en résulte.

3.3. Pour utiliser 3.1, il faut disposer de résultats de nullité sur la cohomologie des Ω_X^p, tordus par un faisceau inversible. Dans le cas d'espaces hermitiens symétriques compacts, les résultats de Bott [3] et Kostant [12] ramènent la nullité requise à un problème combinatoire (*cf.* D. M. Snow [14] [15]).

Les espaces hermitiens symétriques compacts irréductibles sont nécessairement de la forme $X := G/P$ avec G simple et P un parabolique propre maximal. Leur groupe de Picard est $\mathbb{Z}$ et nous noterons $\mathcal{O}(1)$ son générateur ample. Soit $n = \dim X$. Le faisceau inversible Ω_X^n est antiample, de la forme $\mathcal{O}(-k)$; l'entier k est calculé dans A. Borel et F. Hirzebruch [2], paragraphe 16. Leur table montre que k est le nombre de Coxeter dual de G, et en particulier ne dépend que du type de G :

A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7
$l+1$	$2l-1$	$l+1$	$2l-2$	12	18

3.4. Le cas où X est la grassmannienne $G(r, s)$ des sous-espaces de dimension r dans un espace de dimension $r+s$, avec $r, s > 0$, est celui où $G = SL(r+s)$: type A_l avec $l = r+s-1$, et où P est le parabolique stabilisant un sous-espace de dimension r. La dimension est $n = rs$.

Pour toute partie R à r éléments de $[1, r+s] \subset \mathbb{Z}$, soient $\bar{R}$ son complément et

$$l(R) := \# \{(i, j) \mid i \in R, j \in \bar{R}, j < i\}.$$

Le groupe symétrique des permutations de $[1, r+s]$ est le groupe de Weyl de type A_l et $l(R)$ est la longueur de la permutation σ de $[1, r+s]$ qui est croissante sur $[1, r]$ et sur $[r+1, r+s]$, avec $\sigma([1, r]) = R$ et $\sigma([r+1, r+s]) = \bar{R}$.

Procédant comme D. M. Snow [14], on déduit de Bott [3] et Kostant [12] que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour la nullité de $H^*(X, \Omega^p(-a))$.

3.4.1. Pour toute partie R à r éléments de $[1, r+s] \subset \mathbb{Z}$, de complément $\bar{R}$, telle que $l(R) = p$, on a

$$(R + a) \cap \bar{R} \neq \varnothing.$$

3.5. Proposition. — *Avec les notations précédentes*

(i) $H^*(G(r, s), \Omega^p(-a)) = 0$ *pour* $0 < a < l - p$.

(ii) *La même conclusion vaut pour* $0 < a \leqq l - p$, *aux exceptions suivantes près :* $H^*(G(3, 3), \Omega^3(-2))$, $H^*(G(2, r), \Omega^{r/2}(1 + r/2))$ *pour r pair, et de même pour* $G(r, 2) \simeq G(2, r)$.

Preuve. — Nous utiliserons le critère (3.4.1). Soient R, $\bar{R}$ comme en 3.4 avec $l(R) = p$. Posons $x = \inf(\bar{R}) - 1$, $y = \sup(R)$. On a $[1, x] \subset R$, $x + 1 \in \bar{R}$ donc $(R + a) \cap \bar{R} \neq \varnothing$ si $0 < a \leqq x$; on a $[y+1, r+s] \subset \bar{R}$, $y \in R$ donc $(R + a) \cap \bar{R} \neq \varnothing$ si $0 < a \leqq r + s - y$.

Supposons donc que $a > x$ et $a > r+s-y$. On a alors

$$\inf((\mathrm{R}+a)\cup\bar{\mathrm{R}})=\inf\bar{\mathrm{R}}=x+1$$
$$\sup((\mathrm{R}+a)\cup\bar{\mathrm{R}})=\sup(\mathrm{R}+a)=y+a$$

et $(\mathrm{R}+a)\cup\bar{\mathrm{R}}\subset[x+1, y+a]$ a au plus $y-x+a$ éléments.

Les paires (i, j) avec $j=x+1$, $i\in\mathrm{R}-[1, x]$, ainsi que les paires (i, j) avec $i=y$, $j\in\bar{\mathrm{R}}-[y+1, r+s]$, vérifient $i\in\mathrm{R}$, $j\in\bar{\mathrm{R}}$, $j < i$. La paire (y, x) est comptée deux fois. On a donc

$$l(\mathrm{R})\geqq(r-x)+(s-(r+s-y))-1=y-x-1.$$

Il y a égalité si et seulement si R est de la forme

$$\mathrm{R}=[1, x]\cup[x+2, r]\cup\{y\},\ \mathrm{R}\neq[1, r]. \tag{3.5.1}$$

Si la condition (i) est remplie, on a donc

$$0 < a < (r+s-1)-(y-x-1)=(r+s)-(y-x)$$

et

$$\#((\mathrm{R}+a)\cup\bar{\mathrm{R}}) < (y-x)+[(r+s)-(y-x)]=r+s,$$

d'où $(\mathrm{R}+a)\cap\bar{\mathrm{R}}\neq\varnothing$ comme promis.

Prouvons (ii). Si l'une des inégalités $a\leqq l-p$, $l(\mathrm{R})\geqq y-x+1$ est stricte, l'argument ci-dessus continue à s'appliquer. On peut supposer, et on suppose, que $a=(r+s)-(y-x)$ et $l(\mathrm{R})=y-x-1$. En particulier, R a la forme (3.5.1). Si $x=0$, on a $a\leqq r+s-y$. Si $y=r+s$, on a $a\leqq x$. Ces cas ont déjà été traités : on peut supposer et on suppose que $x\neq 0$, $y\neq r+s$. On a $1\leqq x\leqq r-1$, $r+1\leqq y\leqq r+s-1$.

Supposons que $(\mathrm{R}+a)\cap\bar{\mathrm{R}}=\varnothing$ et montrons que ceci conduit aux cas d'exception de (ii). La translation $z\mapsto z+a$ envoie y sur $(r+s)+x$ et si $i\in[1, r+s]$, soit $i+a\in[1, r+s]$, soit $i+a-(r+s)\in[1, x]\subset\mathrm{R}$. Soient $q\mathrm{R}$ et $q\bar{\mathrm{R}}$ les images de R et $\bar{\mathrm{R}}$ dans $\mathbb{Z}/(r+s)$. Puisque $(\mathrm{R}+a)\cap\bar{\mathrm{R}}=\varnothing$, on a donc $q\mathrm{R}+a\subset q\mathrm{R}$ d'où $q\mathrm{R}+a=q\mathrm{R}$ et $q\bar{\mathrm{R}}+a=q\bar{\mathrm{R}}$.

Appelons « composantes connexes » de R (resp. $q\mathrm{R}$) les plus grands intervalles (resp. images d'intervalles) contenus dans R (resp. $q\mathrm{R}$). Les composantes connexes de $q\mathrm{R}$ sont les images de celles de R. Par (3.5.1), R a 2 ou 3 composantes connexes. La translation $z\mapsto z+a$ permute les composantes connexes de $q\mathrm{R}$, et envoie celle de y dans la suivante, celle de x. Le complément $q\bar{\mathrm{R}}$ a le même nombre de composantes connexes, et elles sont permutées de même.

Si R a 3 composantes, la composante de y est réduite à y et chaque composante a 1 élément. De même, x est une composante de $\bar{\mathrm{R}}$ et chaque composante de $\bar{\mathrm{R}}$ à 1 élément : on a $r=s=3$, $\mathrm{R}=\{1, 3, 5\}$ et $a=2$. C'est le premier cas d'exception. On a $l(\mathrm{R})=3$.

Supposons que R a deux composantes connexes. Deux cas : $x=r-1$ et $y=r+1$. Si $x=r-1$, la composante de y est réduite à y et chaque composante a 1 élément. On a $\mathrm{R}=\{1, y\}$ et la translation $z\mapsto z+a$ permute 1 et y dans $\mathbb{Z}/(r+s)$: on a $r=2$, s pair,

$R=\left\{1,\, 2+\frac{s}{2}\right\}$. Si $y=r+1$, la composante de x dans $\bar{R}$ est réduite à x, et de même r est pair, $s=2$, $R=\left[1,\, \frac{r}{2}\right]\cup\left[\frac{r}{2}+2,\, r+1\right]$. C'est le deuxième cas d'exception.

D'après 3.1, cette proposition a le corollaire :

3.6. Corollaire. — *Soient* $D \subset G(r, s)$ *le diviseur définit par l'annulation d'une section de* $\mathcal{O}(d)$, U *l'ouvert complémentaire et* $\mu=[(r+s-1)/d]$. *Aux cas d'exception près ci-dessous,* $H_c^*(U)$ *est de filtration de Hodge* $\geqq \mu$. *Les exceptions sont* $G(3, 3)$ *et* $G(2, r) \simeq G(r, 2)$, *avec* $d=1$, *où la filtration de Hodge est* $\geqq \mu-1$.

3.7. Remarque. — Le théorème 2, dans le cas particulier où $X=\mathbb{P}^n$, permet de représenter une classe de cohomologie dans $H^*(U, \mathbb{C})$ par une forme différentielle holomorphe sur U avec un pôle d'ordre contrôlé sur D. Ce fait est utilisé dans Dimca ([5], [6]) pour relier les nombres de Betti et le polynôme d'Alexander d'une hypersurface à singularités isolées à la déficience de systèmes linéaires associés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Ax, *Zeroes of polynomials over finite fields*, Am. J. Math., 86, 1964, p. 255-261.

[2] A. Borel et F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Am. J. Math., 80, 1958, p. 458-538.

[3] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math., 66, 1957, p. 203-248.

[4] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes Math., 163, Springer, 1970.

[5] A. Dimca, *Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems*, Duke Math. J., 60, 1990, p. 285-298.

[6] A. Dimca, *Alexander polynomials for projective hypersurfaces*, preprint MPI, 1989.

[7] Ph. Du Bois, *Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière*, Bull. SMF, 109, 1981, p. 41-81.

[8] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, 29, 1966, p. 95-103.

[9] P. A. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals I*, Ann. Math., 90, 3, 1969, p. 460-495.

[10] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math., 79, 1 and 79, 2, 1964, p. 109-325.

[11] N. Katz, *On a theorem of* Ax, Am. J. Math., 93, 2, 1971, p. 485-499.

[12] B. Kostant, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. Math., 74, 1961, p. 329-387.

[13] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration*, Ann. Math., 98, 1, 1973, p. 58-95.

[14] D. Snow, *Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces*, Math. Ann., 276, 1986, p. 157-176.

[15] D. SNOW, *Vanishing theorems on compact hermitian symmetric spaces*, Math. Z., 198, 1988, p. 1-20.
[SGA 7 (t. 2)] P. DELIGNE et N. KATZ, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lect. Notes Math., 340, Springer, 1973.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1990).

P. DELIGNE,
A. DIMCA,
Institute for Advanced Study,
School of Mathematics,
Princeton, New Jersey, USA.