Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 34, 2001, p. 789 à 816.

LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE POUR $\mathrm{GL}(n, F)$ MODULO ℓ QUAND $\ell \neq p,\ \ell > n$

PAR MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

RÉSUMÉ. – Soit F un corps p-adique. Nous allons démontrer que la conjecture de Langlands locale entre les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}(n, F)$ et les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil W_F est compatible avec la réduction modulo ℓ quand $\ell \neq p, \ell > n$.

ABSTRACT. – Let F be a p-adic field. We will prove that the local Langlands conjecture between the supercuspidal irreducible $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-representations of $\mathrm{GL}(n, F)$ and the irreducible $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-representations of dimension n of the Weil group W_F is compatible with the reduction modulo ℓ when $\ell \neq p, \ell > n$.

Soient p un nombre premier, F un corps local non archimédien de corps résiduel $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, ayant q éléments, $\overline{F}$ une clôture algébrique séparable de F, W_F le groupe de Weil de $\overline{F}/F$, et W_F^{ab} le plus grand quotient abélien séparé de W_F. La loi de réciprocité de la théorie du corps de classes est un isomorphisme topologique $F^* \simeq W_F^{ab}$; on la normalise, de sorte que l'inverse Fr^{-1} d'un Frobenius arithmétique corresponde à une uniformisante p_F de F^*. La conjecture de Langlands locale est une généralisation de la loi de réciprocité.

Soient ℓ un nombre premier distinct de p, $1 \leqslant n$ un entier, $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques, $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ l'anneau de ses entiers, $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ le corps résiduel de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$: une clôture algébrique du corps fini à ℓ éléments. Posons $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ ou $R = \overline{\mathbf{F}}_\ell$; notons $\mathrm{Scusp}_R(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles supercuspidales (à ne pas confondre avec cuspidales si $R = \overline{\mathbf{F}}_\ell$) de $G := \mathrm{GL}(n, F)$, et $\mathrm{Irr}_R(W)(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles du groupe de Weil W_F, de dimension n.

La conjecture de Langlands locale concerne des représentations complexes ; on se ramène à des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations, en fixant une racine carrée α de q dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$, et un isomorphisme entre $\mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, envoyant $\sqrt{q}$ sur α. Par la conjecture de Langlands locale (démontrée par Laumon–Rapoport–Stuhler si F est de caractéristique > 0 et par Harris–Taylor [8] et Henniart [9] si F est de caractéristique 0), il existe une bijection entre $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G)$ et $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(W)(n)$, invariante par les automorphismes de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ fixant α, respectant les fonctions L et les facteurs ε de paires ; on l'appelle la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$.

Si $\ell > n$ et F de caractéristique 0, on montrera que la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ est compatible avec la réduction modulo ℓ, et que sa réduction modulo ℓ donne une bijection (unique) entre $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$ et $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$; on l'appellera la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

On obtiendra les résultats nouveaux suivants pour $\ell > n$ et F de caractéristique 0 :

0012-9593/01/06/

– Les restrictions aux éléments elliptiques des caractères de $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ sont linéairement indépendantes,
– Le changement de base [1] et l'induction automorphe [7] pour les représentations supercuspidales sont compatibles à la réduction modulo ℓ.

Il y a quelques années, j'avais étudié les correspondances de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ dans le cas $n = 2$ [12,13], et conjecturé la correspondance locale de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ [14], en pensant que sa démonstration serait une conséquence de la description de la correspondance de Langlands avec les types (c'est certainement vrai, Bushnell et Henniart ont déja beaucoup de résultats), et de la classification des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F)$. La démonstration est née de la conviction de Michael Harris que l'on avait assez d'informations pour démontrer la correspondance locale de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$. L'induction automorphe de Henniart–Herb et les calculs de germes et de transformées de Fourier d'intégrales orbitales, qui impliquent que $\ell > n$ est le "cas régulier de l'analyse harmonique modulo ℓ" pour un groupe réductif p-adique de type A_{n-1} [22], jouent un rôle essentiel.

1. Le théorème principal

Une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation de longueur finie π de G d'espace V, est dite *entière* si V contient un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-sous-module libre L, contenant une base de V, stable par G, de type fini comme $\overline{\mathbf{Z}}_\ell G$-module. On dit que L est une *structure entière* de π.

La représentation $L \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$ de G sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ est de longueur finie, et sa semi-simplifiée ne dépend pas du choix de L [15, II.5.11]. On l'appelle *la réduction modulo ℓ de π*, et on la note $r_\ell \pi$.

Si π et π' sont deux $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations de G, de longueur finie, entières, de réductions modulo ℓ isomorphes, on note $\pi \equiv \pi'$.

On utilise les mêmes notations pour W_F (le cas galoisien).

Pour simplifier, on supprime l'indice R lorsque $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, on identifie π à son espace V ou à sa classe d'isomorphie. Si $\pi \in \mathrm{Scusp}(G),\ \sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ se correspondent par la bijection de Langlands locale, on note $\pi \leftrightarrow \sigma$ ou $\sigma \leftrightarrow \pi$.

Une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation (dans le cas galoisien ou non) entière π est dite *ℓ-irréductible* si $r_\ell \pi$ est irréductible. Dans le cas non galoisien, elle est dite *ℓ-supercuspidale* si $r_\ell \pi$ est irréductible et supercuspidale (n'est pas un *sous-quotient* d'une représentation induite parabolique propre). Une représentation entière $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ est toujours ℓ-irréductible, mais n'est pas toujours ℓ-supercuspidale [15, III.1.1 et III.5.10]. Une représentation entière $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ n'est pas toujours ℓ-irréductible.

THÉORÈME PRINCIPAL 1.1. – *Soient $\pi, \pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$, correspondant à $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ par la bijection de Langlands locale sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, $\pi \leftrightarrow \sigma,\ \pi' \leftrightarrow \sigma'$.*

(1) *σ est entière si et seulement si π est entière.*
Supposons les représentations entières, $\ell > n$, et F de caractéristique 0, alors
(2) *σ est ℓ-irréductible si et seulement si π est ℓ-supercuspidale,*
(3) *$\sigma \equiv \sigma'$ si et seulement si $\pi \equiv \pi'$.*

La propriété (1) est facile (2.1). Le théorème permet de définir une correspondance entre $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ et $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$ par réduction modulo ℓ, car les représentations de $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ et de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$ se relèvent à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On dit que $\pi \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$ sont en correspondance de Langlands, s'il existe $\pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$ et $\sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ se correspondant par la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, telles que $r_\ell(\pi') = \pi,\ r_\ell(\sigma') = \sigma$.

THÉORÈME 1.2. – *La correspondance de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ définie par réduction modulo ℓ est une bijection entre $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$.*

La bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ se prolonge en une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations semi-simples de dimension n de W_F, sur l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles supercuspidales des sous-groupes de Levi de G, modulo conjugaison par G.

La partie (2) du théorème principal admet la généralisation suivante. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$. Il existe une représentation $\rho \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(L)$ d'un sous-groupe de Levi $L \simeq \prod_i \mathrm{GL}(n_i, F)$ de G tel que π est un sous-quotient de l'induite parabolique de $\rho = \bigotimes_i \rho_i$. La somme $\sum_i \rho_i$ (dans le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\bigcup_{m\geqslant 1} \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(\mathrm{GL}(m, F)))$ ne dépend que de π et s'appelle le *support supercuspidal* de π [17, 5.4].

THÉORÈME 1.3. – *Supposons* $\ell > n$ *et* F *de caractéristique* 0. *Soient* $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$, $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ *entières, et en correspondance de Langlands* $\pi \leftrightarrow \sigma$. *Alors* $r_\ell(\sigma)$ *et le support supercuspidal de* $r_\ell(\pi)$ *se correspondent par la bijection de Langlands locale sur* $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

La *démonstration* de cette généralisation a été rajoutée au texte original, à la demande du referee, en (6.2).

Le théorème 1.3 implique la conjecture de Langlands pour *toutes* les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ (appelée la conjecture de Deligne–Langlands dans [16]).

On sait que les bijections de Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ sont caractérisées par la conservation des facteurs L et ε de paires. Ce n'est probablement plus vrai pour les bijections de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$, à cause des congruences vérifiées par les facteurs L et ε de paires. Il est possible que cela reste vrai, en modifiant la définition des L, ε. C'est le cas pour $n = 2$ [20].

Ces deux questions intéressantes demandent des techniques très différentes de celles considérées ici, et ne seront pas développées dans cet article.

1.4. Le théorème principal est valable pour toute bijection $j = j_{n,F} : \mathrm{Scusp}(G) \to \mathrm{Irr}(W)(n)$, faisant partie d'un système de bijections

$$j_{m,E} : \mathrm{Scusp}\big(\mathrm{GL}(m, E)\big) \to \mathrm{Irr}(W_E)(m),$$

pour tout entier $1 \leqslant m$, et pour toute extension E/F contenue dans $\overline{F}$, non ramifiée, tels que $[E:F]m$ divise n, vérifiant :

(a) Pour $n = 1$, la bijection $j_{1,E}$ est donnée par l'isomorphisme de réciprocité du corps de classes.
(b) Le déterminant de $\sigma = j_{m,E}(\pi) \in \mathrm{Irr}(W_E)(m)$ correspond au caractère central de π, par $j_{1,E}$.
(c) Les bijections $j_{m,E}$ commutent avec la torsion par un caractère.
(d) Les bijections commutent avec l'induction (dite automorphe dans le cas non galoisien) ([11] Corollary 5 page 154).
(e) Les bijections $j_{m,E}$ sont $\mathrm{Gal}(E/F)$-équivariantes ([7] Proposition 6, page 111).

Toutes ces propriétés sont vérifiées par la correspondance locale de Langlands [2, 3.1] ; on connaissait l'existence de telles bijections depuis l'article de Harris [7].

Les paragraphes 2 à 5 seront consacrés à la démonstration du théorème principal. Le corollaire 1.2 et le théorème 1.3 seront démontrés dans le paragraphe 6.

On note O_F l'anneau des entiers de F, P_F l'idéal maximal de O_F, $p_F \in P_F$ une uniformisante (donc $P_F = O_F p_F$), $\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_F \in W_F$ un Frobenius tel que l'image de Fr^{-1} dans W_F^{ab} corresponde à p_F par l'isomorphisme de réciprocité.

2. Représentations

Le but de ce paragraphe est de montrer le (1) du théorème principal (facile), que le (3) du théorème principal implique le (2), et de montrer (3) lorsque aucun caractère non ramifié non trivial ne fixe σ, π. On peut supposer dans le chapitre 2 que la caractéristique de F est quelconque, la condition $(\ell, n) = 1$ n'apparaît que dans (2.8).

2.1. Représentation entière

Une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible π de G est entière, si et seulement si le caractère central de toute représentation irréductible dans le support supercuspidal de π est entier [15, III.4.11].

Un caractère (lisse) $\omega : F^* \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$ s'identifie à un caractère de W_F (par l'isomorphisme de réciprocité) ou de G (par le déterminant). On indique par l'indice ω que l'on considère des représentations de G de caractère central ω, ou de W_F de déterminant ω. La bijection de Langlands induit une bijection $\mathrm{Scusp}_\omega(G) \to \mathrm{Irr}_\omega(W)(n)$ par la propriété 1.4.b) ; ces représentations sont entières, si et seulement si ω est entier, si et seulement si $\omega(p_F) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$. Ceci démontre le (1) du théorème principal 1.1.

Un caractère entier dont la réduction modulo ℓ est triviale sera appelé un ℓ-caractère.

2.2. Torsion par un caractère non ramifié

Soit R un corps algébriquement clos et $\chi : F^* \to R^*$ un caractère de F^*. On dit que χ est non ramifié si χ est trivial sur O_F^*, et que χ est modérément ramifié si χ est trivial sur $1 + P_F$. Pour $r \in R^*$, on note ν_r le caractère non ramifié de F^* tel que

$$\nu_r(up_F) = r$$

pour toute unité $u \in O_F^*$, i.e. pour *toute* uniformisante $up_F \in F^*$.

Soient $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ (resp. $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$). Le groupe $X(\pi)$ (resp. $X(\sigma)$) des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractères non ramifiés χ de F^* tels que $\pi \otimes \chi \simeq \pi$ (resp. $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma$) est contenu dans le groupe cyclique d'ordre n formé des χ tels que $\chi^n = 1$; il est caractérisé par son ordre $f(\pi)$ (resp. $f(\sigma)$).

Si π, σ sont en correspondance de Langlands $\pi \leftrightarrow \sigma$, alors

$$f(\sigma) = f(\pi)$$

car la correspondance de Langlands est une bijection compatible avec la torsion par un caractère (la propriété (c)).

2.3. Critère numérique

Soient $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ entières. On va donner un critère numérique permettant de reconnaître si la réduction modulo ℓ de π est supercuspidale (resp. σ est irréductible). Ce critère dépend de $f(\pi), m(\pi)$ (resp. $f(\sigma), m(\sigma)$), où $m(\pi)$ (resp. $m(\sigma)$) est le nombre d'éléments de l'ensemble fini

- $B(\pi)$ des $\pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$ telles que $\pi' \equiv \pi$ et de même caractère central sur l'uniformisante p_F,
- resp. $B(\sigma)$ des $\sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$, telles que $\sigma' \equiv \sigma$ de même déterminant sur le Frobenius arithmétique Fr (ou son inverse).

Le (3) du théorème principal implique que

$$m(\pi) = m(\sigma)$$

si π, σ sont en correspondance de Langlands $\pi \leftrightarrow \sigma$. Notons $v_\ell(m)$ la valuation ℓ-adique d'un entier non nul m.

PROPOSITION. – *On a*
(1) $m(\pi) \leqslant \ell^a$ *où* $a = v_\ell(n/f(\pi)) + v_\ell(q^{f(\pi)} - 1)$ *avec égalité si et seulement si* π *est* ℓ*-supercuspidale.*
(2) $m(\sigma) \leqslant \ell^b$ *où* $b = v_\ell(n/f(\sigma)) + v_\ell(q^{f(\sigma)} - 1)$ *avec égalité si et seulement si* σ *est* ℓ*-irréductible.*

La démonstration est donnée en (2.7) pour π. Un énoncé un peu plus faible pour σ est démontré en (2.7). Il suffit pour montrer que dans le théorème principal, (3) implique (2). Il est clair que (2), (3), et la proposition pour π impliquent la proposition pour tout σ.

2.4. Types de Bushnell–Kutzko

Soient $\pi, \pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$, entières, telles que $\pi \equiv \pi'$. Alors, par [15, III.4.26], il existe une donnée de Bushnell–Kutzko $(E, J, J_p, \Lambda, \kappa, \rho)$ définissant π, et une donnée de Bushnell–Kutzko $(E, J, J_p, \Lambda', \kappa, \rho')$ définissant π', telles que $\pi = \mathrm{ind}_{G,E^*J}\,\Lambda$, $\pi' = \mathrm{ind}_{G,E^*J}\,\Lambda'$, (induites à support compact). Par définition, E/F est une extension de corps commutatifs, contenue dans $\overline{F}$, d'indice de ramification e, de degré résiduel f, de degré ef divisant $n = efd$. On note $e = e_\pi, f = f_\pi, d = d_\pi$.

J est un sous-groupe de G, ouvert, compact, normalisé par $E^* \subset G$, de radical pro-p-nilpotent J_p, et

$$J/J_p \simeq \mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f}). \tag{2.4.1}$$

κ est une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation de J, dont la restriction à J_p est irréductible.

$\rho \equiv \rho'$ sont deux $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})$, de même réduction modulo ℓ, identifiées à des représentations irréductibles de J triviales sur J_p.

$\Lambda \equiv \Lambda'$ sont des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations entières de E^*J (des types étendus), de restrictions à J irréductibles (des types) :

$$\Lambda|_J = \kappa \otimes \rho, \qquad \Lambda'|_J = \kappa \otimes \rho'.$$

Le groupe F^* agit sur Λ par le caractère central $\omega = \omega_\pi$ de π. On sait que :

π est ℓ-supercuspidale, si et seulement si ρ est ℓ-supercuspidale, si et seulement si $r_\ell\pi$ a une enveloppe projective de longueur finie dans $\mathrm{Mod}_{r_\ell\omega}(G)$ [15, III.5.16].

$r_\ell\pi$ est irréductible et cuspidale ; toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de G s'obtient par le procédé précédent [15, III.5.10].

e_π, f_π, d_π ne dépendent que de la réduction de π modulo ℓ [15, III.4.29]. On a [15, III.5.11]

$$f(\pi) = f_\pi d_\pi = n/e_\pi. \tag{2.4.2}$$

Cette égalité montre avec (2.4.1) que les trois propriétés (a), (b), (c) suivantes sont équivalentes :
(a) $f(\pi) = 1$,
(b) l'extension E/F est totalement ramifiée de degré n,
(c) $J/J_p \simeq \mathbf{F}_q^*$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, ρ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractère de $\mathbf{F}_q^*$; un caractère est ℓ-supercuspidal par définition. On a donc :

LEMME. – *Si* $f(\pi) = 1$*, alors* π *est* ℓ*-supercuspidale.*

2.5. Dimensions

La représentation $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ est le produit d'un caractère non ramifié et d'une représentation sur laquelle p_F agit trivialement. Supposons que p_F agit trivialement sur π. Un sous-groupe d'indice fini H de $1+P_F$ agit trivialement sur π donc aussi sur le type étendu Λ. On note

$$Z = p_F^{\mathbf{Z}} H.$$

Ainsi Λ s'identifie à une représentation d'un groupe fini $E^* J/Z$. Le lemme suivant sera utile en (3.2) et (3.5).

LEMMA 2.5.1. – *Les valuations ℓ-adiques de $e(q^{n/e}-1)$ et de $|E^* J/Z| \dim \Lambda^{-1}$ sont égales.*

Démonstration ([15, III.4.28]). – Comme $(p,\ell)=1$, on peut négliger p dans les calculs. Si a, b sont deux nombres supernaturels non nuls, on écrira

$$a \sim b$$

si le quotient a/b appartient à $p^{\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}}$. Le choix du sous-groupe H n'intervient pas car $|(1+P_F)/H| \sim 1$. On a $\dim \Lambda = \dim \kappa \dim \rho$; la dimension de κ est une puissance de p donc $\dim \Lambda \sim \dim \rho$; la dimension d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_q)$ est la partie première à p dans $|\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_q)|(q^n-1)^{-1}$. Avec (2.4.1)

$$\dim \Lambda \sim |\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})| \bigl(q^{fd}-1\bigr)^{-1} = |\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})| \bigl(q^{n/e}-1\bigr)^{-1},$$

$$|F^* J/Z| \sim |\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})|.$$

Le groupe $F^* J$ est distingué dans le groupe $E^* J$, de quotient, isomorphe à $E^*/F^* O_E^*$, cyclique d'ordre e ; et

$$|E^* J/Z| \sim e |\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})|. \qquad \square$$

En particulier, si π est ℓ-supercuspidale, on déduit de la proposition (2.3) que

$$m(\pi) |E^* J/Z|^{-1} \dim \Lambda^{-1} \in \mathbf{Z}_\ell^* \tag{2.5.2}$$

est une unité ℓ-adique.

2.6. Représentations irréductibles de W_F

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq p$. La théorie de Clifford (voir le chapitre 4) permet de décrire une représentation $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(W_F)(n)$ de différentes façons (formules (2.6.3), (2.6.3), (2.6.4)).

On choisit, dans la restriction de σ au groupe de ramification sauvage P, une représentation irréductible $\nu \subset \sigma|_P$; on note E/F l'extension modérément ramifiée telle que W_E est le stabilisateur de ν. Comme P est normal dans W_F et que σ est irréductible, la dimension de ν, l'indice de ramification et le degré résiduel de E/F ne dépendent que de σ ; on les note $\delta = \delta_\sigma,\ e = e_\sigma,\ f = f_\sigma$. On note $\mathrm{ind}_{F,E}$ l'induction de W_E à W_F. On choisit un prolongement ρ de ν à W_E [16, 1.19]. Soit σ_{mr} une représentation irréductible modérément ramifiée de W_E telle que

$$\sigma = \mathrm{ind}_{F,E}\, \rho \otimes \sigma_{mr}. \tag{2.6.1}$$

Une fois que ρ est choisie, σ_{mr} est unique ; sa dimension ne dépend que de σ, on la note $d = d_\sigma$. On dit que $\delta_\sigma, d_\sigma, e_\sigma, f_\sigma$ sont les invariants de σ.

Si $\varepsilon : W_F \to \{\pm 1\}$ est le signe de la permutation de W_F sur W_F/W_E, et si $t : W_F^{ab} \to W_E^{ab}$ est le transfert, alors [5] :

(2.6.2) $$\det \sigma(x) = \varepsilon(x)^{d\delta} \det(\rho \otimes \sigma_{mr})\bigl(t(x)\bigr).$$

La représentation $\sigma_{mr} = \mathrm{ind}_{E,E_d} \chi$ est induite d'un caractère modérément ramifié régulier χ de l'extension non ramifiée E_d/E de degré d [16, 1.11], et le caractère χ est unique modulo $\mathrm{Gal}(E_d/E)$. On a

(2.6.3) $$\sigma = \mathrm{ind}_{F,E_d} \rho_d \otimes \chi$$

où ρ_d est la restriction de ρ à W_{E_d}.

Il est clair sur cette description (2.6.3) que *tout* $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell} W(n)$ *est la réduction modulo* ℓ *d'une* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-représentation de* W_F (nécessairement irréductible). La description (2.6.3) implique aussi facilement :

LEMME. – *Soit* $r \in R^*$. *On a* $\sigma \simeq \sigma \otimes \nu_r$ *si et seulement si* $r^{fd} = 1$.

Démonstration. – La restriction à W_E du caractère non ramifié $\nu_r = \nu_r^F$ de W_F est le caractère ν_s^E où $s = r^{fd}$, car fd est le degré résiduel de l'extension E_d/F. On a donc

$$(\mathrm{ind}_{F,E_d} \rho_d \otimes \chi) \otimes \nu_r^F \simeq \mathrm{ind}_{F,E_d}\bigl(\rho_d \otimes \chi \nu_s^E\bigr).$$

On en déduit que $\sigma \simeq \sigma \otimes \nu_r$ si et seulement si $\chi \nu_s^E$ est $\mathrm{Gal}(E_d/E)$-conjugué à χ. Ceci équivaut à $s = 1$. $\square$

Supposons $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Le lemme implique que le nombre $f(\sigma)$ de caractères non ramifiés χ de W_F tels que $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma$ est

(2.6.4) $$f(\sigma) = f_\sigma d_\sigma = n/(\delta_\sigma e_\sigma).$$

Notons que $e_\sigma \sim n/f(\sigma)$ (égalité modulo $p^{\mathbf{Z}}$). La représentation semi-simple $r_\ell(\sigma)$ est décrite en (6.2). Elle est réductible, si et seulement si la représentation $r_\ell(\sigma_{mr})$ est réductible, si et seulement si le caractère $r_\ell(\chi)$ n'est pas régulier pour l'extension E_d/E.

LEMME. – *Si* $f(\sigma) = 1$, *alors* σ *est* ℓ*-irréductible.*

Démonstration. – σ_{mr} est un caractère par (2.6.4) ; évidemment σ_{mr} est ℓ-irréductible. $\square$

Supposons $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, et soient $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Irr}(W_F)(n)$ entières. Il est utile pour (2.7) de décrire la congruence $\sigma \equiv \sigma'$ plus en détail.

Si $\sigma \equiv \sigma'$ on peut choisir le même E et le même ρ pour σ et pour σ', et les représentations σ et σ' ont les mêmes invariants.

Supposons que σ et σ' ont le même E et le même ρ. L'unicité de $\sigma_{mr}, \sigma'_{mr}$ montre que les congruences $\sigma \equiv \sigma'$ et $\sigma_{mr} \equiv \sigma'_{mr}$ sont équivalentes. Soient χ, χ' les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractères modérément ramifiés de E_d^* réguliers sur E induisant $\sigma_{mr}, \sigma'_{mr}$. On choisit une uniformisante p_{E_d} de E_d qui correspond par l'isomorphisme de réciprocité à l'inverse d'un Frobenius arithmétique Fr_{E_d}. Le caractère χ est le produit d'un caractère non ramifié $\nu_s^{E_d}$ où

$$s = \chi(p_{E_d}) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*,$$

et d'un caractère modérément ramifié de E_d^* trivial sur p_{E_d}. Comme $E_d^* = p_{E_d}^{\mathbf{Z}} \times O_{E_d}^*$, le dernier caractère s'identifie à un caractère de $(O_{E_d}/P_{E_d})^* \simeq \mathbf{F}_{q^{fd}}^*$. Par dualité le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractère de $\mathbf{F}_{q^{fd}}^*$ s'identifie à un élément $x \in \mathbf{F}_{q^{fd}}^*$. Cette identification n'est pas canonique mais elle est équivariante pour l'action des groupes de Galois et x est de degré d sur $\mathbf{F}_{q^f}^*$. Modulo ℓ, x s'identifie à sa partie ℓ-régulière $z \in \mathbf{F}_{q^{fd}}^*$, i.e. l'ordre de z est premier à ℓ et l'ordre de x/z est une puissance de ℓ. On note

$$\chi = \chi(s, x) \tag{2.6.5}$$

avec $s \in R^*, x \in \mathbf{F}_{q^{fd}}^*$ de degré d sur $\mathbf{F}_{q^f}^*$ unique modulo $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^{fd}}^*/\mathbf{F}_{q^f}^*)$. Si $\chi' = \chi(s', x')$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(a) $\sigma \equiv \sigma'$,

(b) $\sigma_{mr} \equiv \sigma'_{mr}$,

(c) $s \equiv s'$ et les parties ℓ-régulières z, z' de x, x' sont conjuguées sur $\mathbf{F}_{q^f}^*$.

Ainsi la restriction de $\chi'\chi^{-1}$ au groupe des unités $O_{E_d}^*$ est d'ordre fini, divisant la puissance de ℓ divisant $q^{fd} - 1$.

Le transfert $t : W_F^{ab} \to W_{E_d}^{ab}$ correspond à l'inclusion $F^* \subset E_d^*$ par l'isomorphisme de réciprocité. On a $p_F = p_{E_d}^e u$ pour une unité $u \in O_{E_d}^*$. Le déterminant vérifie (2.6.2)

$$\det \sigma(\mathrm{Fr}_F) = \epsilon^\delta s^e \chi(u) \tag{2.6.6}$$

avec le même signe ϵ pour σ, σ'.

Terminons ce paragraphe en donnant une autre forme de σ utile en (2.9). Notons F_{fd}/F l'extension non ramifiée de degré $f(\sigma) = fd$ contenue dans E_d, et

$$\tau = \mathrm{ind}_{F_{fd}, E_d}(\rho_d \otimes \chi) \tag{2.6.7}$$

l'induite de $\rho_d \otimes \chi$ à $W_{F_{fd}}$. L'extension E_d/F_{fd} est totalement ramifiée, donc $f(\tau) = 1$ par (2.6.4). On a

$$\sigma = \mathrm{ind}_{F, F_{fd}}\, \tau. \tag{2.6.8}$$

2.7. Preuve de (2.3)

Le cas non galoisien. Soit $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ entière. On va compter le nombre $m(\pi)$ de $\pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$ entières, telles que $\pi' \equiv \pi$, et $\omega_\pi(p_F) = \omega_{\pi'}(p_F)$.

On décrit π avec la théorie des types de Bushnell–Kutzko, comme en (2.4). Alors $m(\pi)$ est le nombre de types étendus Λ' de E^*J tels que $\Lambda' \equiv \Lambda$, et l'uniformisante p_F agit sur Λ et Λ', par $\omega_\pi(p_F)$. L'unicité du type $\Lambda|_J$, et la description de Λ à partir de $\Lambda|_J$ [15, III.4.27], montrent que $m(\pi)$ est le nombre de ℓ-caractères du groupe E^*J/F^*J cyclique d'ordre $e = n/f(\pi)$, multiplié par le nombre $m(\rho)$ de $\rho' \in \mathrm{Scusp}\,\mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})$ telles que $\rho' \equiv \rho$. Donc $m(\pi)$ est le produit de $m(\rho)$ et de la puissance de ℓ divisant $n/f(\pi)$.

Le nombre $m(\rho)$ se calcule en utilisant la construction de Green des représentations irréductibles supercuspidales.

LEMMA 2.7.1. – *Soit $\rho \in \mathrm{Scusp}\,\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_q)$; le nombre $m(\rho)$ de $\rho' \in \mathrm{Scusp}\,\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_q)$ telles que $\rho' \equiv \rho$ est inférieur ou égal nombre de ℓ-éléments de $\mathbf{F}_{q^n}^*$; il lui est égal si et seulement si ρ est ℓ-supercuspidale.*

Démonstration. – Le résultat se déduit de [15, III.2].

Notons $\Sigma := \mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^n}/F_q)$, et $\Sigma_d := \mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^n}/F_{q^d})$ pour tout entier $d \geqslant 1$ divisant n. On utilise que :

1) Les Σ-orbites $\Sigma.t$ des éléments $t \in \overline{\mathbf{F}}_q^*$ de degré n sur $\mathbf{F}_q$ classifient les représentations $\rho(t) \in \mathrm{Scusp}\, GL(n, \mathbf{F}_q)$.

Soient $t \in \overline{\mathbf{F}}_q^*$ de degré n sur $\mathbf{F}_q$ de partie ℓ-régulière s de degré d sur $\mathbf{F}_q$, et $t' \in \overline{\mathbf{F}}_q^*$ de degré n sur $\mathbf{F}_q$ de partie ℓ-régulière s' de degré d' sur $\mathbf{F}_q$. Les entiers d, d' divisent n car $s, s' \in \mathbf{F}_{q^n}$.

2) On a $\rho(t) \equiv \rho(t')$ si et seulement si $\Sigma.s = \Sigma.s'$, et $\rho(t)$ est ℓ-supercuspidale si et seulement si le degré de s ne chute pas : $d = n$.

On voit que $m(\rho(t))$ est le nombre de Σ_d-orbites parmi les ℓ-éléments $y \in \mathbf{F}_{q^n}^*$ tels que sy est de degré n sur $\mathbf{F}_q$.

Si $d = n$, alors sy est de degré n sur $\mathbf{F}_q$ pour tout ℓ-élément $y \in \mathbf{F}_{q^n}^*$, et Σ_n est trivial ; donc $m(\rho(t))$ est le nombre de ℓ-éléments de $\mathbf{F}_{q^n}^*$ (la plus grande puissance de ℓ divisant $(q^n - 1)$).

Si $d < n$, alors l'action de Σ_d sur les ℓ-éléments de $\mathbf{F}_{q^n}^*$ n'est pas triviale (ts^{-1} est un ℓ-élément de $\mathbf{F}_{q^n}^*$ de degré n/d sur $\mathbf{F}_{q^d}$). A fortiori, $m(\rho(t))$ est strictement inférieur au nombre de ℓ-éléments de $\mathbf{F}_{q^n}^*$. $\square$

En appliquant le lemme à $\rho \in \mathrm{Scusp}\, \mathrm{GL}(d, \mathbf{F}_{q^f})$ et en utilisant que $fd = f(\pi)$ on obtient

$$m(\pi) \leqslant l^a, \qquad a \leqslant v_\ell\big(n/f(\pi)\big) + v_\ell\big(q^{f(\pi)} - 1\big)$$

avec égalité si et seulement si $r_\ell \pi$ est supercuspidale. La proposition (2.3) est démontrée dans le cas non galoisien.

Le cas galoisien est similaire. On va montrer une propriété un peu plus faible que la proposition 2.3 car on ne sait pas si l'on peut choisir les uniformisantes telles que $\chi(u) = 1$ et $p_F = p_{E_d}^e u$, dans la formule du déterminant (2.6.6). Soit $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ entière d'invariants e, f, d, δ comme en (2.6). On a $f(\sigma) = fd$ (2.6.4). Soit N un entier de valuation ℓ-adique $v_\ell(N) \geqslant v_\ell(q^{f(\sigma)} - 1)$. On va montrer que le nombre $m_N(\sigma)$ de $\sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ entières telles que

$$\sigma' \equiv \sigma, \qquad \det \sigma(\mathrm{Fr})^N = \det \sigma'(\mathrm{Fr})^N$$

vérifie :

LEMMA 2.7.2. – *On a $m_N(\sigma) \leqslant l^c$ où $c = v_\ell(N) + v_\ell(n/f(\sigma)) + v_\ell(q^{f(\sigma)} - 1)$ avec égalité si et seulement si σ est ℓ-irréductible.*

Démonstration. – Comme $\sigma' \equiv \sigma$, on décrit σ, σ' comme en (2.6.3), (2.6.5) avec le même ρ, E, les mêmes invariants, $s' \equiv s$ et les orbites de z, z' par le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^{fd}}/\mathbf{F}_{q^f})$ sont égales.

Le nombre $m(z)$ d'orbites possibles de z' est majoré par le nombre d'éléments de $\mathbf{F}_{q^{fd}}^*$ d'ordre une puissance de ℓ avec égalité si et seulement si z est de degré d sur $\mathbf{F}_{q^f}$ (i.e. si σ est ℓ-irréductible) comme dans le lemme (2.7.1).

On a $\det \sigma'(\mathrm{Fr}) = \det \sigma(\mathrm{Fr})(s'/s)^e \chi'(u)/\chi(u)$. Comme $\chi'(u)/\chi(u)$ est d'ordre une puissance de ℓ divisant $q^{f(\sigma)} - 1$, on a

$$\det \sigma'(\mathrm{Fr})^N = \det \sigma(\mathrm{Fr})^N (s'/s)^{eN}$$

car $v_\ell(N) \geqslant v_\ell(q^{f(\sigma)} - 1)$. Le nombre $m(s)$ de s' est égal à la puissance de ℓ divisant eN. On a $v_\ell(e) = v_\ell(n/f(\pi))$ car $e \sim n/f(\sigma)$ (2.6.4). On a $m_N(z) = m(z)m(s)$. $\square$

On peut définir $m_N(\pi)$ de façon analogue et démontrer (en utilisant l'unicité du type de Bushnell–Kutzko contenu dans π) : $m_N(\pi) \leqslant l^t$ où $t = v_\ell(N) + v_\ell(n/f(\pi)) + v_\ell(q^{f(\pi)} - 1)$ avec égalité si et seulement si π est ℓ-supercuspidale.

Si π, σ sont en bijection de Langlands $\pi \leftrightarrow \sigma$, alors $f(\pi) = f(\sigma)$ et le (3) du théorème principal implique $m_N(\pi) = m_N(\sigma)$. On en déduit que π est ℓ-supercuspidale si et seulement si σ est ℓ-irréductible. Donc dans le théorème principal (3) implique (2).

2.8. Le cas $f = 1$

On démontre facilement la partie essentielle (3) du théorème principal, sans restriction sur la caractéristique de F, mais en supposant $(\ell, n) = 1$, lorsque les représentations ne sont fixes par aucun caractère non ramifié non trivial. Cela résulte du lemme suivant et de ce que la correspondance de Langlands est compatible avec la torsion par un caractère (la propriété (c)).

LEMME. – *On suppose* $(\ell, n) = 1$. *Soient des représentations entières* $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$, $\pi, \pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$, *telles que* $f(\pi) = f(\sigma) = f(\pi') = f(\sigma') = 1$. *On a*
$\sigma \equiv \sigma'$ *si et seulement si* $\sigma = \sigma' \otimes \mu$ *pour un* ℓ*-caractère* μ *de* F^*,
$\pi \equiv \pi'$ *si et seulement si* $\pi = \pi' \otimes \mu$ *pour un* ℓ*-caractère* μ *de* F^*.

Démonstration. – Le sens “si” est évident. Démontrons le sens “seulement si”.

a) Préliminaire. Notons H (resp. H') le sous-groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ (resp. d'ordre premier à ℓp) contenues dans F^* ; on a

$$F^* = p_F^{\mathbf{Z}} \times H \times H' \times (1 + P_F), \qquad \mathbf{F}_q^* \simeq H \times H'.$$

Si E/F est une extension finie et totalement ramifiée, on a $E^* = p_E^{\mathbf{Z}} \times H \times H' \times (1 + P_E)$, et un ℓ-caractère de E^* est trivial sur $H' \times (1 + P_E)$. Si le degré $[E : F]$ de l'extension E/F est premier à ℓ, la norme $N_{E/F}$ restreinte au ℓ-groupe H (l'élévation à la puissance $[E : F]$) est une permutation de H, et tout ℓ-caractère de E^* se factorise par la norme $N_{E/F}$.

b) Le cas galoisien. Comme on l'a vu en (2.6), $\sigma \equiv \sigma'$ est équivalent à $\sigma = \mathrm{ind}_{F,E}\, \rho \otimes \chi$, $\sigma' = \mathrm{ind}_{F,E}\, \rho \otimes \chi'$ où E/F est une extension totalement ramifiée, χ, χ' sont des caractères modérément ramifiés de W_E, tels que $\chi\chi'^{-1}$ est un ℓ-caractère. Le caractère $\chi\chi'^{-1}$ de W_E s'identifie, par l'isomorphisme de réciprocité, à un caractère de E^*. Comme $[E : F]$ divise n et $(n, \ell) = 1$, par a), il existe un ℓ-caractère μ de F^* tel que $\chi\chi'^{-1} = \mu N_{E/F}$; comme $\mathrm{ind}_{F,E}(\tau \otimes \mu N_{E/F}) = (\mathrm{ind}_{F,E}\, \tau) \otimes \mu$ pour toute représentation τ de W_E, on a donc $\sigma = \sigma' \otimes \mu$.

c) Le cas non galoisien. Si $\pi \equiv \pi'$, avec les notations de (2.4) on a :

$$\pi = \mathrm{ind}_{G,E^*J}\, \Lambda, \qquad \pi' = \mathrm{ind}_{G,E^*J}\, \Lambda',$$

où $\Lambda \equiv \Lambda'$, E/F est totalement ramifiée de degré n, et ρ, ρ' sont des caractères de $\mathbf{F}_q^*$ tels que $\rho\rho'^{-1}$ est un ℓ-caractère. Il existe un ℓ-caractère ν de $\mathbf{F}_q^*$ tel que $\rho\rho'^{-1} = \nu^n$, car $(\ell, n) = 1$; on identifie ν à un ℓ-caractère de F^* trivial sur p_F, et via le déterminant $\det : G \to F^*$ à un caractère de G. La restriction à $E^*J = E^*J_p$ du caractère ν de G est triviale sur J_p puisque $(p, \ell) = 1$; le déterminant coïncide avec la norme $N_{E/F}$ sur E^*, qui est l'élévation à la puissance n sur H. Donc $\pi' \otimes \nu$ a pour type étendu $\Lambda' \otimes (\nu \det)|_{E^*J}$, et pour type $\kappa \otimes (\rho'\nu^n) = \Lambda|_J$.

En remplaçant π' par $\pi' \otimes \nu$, on se ramène à $\Lambda'|_J = \Lambda|_J$. Par [15, III.4.27.2], cela signifie que $\Lambda = \Lambda' \otimes \chi$ pour un caractère χ de E^*J/J, qui est un ℓ-caractère car $\Lambda \equiv \Lambda'$. On identifie χ à un ℓ-caractère de E^*. Comme dans le cas galoisien, comme $(\ell, [E : F]) = 1$, on a $\chi = \mu N_{E/F}$ pour un ℓ-caractère μ de F^* et $\pi' = \pi \otimes \mu$. $\square$

2.9. Réduction au cas $f = 1$

Pour tout entier $f \geqslant 1$, on note F_f/F l'extension non ramifiée de degré f, Σ_f son groupe de Galois (la notation est désormais différente de celle de (2.7.1)), ind_{F,F_f} l'induction de W_{F_f} à W_F dans le cas galoisien et l'induction automorphe [11] de $\mathrm{GL}(n/f, F_f)$ à $\mathrm{GL}(n, F)$ dans le cas non galoisien. Nous devons supposer F de caractéristique nulle pour la définition de l'induction automorphe.

Soient $\sigma \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ et $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ en bijection de Langlands $\sigma \leftrightarrow \pi$; posons pour l'énoncé du lemme ci-dessous

$$f = f(\sigma) = f(\pi)$$

(à ne pas confondre avec f_π, f_σ de (2.4) et (2.6)).

LEMME. – *Il existe des représentations $\sigma_f \in \mathrm{Irr}\, W_{F_f}(n/f)$ dans le cas galoisien, $\pi_f \in \mathrm{Scusp}\,\mathrm{GL}(n/f, F_f)$ dans le cas non galoisien, telles que*

$$\sigma = \mathrm{ind}_{F,F_f}\,\sigma_f, \quad \pi = \mathrm{ind}_{F,F_f}\,\pi_f, \quad \sigma_f \leftrightarrow \pi_f, \quad f(\sigma_f) = f(\pi_f) = 1.$$

Démonstration. – Dans le cas galoisien, on prend $\sigma_f = \tau$ comme en (2.6.7). Par (2.6.8) $\sigma = \mathrm{ind}_{F,F_f}\,\sigma_f$. Soit $\pi_f \leftrightarrow \sigma_f$ en bijection de Langlands ; on a alors $f(\pi_f) = 1$. La compatibilité de la bijection de Langlands avec l'induction (propriété (d)) montre que $\pi = \mathrm{ind}_{F,F_f}\,\pi_f$. □

Les orbites $\Sigma_f.\sigma_f, \Sigma_f.\pi_f$ des représentations σ_f, π_f pour Σ_f sont uniques et se correspondent par la propriété (e) de la bijection de Langlands.

Continuons la démonstration de (3) du théorème principal. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$, $\pi, \pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$, entières telles que $\pi \leftrightarrow \sigma, \pi' \leftrightarrow \sigma'$. Avec les notations ci-dessus, les trois congruences suivantes sont équivalentes

a) $\sigma \equiv \sigma'$,

b) $\Sigma_f.\sigma_f \equiv \Sigma_f.\sigma'_f$,

c) $\Sigma_f.\pi_f \equiv \Sigma_f.\pi'_f$.

En effet, les représentations σ_f, σ'_f sont ℓ-irréductibles (2.6), et par la théorie de Clifford, $\sigma \equiv \sigma'$ si et seulement si $r_\ell \sigma_f$ est isomorphe à un conjugué de $r_\ell \sigma'_f$ par Σ_f. La réduction modulo ℓ commute avec l'action de Σ_f. Donc $\sigma \equiv \sigma'$ si et seulement si $\Sigma_f.\sigma_f \equiv \Sigma_f.\sigma'_f$. La bijection de Langlands sur F_f est compatible avec l'action de Σ_f (propriété (e)), et le (3) du théorème principal a été montré dans le cas $f = 1$ en (2.8) ; donc $\Sigma_f.\sigma_f \equiv \Sigma_f.\sigma'_f$ si et seulement si $\Sigma_f.\pi_f \equiv \Sigma_f.\pi'_f$.

La démonstration du théorème principal sera achevée, si l'on démontre que

$$\pi \equiv \pi' \text{ si et seulement si } \Sigma_f.\pi_f \equiv \Sigma_f.\pi'_f.$$

C'est l'objet des paragraphes 3 à 5. Notre méthode, basée sur le travail de Herb et Henniart [11], utilise l'analyse harmonique modulaire, dans laquelle la restriction $\ell > n$ est, hélas, indispensable.

3. Indépendance linéaire des caractères sur les elliptiques

On suppose désormais F de caractéristique 0 et $\ell > n$.

Un élément de G est régulier s'il est semisimple et son centralisateur dans G est un tore. On note G^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de G. Un élément de G^{reg} est elliptique si son centralisateur est un tore compact modulo le centre. On note G^e l'ensemble des éléments elliptiques de G.

THÉORÈME 3.1. – *Les caractères des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles supercuspidales de G sur les éléments elliptiques de G sont linéairement indépendants.*

La démonstration de ce théorème occupe la suite du paragraphe 3.

Soit $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$. On supposera que l'uniformisante p_F et qu'un sous-groupe H d'indice fini de $1+P_F$ agissent trivialement sur π. Cela n'apporte aucune restriction, on s'y ramène en tordant par un caractère non ramifié. Comme en (2.5) on note

$$Z := p_F^{\mathbf{Z}} H$$

(c'est un sous-groupe d'indice fini du centre F^* de $G = \mathrm{GL}(n, F)$, et le centre de G/Z est fini). La représentation π est entière. On définit $m(\pi)$ comme en (2.3). L'action de Z sur les représentations de G considérées dans le chapitre 3 est supposée triviale.

3.2. Congruence dans le cas fini

On choisit une donnée de Bushnell–Kutzko de π comme en (2.4). Le type étendu $\Lambda \in \mathrm{Irr}\, E^*J$ de $\pi = \mathrm{ind}_{E^*J}^G \Lambda$ s'identifie à une représentation du sous-groupe ouvert compact E^*J/Z de G/Z. Le bloc du type étendu Λ dans $\mathrm{Irr}\, E^*J/Z$ est l'ensemble

$$\{\Lambda_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m(\pi)}$$

des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-types étendus de E^*J sur lesquels p_F agit trivialement, et tels que $\Lambda_i \equiv \Lambda$. Notons χ_{Λ_i} le caractère du type étendu Λ_i pour tout i. Pour tout $x \in E^*J$,

$$|E^*J/Z|^{-1} \dim \Lambda \sum_{1 \leqslant i \leqslant m(\pi)} \chi_{\Lambda_i}(x)$$

appartient à $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$, par la théorie des représentations des groupes finis [6, 7.4, 7.6].

Par (2.5.2), $m(\pi)|E^*J/Z|^{-1}(\dim \Lambda) \in \mathbf{Z}_\ell^*$ est une unité ℓ-adique, donc

LEMME. – $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m(\pi)} \chi_{\Lambda_i}(x) \in m(\pi)\overline{\mathbf{Z}}_\ell$.

3.3. Caractère sur G^e

Soit $\pi \in \mathrm{Scusp}\, G$ triviale sur Z. Le caractère χ_π de π est une fonction entière (à valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$) localement constante sur G^{reg}. Sa valeur sur G^e peut être calculée de deux façons.

1) Le caractère χ_π sur G^e de la représentation induite à support compact $\pi = \mathrm{ind}_{G,E^*J} \Lambda$ est relié au caractère χ_Λ de Λ (prolongé par 0 à tout G), par :

$$\chi_\pi(x) = \sum_{gE^*J} \chi_\Lambda\bigl(g^{-1}xg\bigr) \quad \bigl(x \in G^e\bigr)$$

la somme est prise sur l'ensemble fini des classes $gE^*J \subset G/E^*J$ telles que $g^{-1}xg \cap E^*J \neq \emptyset$ [10, lemma 19].

2) Pour $x \in G$, on note $G.x$ la classe de conjugaison de x dans G, et

$$I_{G.x}(f dg) := \int_{G/Z} f\bigl(g^{-1}xg\bigr)\, dg$$

pour toute mesure de Haar dg sur G/Z et toute fonction localement constante $f : G \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, lorsque cela a un sens ; on dit que $I_{G.x}(f dg)$ est l'intégrale orbitale de f sur x pour la mesure dg.

La représentation π de G/Z est compacte [15, I.7.2]. Les coefficients de Λ sont des coefficients de π. Le degré formel dg_π [15, I.8.4] (une mesure de Haar sur G/Z) restreint à E^*J/Z est égal au degré formel dg_Λ de Λ. Le degré formel d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible ρ d'un groupe profini X est la mesure de Haar sur X telle que le volume de X est égal à $\dim \rho$. On a donc

$$\mathrm{vol}(E^* J/Z, dg_\pi) = \dim \Lambda.$$

Soit $f_\pi : G \to \overline{\mathbf{Z}}_\ell$ un coefficient quelconque de π, entier (à valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$) et tel que $f_\pi(1) = 1$ (on peut prendre un coefficient de Λ avec cette propriété, ou utiliser [21, paragraphe 7]).

Le caractère χ_π sur G^e vérifie

$$\chi_\pi\big(x^{-1}\big) = I_{G.x}(f_\pi dg_\pi) \quad \big(x \in G^e\big).$$

On sait que [4, A.3.g, A.3.h, pages 57–60] f_π annule les intégrales orbitales régulières non elliptiques, et que

$$\mathrm{tr}\, \pi'(f_\pi dg_\pi) = \delta_{\pi,\pi'}$$

pour tout $\pi' \in \mathrm{Irr}(G/Z)$, où $\delta_{\pi,\pi'} = 1$ si $\pi \simeq \pi'$, et $\delta_{\pi,\pi'} = 0$ sinon.

3.4. Congruence pour les intégrales orbitales

Le bloc B de π dans $\mathrm{Irr}(G/Z)$ est formé des représentations ℓ-supercuspidales

$$\pi_i = \mathrm{ind}_{G,E^*J}\, \Lambda_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m(\pi)$$

pour les types Λ_i de (3.2). Elles ont le même degré formel dg_π car les $\Lambda_i \in \mathrm{Irr}(E^*J/Z)$ ont la même dimension (2.5.1). On note χ_{π_i} le caractère de π_i et l'on choisit un coefficient entier f_{π_i} de π_i tel que $f_{\pi_i}(1) = 1$ pour tout i. On note

$$\chi_B := \sum_{1 \leqslant i \leqslant m(\pi)} \chi_{\pi_i}, \qquad f_B := \sum_{1 \leqslant i \leqslant m(\pi)} f_{\pi_i}$$

leur somme. La fonction χ_B et les intégrales orbitales de f_B ne dépendent que du bloc B. En utilisant (3.2) et (3.3), on obtient :

LEMME. – *Pour tout $x \in G^e$,*

$$\chi_B\big(x^{-1}\big) = I_{G.x}(f_B dg_\pi) \in m(\pi)\overline{\mathbf{Z}}_\ell.$$

La fonction f_B annule les intégrales orbitales régulières non elliptiques, et

$$\mathrm{tr}_{\pi'}(f_B dg_\pi) = \delta_{r_\ell(\pi'), r_\ell(\pi)}$$

pour tout $\pi' \in \mathrm{Irr}(G/Z)$.

3.5. Congruence pour les intégrales orbitales fondamentales

Soit $x \in G^e$ elliptique. On va comparer l'intégrale orbitale $I_{G.x}(f dg_\pi)$ définie en (3.3) et un générateur $D_{G.x}(f dg/dt)$ du $\mathbf{Z}_\ell$-module libre formé par les $\mathbf{Z}_\ell$-mesures invariantes sur $G.x$ [18].

On choisit des $\mathbf{Z}[1/p]$-mesures invariantes [15, I.2.4] $dg, dt, dg/dt$ sur $X = G/Z, F(x)^*/Z, G/F(x)^*$ qui sont admissibles, i.e. engendrent le $\mathbf{Z}[1/p]$-module libre des $\mathbf{Z}[1/p]$-distributions invariantes sur $G/Z, F(x)^*/Z, G$ de support la classe de conjugaison $G.x$ de x. Une $\mathbf{Z}[1/p]$-mesure de Haar définit naturellement une R-mesure pour tout anneau commutatif intègre R où p est inversible. L'application qui associe à $f \in C_c^\infty(G/Z; \overline{\mathbf{Z}}_\ell)$ la valeur

$$D_{G.x}(f dg/dt) := \int_{G/F(x)^*} f\bigl(gxg^{-1}\bigr)\, dg/dt,$$

est une intégrale orbitale sur $G.x$. Elle est admissible, dans le sens où, par restriction, elle engendre le $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-module libre des $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-distributions invariantes sur G de support la classe de conjugaison $G.x$ de x. On a évidemment

$$I_{G.x}(f dg) = \mathrm{vol}\bigl(F(x)^*/Z, dt\bigr) D_{G.x}(f dg/dt).$$

L'algèbre $F(x)$ est un corps de degré n sur F ; on note e_x l'indice de ramification de $F(x)/F$. Avec la notation (2.3), on a modulo $p^{\mathbf{Z}}$

$$\mathrm{vol}\bigl(F(x)^*/Z, dt\bigr) \sim |F(x)^*/Z| \sim e_x\bigl(q^{n/e_x} - 1\bigr).$$

On a évidemment

$$dg/\,\mathrm{vol}(E^*J/Z, dg) = dg_\pi/\,\mathrm{vol}(E^*J/Z, dg_\pi).$$

On définit *le degré formel de π par rapport à dg* comme le quotient

$$d(\pi) := dg_\pi/dg = \frac{\dim \Lambda}{\mathrm{vol}(E^*J/Z, dg)}.$$

On rappelle que $m(\pi) = \ell^a$ avec

$$a = v_\ell\bigl(e_\pi\bigl(q^{n/e_\pi} - 1\bigr)\bigr) = v_\ell\left(\frac{\mathrm{vol}(E^*J/Z, dg)}{\dim \Lambda}\right)$$

par (2.3) car π est ℓ-supercuspidale, et (2.5.1). On a donc

$$v_\ell\bigl(d(\pi)\bigr) = -a.$$

On déduit de ces calculs :

LEMMA 3.5.1. – *Soit $x \in G^e$. Il existe une constante $d = d(x,\pi) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$, telle que*

$$I_{G.x}(f dg_\pi) = d\frac{e_x(q^{n/e_x} - 1)}{e_\pi(q^{n/e_\pi} - 1)} D_{G.x}(f dg/dt).$$

L'intégrale orbitale $I_{G.x}(f dg_\pi)$ est admissible, si et seulement si la valuation ℓ-adique de $e_x(q^{n/e_x} - 1)$ est égale à celle de $e_\pi(q^{n/e_\pi} - 1)$.

LEMMA 3.5.2. – *Supposons $\ell > n$. Alors $D_{G.x}(f_B dg/dt) \in m(\pi)\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ pour tout $x \in G^e$.*

Démonstration. – Les valeurs de la fonction f_B sont entières ainsi que la mesure de Haar dg/dt, donc $D_{G.x}(f_B\, dg/dt) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell$. Le lemme est donc vrai si $m(\pi) = 1$. Sinon $m(\pi) = \ell^a$ avec $a > 0$. On a $I_{G.x}(f_B\, dg_\pi) \in m(\pi)\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ par (3.4). La relation (3.5.1) montre qu'il suffit de montrer que

$$0 < a < v_\ell\bigl(e_x\bigl(q^{n/e_x} - 1\bigr)\bigr)$$

est impossible. La condition $\ell > n$ implique que l'on peut oublier e_π, e_x qui divisent n, et les inégalités s'écrivent

$$0 < v_\ell\big(q^{n/e_\pi} - 1\big) < v_\ell\big(q^{n/e_x} - 1\big).$$

Notons ε le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $q^\varepsilon \equiv 1 \mod \ell$. Pour tout entier $a \geqslant 1$, la valuation ℓ-adique de $q^a - 1$ est [15, III.0.4] :

– nulle si ε ne divise pas a,
– $v_\ell(q^\varepsilon - 1) + v_\ell(a/\varepsilon)$ si ε divise a, sauf dans le cas exceptionnel,
– $v_2(q-1) + v_2(a) + v_2(q+1) - 1$, dans le cas exceptionnel $\varepsilon = 1, \ell = 2, q \equiv 3 \bmod 4$.

Comme $\ell > n$, le cas exceptionnel où $\ell = 2$ ne se présente pas, et pour a divisant n, la valuation ℓ-adique de $q^a - 1$ est simplement

– nulle si ε ne divise pas a,
– $v_\ell(q^\varepsilon - 1)$ si ε divise a

Il n'y a que deux valeurs possibles, donc l'inégalité précédente à trois termes est impossible. □

3.6. Congruence sur les coefficients

On utilise maintenant le théorème de densité des intégrales orbitales régulières [22, F.17]. Le groupe G agit sur $C_c^\infty(G/Z, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ par conjugaison.

THÉORÈME. – *Supposons $\ell > n$ et F de caractéristique 0. Soit $f \in C_c^\infty(G/Z, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ telle que les intégrales orbitales régulières*

$$D_{G.x}(f dg/dt) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell \quad \big(x \in G^{reg}\big)$$

soient entières. Alors il existe $\phi \in C_c^\infty(G/Z, \overline{\mathbf{Z}}_\ell)$ entière telle que f, ϕ aient la même image dans le module des G-coinvariants $C^\infty(G/Z, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_G$.

Le théorème de [22, F.17] concerne $C_c^\infty(G, \mathbf{C})$ au lieu de $C_c^\infty(G/Z, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, mais la topologie de $\mathbf{C}$ n'intervient pas et l'on peut remplacer $\mathbf{C}$ par le corps isomorphe $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On peut aussi remplacer G par G/Z car Z est contenu dans le centre.

Par (3.5.2), $m(\pi) = \ell^a, a \geqslant 0$, divise toutes les intégrales orbitales régulières elliptiques de f_B. Les autres intégrales orbitales régulières de f_B sont nulles. Comme $\ell > n$ et $v_\ell(d(\pi)) = -a$, le théorème de densité des intégrales orbitales régulières permet de choisir $\phi_B \in C_c^\infty(G/Z; \overline{\mathbf{Z}}_\ell)$ tel que $f_B - d(\pi)^{-1}\phi_B$ annule toutes les distributions invariantes sur G. Pour tout $\pi' \in \mathrm{Irr}(G/Z)$, on a alors :

$$\operatorname{tr} \pi'(\phi_B dg) = \operatorname{tr} \pi'(f_B dg_\pi) = \delta_{r_\ell(\pi'), r_\ell(\pi)}.$$

3.7. Démonstration du théorème 3.1

On utilisera [22, F.21] :

THÉORÈME. – *Supposons $\ell > n$ et F de caractéristique 0. Alors les caractères des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G sur les éléments réguliers sont linéairement indépendants.*

Démonstration. – On démontre le théorème 3.1 par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations $\rho_1, \ldots, \rho_r \in \mathrm{Scusp}(G/Z; \overline{\mathbf{F}}_\ell)$ non isomorphes, et des éléments $a_1, \ldots, a_r \in \overline{\mathbf{F}}_\ell^*$ tels que les traces χ_{ρ_i} des représentations ρ_i sur G^e vérifient $\sum a_i \chi_{\rho_i} = 0$. On choisit $\pi_1, \ldots, \pi_r$ dans $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G/Z)$ qui relèvent $\rho_1, \ldots, \rho_r$ (2.4), et $b_1, \ldots, b_r$ dans $\overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ qui relèvent $a_1, \ldots, a_r$. Sur G^e, on a

$$\sum b_i \chi_{\pi_i} \equiv 0,$$

i.e. l'image canonique de $\sum b_i\chi_{\pi_i}(x)$ dans $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ est nulle, pour tout $x \in G^e$. Comme $\ell > n$, le théorème d'indépendance des caractères des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G sur les éléments réguliers implique que

$$\sum b_i tr_{\pi_i}(f dg) \equiv 0$$

pour tout $f \in C_c^\infty(G/Z; \overline{\mathbf{Z}}_\ell)$ d'intégrale orbitale nulle sur $G^{reg} - G^e$. Si f est la fonction notée ϕ_B en (3.6) relative à $\pi = \pi_1$, on a

$$\sum b_i tr_{\pi_i}(f_1 dg) = b_1.$$

On aboutit à une contradiction.

4. Théorie de Clifford

Soient R un corps algébriquement clos de *caractéristique quelconque*, $H \subset G$ deux groupes *profinis,* avec H *distingué* dans G à *quotient fini*. La théorie de Clifford relie les R-représentations de G avec celles de H [3, §11].

Soit $\tau \in \mathrm{Irr}_R(H)$. On définit son normalisateur dans G

$$N := \{g \in G \mid g.\tau \simeq \tau\}$$

(pour $g \in G, h \in H$, on note $(g.\tau)(ghg^{-1}) = \tau(h)$), et son *algèbre de Hecke dans* G

$$H(G,\tau) := \mathrm{End}_G \operatorname{ind}_H^G \tau.$$

PROPOSITION 4.1. – *Les R-représentations irréductibles π de G qui contiennent τ s'identifient aux modules simples à droite de $H(G,\tau)$ par l'application*

$$\pi \to \mathrm{Hom}_G\big(\operatorname{ind}_H^G \tau, \pi\big),$$

et les algèbres de Hecke de τ dans G et dans N sont isomorphes

$$H(G,\tau) \simeq H(N,\tau)$$

par l'inclusion canonique $H(N,\tau) \subset H(G,\tau)$.

Dans les deux cas suivants, τ *se prolonge à son normalisateur*.

a) G/H est un groupe cyclique. C'est un résultat classique [3, 11.46].

b) $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ et H est le groupe de ramification sauvage d'une extension galoisienne finie E/F de corps locaux non archimédiens. En introduisant le groupe d'inertie $H \subset I \subset G$ on se ramène par dévissage au cas cyclique [16, 1.19].

On dit qu'une R-représentation V de G est *engendrée par sa partie τ-isotypique* lorsqu'elle est quotient d'une somme directe $\oplus^I \operatorname{ind}_H^G \tau$ (pour un ensemble I). On note $\mathrm{Mod}_R(G,\tau)$ la catégorie des R-représentations de G engendrées par leur parties τ-isotypiques.

PROPOSITION 4.2. – *Lorsque $\tau \in \mathrm{Irr}_R H$ se prolonge à son normalisateur N, l'algèbre de Hecke de τ dans G est isomorphe à l'algèbre du groupe quotient N/H*

$$H(G,\tau) \simeq R[N/H],$$

et la catégorie des R-représentations V de G engendrées par leurs parties τ-isotypiques est équivalente à la catégorie des R-représentations de N/H

$$\mathrm{Mod}_R(G,\tau) \simeq \mathrm{Mod}_R(N/H).$$

On suppose maintenant que G/H est cyclique. On choisit un générateur κ de $\mathrm{Hom}(G/H,R^*)$ et un prolongement τ' de τ à son normalisateur N. On note

$$\pi := \mathrm{ind}_N^G \tau'.$$

COROLLAIRE 4.3. – *Lorsque G/H est cyclique, les représentations*

$$\tau' \otimes \chi \in \mathrm{Irr}_R N \quad \big(\chi \in \mathrm{Hom}(N/H,R^*)\big)$$

ne sont pas isomorphes et sont les prolongements de τ à N.

Les représentations induites à G

$$\mathrm{ind}_N^G(\tau' \otimes \chi) \quad \big(\chi \in \mathrm{Hom}(N/H,R^*)\big)$$

sont irréductibles, non isomorphes et sont les représentations irréductibles de G qui contiennent τ.

L'induite à G de τ est semi-simple et les multiplicités de ses sous-quotients irréductibles sont 1 si $d=[N:H]$ n'est pas nul dans R. Sinon la caractéristique de R est $\ell>0$, ℓ divise d, la représentation $\mathrm{ind}_H^G \tau$ n'est pas semi-simple, et sa multiplicité est la plus grande puissance de ℓ qui divise d. Dans tous les cas, la semi-simplifiée est

$$\big[\mathrm{ind}_H^G \tau\big] = \pi \oplus (\pi \otimes \kappa) \oplus \cdots \oplus \big(\pi \otimes \kappa^{d-1}\big).$$

Nous allons maintenant donner les démonstrations.

4.4. Preuve de 4.1

1) La première assertion est certainement bien connue depuis les travaux de Dipper. Il suffit de montrer que la représentation $\mathrm{ind}_H^G \tau$ est "presque projective" [17, 1.4.1] ou plus généralement est "quasi-projective" dans le sens de Arabia [17, A.3]). Le noyau de τ étant d'indice fini, on se ramène au cas où le groupe G est fini. La théorie des représentations des groupes finis fournit une couverture projective $P_\tau \to \tau$ de τ dans $\mathrm{Mod}_R H$. L'image de cette application par l'induction de H à G (qui est exacte, est adjointe à droite et à gauche de la restriction de G à H et respecte la projectivité) est un homomorphisme surjectif (que nous notons f)

$$P := \mathrm{ind}_H^G P_\tau \to \mathrm{ind}_H^G \tau,$$

et P est projectif dans $\mathrm{Mod}_R G$. L'application naturelle qui s'en déduit

$$\phi\colon H(G,\tau) \to \mathrm{End}_G\big(P, \mathrm{ind}_H^G \tau\big)$$

est injective car f est surjectif. Elle est surjective car

$$[N:H] = \dim_R H(G,\tau) = \dim_R \mathrm{End}_G\big(P, \mathrm{ind}_H^G \tau\big). \tag{4.4.1}$$

Ces égalités résultent de l'adjonction, de la formule de Mackey

$$(4.4.2)\qquad \left(\operatorname{ind}_H^G \tau\right)|_H \simeq \bigoplus_{g\in G/H} g.\tau,$$

du lemme de Schur $\operatorname{End}_H \tau \simeq R$, et de $\operatorname{Hom}_H(P_\tau, g.\tau) \simeq \operatorname{Hom}_H(\tau, g.\tau)$ P_τ étant une couverture projective de τ. Comme ϕ est bijective, la représentation $\operatorname{ind}_H^G \tau$ est presque projective [17, 1.3.1], et la première assertion est démontrée.

2) On sait [15, I.8.6] qu'il existe un isomorphisme canonique Φ de $H(G,\tau)$ sur l'algèbre des fonctions $f : G \to \operatorname{End}_R \tau$ vérifiant

$$(4.4.3)\qquad f(hgh') = \tau(h)f(g)\tau(h')$$

pour tout $g\in G, h, h' \in H$ munie du produit de convolution

$$(4.4.4)\qquad f * f'(g) = \sum_{x\in G/H} f\left(gx^{-1}\right)f'(x).$$

Pour $w\in\tau$, on note $e_w \in \operatorname{ind}_H^G \tau$ la fonction de support H telle que $e_w(1) = w$. L'isomorphisme Φ est défini par

$$(4.4.5)\qquad \Phi(A)(g) : w \to A(e_w)(g) \quad \left(A\in H(G,\tau), g\in G\right).$$

Dans le cas particulier où τ est la représentation triviale id, on retrouve que $H(G,\mathrm{id})$ est isomorphe à la R-algèbre du groupe G/H, notée $R[G/H]$.

Pour établir la seconde assertion $H(G,\tau) \simeq H(N,\tau)$, il suffit de montrer que la relation (4.4.3) implique que le support de f est contenu dans N. Comme H est distingué dans G, pour tout $h\in H, g\in G$ on a $g^{-1}hg \in H$ et par (4.4.3),

$$f(g)(g.\tau)(h) = \tau(h)f(g).$$

Comme τ est irréductible, cette relation implique que $f(g) = 0$ ou que $f(g) \in \operatorname{End}_R \tau$ est bijectif. Si $f(g)$ est bijectif, alors $g\in N$. Le support de f est contenu dans N, on en déduit la seconde assertion.

4.5. Preuve de 4.2

1) La première assertion signifie qu'il existe un isomorphisme d'algèbres

$$(4.5.1)\qquad H(N,\tau) \simeq H(N,\mathrm{id})$$

par (4.1) et sa preuve en (4.4). Cela résulte de l'isomorphisme canonique de R-représentations de N

$$(4.5.2)\qquad \operatorname{ind}_H^N \tau \simeq \tau' \otimes_R \operatorname{ind}_H^N \mathrm{id}$$

pour tout prolongement τ' de τ à N, et du lemme de Schur $\operatorname{End}_N \tau' \simeq R$. On construit facilement l'isomorphisme de (4.5.2). Pour tout $w\in\tau, n\in N$, on note $f_{w,n} \in \operatorname{ind}_H^N \tau$ (resp. $\phi_n \in \operatorname{ind}_H^N \mathrm{id}$) la fonction de support Hn telle que

$$f_{w,n}(n) = w \quad \text{(resp. } \phi_n(n) = 1).$$

On a

$$f_{\tau(h)w,hn} = f_{w,n}$$

pour tout $w \in \tau, h \in H, n \in N$. On définit un élément de $\tau' \otimes \operatorname{ind}_H^N \operatorname{id}$:

$$\phi_{w,n} := \tau'\big(n^{-1}\big) w \otimes \phi_n$$

pour tout $w \in \tau', n \in N$ (l'espace de τ est celui de τ'). Soit $y \in N$. L'image de $f_{w,n}$ par y est la fonction $x \to f_{w,n}(xy)$ égale à $f_{w,ny^{-1}}$, celle de $\phi_{w,n}$ par y est $\tau(yn^{-1})w \otimes \phi_{ny^{-1}} = \phi_{w,ny^{-1}}$. L'application $f_{w,n} \to \phi_{w,n}$ est l'isomorphisme de (4.5.2).

2) Pour la seconde assertion, on montre que les catégories $\operatorname{Mod}_R(G,\tau)$ et $\operatorname{Mod}_R(N/H)$ sont toutes les deux canoniquement équivalentes à $\operatorname{Mod}_R(N,\tau)$.

Les catégories $\operatorname{Mod}_R(N,\tau)$ et $\operatorname{Mod}_R N/H$ sont équivalentes via les foncteurs inverses

$$\eta \to \rho := \tau' \otimes_R \eta, \qquad \rho \to \eta := \operatorname{Hom}_H(\tau, \rho|_H)$$

pour $\eta \in \operatorname{Mod}_R(N/H), \rho \in \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$. En effet, tout $\rho \in \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$ est égal à $\rho = \tau' \otimes_R \eta$ pour $\eta = \operatorname{Hom}_H(\tau,\rho|_H) \in \operatorname{Mod}_R N/H$. Ceci peut se voir en utilisant (4.5.2) et l'équivalence évidente des catégories $\operatorname{Mod}_R(N/H)$ et $\operatorname{Mod}_R(N,\mathrm{id})$. D'autre part, on peut montrer

$$\operatorname{Hom}_N(\tau' \otimes \eta, \tau' \otimes \eta) \simeq \operatorname{Hom}_N(\eta', \eta)$$

pour tout $\eta, \eta' \in \operatorname{Mod}_R(N/H)$, en restreignant à H et en utilisant le lemme de Schur $\operatorname{End}_R \tau \simeq R$.

Les catégories $\operatorname{Mod}_R(N,\tau)$ et $\operatorname{Mod}_R(G,\tau)$ sont équivalentes via l'induction de N à G d'inverse le foncteur

$$\operatorname{res}_{N,\tau} : \operatorname{Mod}_R(G,\tau) \to \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$$

ainsi défini : une représentation π de G est engendrée par sa partie τ-isotypique si et seulement si

$$\pi|_N \simeq \bigoplus_{g \in G/N} g.\rho \tag{4.5.3}$$

où $\rho \in \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$. On définit $\operatorname{res}_{N,\tau}(\pi) := \rho$. Il est clair que $\pi = \operatorname{ind}_N^G \operatorname{res}_{N,\tau}(\pi)$. Soit $\rho \in \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$. Alors par la formule de Mackey

$$\big(\operatorname{ind}_N^G \rho\big)|_N = \bigoplus_{g \in G/N} g.\rho$$

et $\rho = \operatorname{res}_{N,\tau} \operatorname{ind}_N^G \rho$. Par adjonction, (4.5.3), et le fait que les $g.\tau$ pour $g \in G/N$ ne sont pas isomorphes, on a

$$\operatorname{Hom}_G(\pi,\pi') = \bigoplus_{g \in G/N} \operatorname{Hom}_G(g.\rho,\rho') = \operatorname{Hom}_N(\rho,\rho')$$

pour tout $\rho, \rho' \in \operatorname{Mod}_R(N,\tau)$ d'induite $\pi, \pi' \in \operatorname{Mod}_R(G,\tau)$. Donc les catégories $\operatorname{Mod}_R(N,\tau)$, $\operatorname{Mod}_R(G,\tau)$ sont équivalentes.

4.6. Preuve de 4.3

Seule l'assertion sur la semi-simplifiée n'a pas été démontrée. Elle résulte de (4.5.2) qui implique

$$\operatorname{ind}_H^G \tau = \pi \otimes \operatorname{ind}_H^G 1$$

avec $\pi = \operatorname{ind}_N^G \tau'$, et de la forme de la semi-simplifiée

$$\left[\operatorname{ind}_H^G 1\right] = 1 \oplus \kappa \oplus \cdots \oplus \kappa^{d-1}.$$

Remarques 4.7. – On suppose que G/H est cyclique, et que la caractéristique de R est 0 ou ne divise pas $[G:H]$. Le groupe $(G/H)^* := \operatorname{Hom}(G/H, R^*)$ de générateur κ agit par produit tensoriel sur $\operatorname{Irr}_R G$ et le groupe G/H agit par conjugaison sur $\operatorname{Irr}_R H$. Les orbites de dimension maximale $[G:H]$ sont appelées régulières et leurs éléments aussi. Alors on déduit de (4.3) :

1) L'induction et la restriction induisent des bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des orbites régulières de G/H dans $\operatorname{Irr}_R H$ et l'ensemble des points fixes de $(G/H)^*$ dans $\operatorname{Irr}_R G$:

$$\pi|_H = \bigoplus_{g \in G/H} g.\tau, \quad \pi = \operatorname{ind}_{G,H} \tau$$

pour $\tau \in \operatorname{Irr}_R(H)$ de stabilisateur $N = H$ et $\pi \in \operatorname{Irr}_R(G)$ fixe par $(G/H)^*$.

2) Soit (τ, π) comme ci-dessus. On choisit un R-isomorphisme A de l'espace de π, qui agit sur l'espace de $g.\tau$ par multiplication par $\kappa(g)$ pour tout $g \in G$. Alors

$$A \circ \pi(g) = \kappa(g)\pi(g) \circ A$$

pour tout $g \in G$.

5. Induction automorphe

On suppose F de caractéristique 0 et $\ell > n$. Soit $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ ou $R = \overline{\mathbf{F}}_\ell$. Pour simplifier, on supprime souvent l'indice R lorsque $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$.

Soient n, m, r des entiers $\geqslant 1$ avec $n = mr$ et E/F une extension cyclique de degré m. On note $N_{E/F} : E^* \to F^*$ la norme de E/F, et

$$G := \mathrm{GL}(n, F), \qquad H := \mathrm{GL}(r, F), \qquad G_E := \mathrm{GL}(n, E), \qquad H_E := \mathrm{GL}(r, E).$$

Le groupe $\Xi = \operatorname{Hom}(F^*/N_{E/F}E^*, \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*)$ est cyclique d'ordre $m < \ell$, isomorphe canoniquement à $\operatorname{Hom}(F^*/N_{E/F}E^*, R^*)$; on choisit un générateur κ de Ξ. Identifié via le déterminant à un groupe de caractères de G ou de H, Ξ agit naturellement sur $\operatorname{Irr}_R(G)$ et sur $\operatorname{Irr}_R(H)$. Le groupe de Galois $\Sigma = \operatorname{Gal}(E/F)$, cyclique d'ordre m, agit naturellement sur $\operatorname{Irr}_R(G_E), \operatorname{Irr}_R(H_E)$. L'action des deux groupes respecte la propriété d'être supercuspidale.

L'exposant *reg* indiquera que l'on considère des représentations régulières (d'orbite à m éléments) ; par exemple, $\operatorname{Scusp}_R(H_E)^{reg}$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des R-représentations supercuspidales de H_E, dont les conjugués par le groupe de Galois Σ sont distincts.

L'exposant Ξ ou Σ indiquera que l'on considère les représentations fixes (d'orbite à 1 élément) ; par exemple, $\operatorname{Scusp}_R(G)^\Xi$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des R-représentations supercuspidales de G, isomorphes à tous leurs produits tensoriels par un caractère dans Ξ.

5.1. L'induction automorphe de H_E à G (le κ-lift [11, 3.7, 3.11]) que l'on note $\mathrm{ind}_{F,E}$ par analogie au cas galoisien, est définie sur les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles *génériques* de H_E, *vérifiant une certaine condition de régularité,* et son image est l'ensemble des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles *génériques* de G fixes par Ξ [11, th. 2.4]. L'induction automorphe induit une bijection [11, 5.5] (notée encore $\mathrm{ind}_{F,E}$)

$$\mathrm{ind}_{F,E} : \mathrm{Scusp}(H_E)^{reg}/\Sigma \to \mathrm{Scusp}(G)^{\Xi}. \tag{5.1.1}$$

Soient $\pi_E, \pi'_E \in \mathrm{Scusp}(H_E)$ entières ; les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations $r_\ell \pi_E$ et $r_\ell \pi'_E$ sont irréductibles et cuspidales ; on note $\Sigma.\pi_E \equiv \Sigma.\pi'_E$ si les orbites de $r_\ell \pi_E$ et de $r_\ell \pi'_E$ par le groupe de Galois Σ, sont égales.

THÉORÈME. – *Soient* $\pi_E, \pi'_E \in \mathrm{Scusp}(H_E)^{reg}$, *d'induites automorphes* $\pi := \mathrm{ind}_{F,E}\, \pi_E$, $\pi' := \mathrm{ind}_{F,E}\, \pi'_E$ *dans* $\mathrm{Scusp}(G)^{\Xi}$. *Alors*

1) π_E *est entière si et seulement si* π *est entière.*

2) *Supposons* π_E, π'_E *entières, et* ℓ*-supercuspidales. Alors*

$$\Sigma.\pi_E \equiv \Sigma.\pi'_E \textit{ si et seulement si } \pi \equiv \pi'.$$

Ce théorème implique, avec (2.9), le théorème principal. La suite du paragraphe 5 est consacrée à sa démonstration.

5.2. L'induite automorphe d'une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible non régulière de H_E peut être définie [11, 1.3], son image est irréductible par définition. Ce phénomène est surprenant si l'on fait le parallèle avec la théorie de Clifford, de façon naïve ; il disparaît si l'on remplace les représentations irréductibles par leur support supercuspidal.

L'induction parabolique normalisée induit des injections

$$\mathrm{Scusp}(H_E)^{reg}/\Sigma \to \mathrm{Irr}(G_E)^{\Sigma}, \qquad \mathrm{Scusp}(H)^{reg}/\Xi \to \mathrm{Irr}(G)^{\Xi},$$

qui associent à une orbite régulière Y, pour H_E ou H, la représentation de G_E ou G induite paraboliquement par $\bigotimes_{\pi\in Y} \pi$ (c'est une représentation d'un sous-groupe de Levi de G_E ou G). On sait que cette représentation est irréductible [23], fixe par le groupe de Galois Σ ou par le groupe Ξ des caractères, de support supercuspidal contenant $\otimes_{\pi\in Y}\pi$; le support supercuspidal s'identifie à la somme formelle $\oplus_{\pi\in Y}\pi$, i.e. à Y.

Le changement de base de G à G_E, que l'on note $\mathrm{res}_{E,F}$ par analogie au cas galoisien, est défini sur tout $\mathrm{Irr}(G)$ et son image est $\mathrm{Irr}(G_E)^{\Sigma}$ [1, pp. 59–60]. Restreint aux supercuspidales fixes par le groupe des caractères dans Ξ, le support supercuspidal du changement de base fournit une bijection [2, 2.6]

$$\mathrm{res}_{E,F} : \mathrm{Scusp}(G)^{\Xi} \to \mathrm{Scusp}(H_E)^{reg}/\Sigma, \tag{5.2.1}$$

inverse de l'induction automorphe (5.1.1).

Identifiant $\mathrm{Scusp}(H)^{reg}/\Xi$ avec son image dans $\mathrm{Irr}(G)^{\Xi}$ par l'induction parabolique normalisée, l'induction automorphe de H_E à G et le changement de base de H à H_E donnent, par restriction, deux bijections inverses l'une de l'autre [2, 2.6]

$$\mathrm{ind}_{F,E} : \mathrm{Scusp}(H_E)^{\Sigma} \to \mathrm{Scusp}(H)^{reg}/\Xi, \qquad \mathrm{res}_{E,F} : \mathrm{Scusp}(H)^{reg}/\Xi \to \mathrm{Scusp}(H_E)^{\Sigma}.$$

5.3. Caractères centraux

On sait calculer les caractères centraux dans l'induction automorphe et dans le changement de base. Joint à la caractérisation des représentations entières par l'intégralité du caractère central de leur support supercuspidal (2.1), on démontre que l'induction automorphe et le changement de base respectent l'intégralité (le (1) du théorème 5.1).

Soit $\pi_E \in \mathrm{Irr}(H_E)$ générique de caractère central ω_E, et $\pi := \mathrm{ind}_{F,E}\,\pi_E$. On sait [11, 4.7 a)] que le caractère central de π est

$$\omega = \mu \circ (\omega_E)|_{F^*}$$

où μ est un caractère d'ordre 2. Si ω_E est entier, cette formule montre que ω est entier. La réciproque est vraie car E^*/F^* est un groupe profini, et un caractère de E^* est entier si et seulement si sa restriction à F^* est entière.

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ de caractère central ω, et $\pi_E := \mathrm{res}_{E,F}\,\pi$. On sait que le caractère central de π_E est [1, 6.2 page 51]

$$\omega_E = \omega \circ N_{E/F}.$$

Comme $F^*/N_{E/F}E^*$ est fini, le même argument que ci-dessus montre que ω est entier si et seulement si ω_E est entier.

5.4. Transitivité

L'induction automorphe est transitive [2, A.11] comme dans le cas galoisien, et comme le changement de base [2, 2.3]. Si $F \subset E' \subset E$, alors si $\pi_E \in \mathrm{Scusp}(H_E)^{reg}$ est régulier par rapport à F, alors π_E est régulière par rapport à E', $\mathrm{ind}_{E',E}\,\pi_E$ est supercuspidale, F-régulière, et

$$\mathrm{ind}_{F,E'} \circ \mathrm{ind}_{E',E}\,\pi_E = \mathrm{ind}_{F,E}\,\pi_E.$$

5.5. Trace tordue

On considère le sous-groupe ouvert distingué

$$G' := \{g \in G \mid \det g \in N_{E/F}E^*\}$$

de G, de quotient cyclique d'ordre $m < \ell$.

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_R(G)^{\Xi}$. Par la théorie de Clifford (4.7), il existe $\tau \in \mathrm{Irr}_R(G')^{reg}$ tel que

$$\mathrm{res}_{G',G}\,\pi = \bigoplus_{g \in G/G'} g.\tau, \qquad \pi = \mathrm{ind}_{G,G'}\,\tau.$$

On choisit un R-automorphisme A de l'espace de π comme en (4.7) relatif au caractère $\kappa(\det g) : G/G' \to R^*$.

On munit G d'une $\mathbf{Z}[1/p]$-mesure de Haar admissible dg (3.5). La trace κ-tordue de π est la forme linéaire sur $C_c^\infty(G';R)$ définie par

$$\mathrm{tr}_\pi^\kappa(f\,dg) := \mathrm{tr}\big(\pi(f\,dg) \circ A\big) = \sum_{x \in G/G'} \kappa(x)\,\mathrm{tr}(x.\tau)(f\,dg)$$

pour tout $f \in C_c^\infty(G';R)$. Elle dépend des choix.

Lorsque $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, π est entière si et seulement si τ est entière. Si L_τ est une structure entière de τ alors

$$L := \bigoplus_{g \in G/G'} g.L_\tau$$

est une structure entière de π. Inversement si L' est une structure entière de π, alors $L'_\tau := L' \cap \tau$ est une structure entière de τ. Si π, τ sont entières, on choisit un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-automorphisme A de L comme ci-dessus vérifiant (4.7). Par extension des scalaires à $R = \overline{\mathbf{Q}}_\ell, \overline{\mathbf{F}}_\ell$, A définit un R-automorphisme de l'espace de π et de $r_\ell \pi$, que l'on note toujours A. Alors la trace tordue correspondant à A commute avec la réduction modulo ℓ.

THÉORÈME [22, E.4, G.14]. –
1) *La trace de* $\tau \in \mathrm{Irr}_R(G')$ *se restreint sur* $G^{reg} \cap G'$ *en une fonction localement constante* $($*le caractère* χ_τ *de* $\tau)$.
2) *Si* $\ell > n$, *les restrictions à* $C_c^\infty(G^{reg} \cap G'; R)$ *des traces des* R*-représentations irréductibles de* G' *sont linéairement indépendantes.*

On peut aussi déduire 1) de la théorie des types, comme l'avait fait Howe dans le cas complexe.

COROLLAIRE. – *Les traces* κ*-tordues des représentations* $\pi \in \mathrm{Irr}_R(G)^\Xi$ *restreintes à* $G^{reg} \cap G'$ *sont des fonctions localement constantes et linéairement indépendantes* $($*les caractères* κ*-tordus* χ_π^κ *de* $\pi)$.

On a pour $x \in G' \cap G^{reg}$,

$$\chi_\pi^\kappa(x) = \bigoplus_{g \in G/G'} \kappa(g) \chi_{g.\tau}(x). \tag{5.5.1}$$

5.6. L'induction automorphe est définie par une identité entre caractères. Soit $\pi_E \in \mathrm{Irr}(H_E)^{reg}$ générique. On dit que $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ est l'induite automorphe $\mathrm{ind}_{F,E}\, \pi_E$ si [11, 2.4, 3.11]
- $\chi_\pi^\kappa(x) = 0$ pour tout $x \in G^{reg} \cap G'$ non conjugué à un élément de $H_E \cap G^{reg}$,
- pour tout $x \in H_E \cap G^{reg}$,

$$\chi_\pi^\kappa(x) = c(\pi) \sum_{x' \in X(x)} a(x') \chi_{\pi_E}(x'), \tag{5.6.1}$$

où $X(x)$ est l'ensemble fini des classes de conjugaison de H_E qui rencontrent la G-classe de conjugaison de x, $a : X(x) \to \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ est une fonction explicite qui dépend de x et de κ mais non de π, et $c(\pi) \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$ est une constante non nulle.

La formule se simplifie pour $x \in H_E^e \cap G^{reg}$ elliptique dans H_E ; elle devient [11, 3.11]

$$\chi_\pi^\kappa(x) = c(\pi) c'(x) \sum_{g \in \Sigma} \chi_{g.\pi_E}(x), \tag{5.6.2}$$

où $c' : H_E^e \cap G^{reg} \to \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ ne dépend pas de π.

LEMME. – *Supposons que* $\pi_E \in \mathrm{Irr}(H_E)^{reg}$ *est entière et* ℓ*-supercuspidale. Alors la constante* $c(\pi) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ *est une unité.*

Démonstration. – a) Les valeurs du caractère χ_{π_E} localement constant sur $(H_E)^{reg}$ appartiennent à $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$; la trace commute à la réduction modulo ℓ

$$r_\ell \chi_{\pi_E} = \chi_{r_\ell \pi_E}.$$

L'action du groupe de Galois Σ commute avec la réduction modulo ℓ, mais la réduction modulo ℓ ne respecte pas la régularité. La représentation π_E est régulière, mais $r_\ell \pi_E$ peut ne pas l'être ; l'ordre du fixateur de $r_\ell \pi_E$ dans Σ divise m, et $m < \ell$. Par hypothèse $r_\ell \pi_E \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell} H_E$. L'indépendance linéaire des caractères des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles supercuspidales de H_E sur les éléments elliptiques (3.1) implique qu'il existe $x \in H_E^e \cap G^{reg}$ tel que $\sum_{g \in \Sigma} \chi_{\pi_E}(g.x) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$.

b) Par (5.5) les valeurs du caractère κ-tordu χ_π^κ localement constant sur $G' \cap G^{reg}$ appartiennent à $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$, car π est entière (5.3). On déduit de a) et de (5.6.2) que $c(\pi) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell$. La $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation $r_\ell(\pi)$ est irréductible et cuspidale (2.4), fixe par Ξ. Par (5.5) la réduction modulo ℓ commute avec la trace tordue et

$$r_\ell(\chi_\pi^\kappa) = \chi_{r_\ell(\pi)}^\kappa$$

n'est pas nul. Il existe donc $x \in H_E \cap G^{reg}$ tel que $\chi_\pi^\kappa(x) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$; avec (5.6.1), on obtient $c(\pi) \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$. $\square$

Pour π_E comme dans le lemme, les images de $c(\pi), a(x'), c'(x)$ dans $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ ne sont pas nulles ; on les note encore de la même façon. La réduction modulo ℓ commute avec les traces, et avec l'action du groupe de Galois Σ. On obtient :

$$\chi_{r_\ell \pi}^\kappa(x) = c(\pi) \sum_{x' \in X(x)} a(x') \chi_{r_\ell \pi_E}(x') \quad \bigl(x \in H_E \cap G^{reg}\bigr), \tag{5.6.3}$$

$$\chi_{r_\ell \pi}^\kappa(x) = c(\pi) c'(x) \sum_{g \in \Sigma} \chi_{g.r_\ell \pi_E}(x) \quad \bigl(x \in H_E^e \cap G^{reg}\bigr). \tag{5.6.4}$$

5.7. On montre maintenant le 2) du théorème 5.1. Supposons $\Sigma.\pi_E \equiv \Sigma.\pi'_E$. On peut supposer $r_\ell \pi_E \simeq r_\ell \pi'_E$ puisque la réduction modulo ℓ commute à l'action de Σ. On déduit de (5.6.3) que

$$\chi_{r_\ell \pi}^\kappa(x) = d \chi_{r_\ell \pi'}^\kappa(x)$$

pour tout $x \in G^{reg}$, pour une constante $d \in \overline{\mathbf{F}}_\ell^*$ (ces fonctions sont nulles hors de $H_E \cap G^{reg}$). Par (5.5), $r_\ell \pi \simeq r_\ell \pi'$. Inversement, supposons $r_\ell \pi \simeq r_\ell \pi'$. Alors, on déduit de (5.6.4) que

$$\sum_{g \in \Sigma} \chi_{g.r_\ell \pi_E}(x) = d \sum_{g \in \Sigma} \chi_{g.r_\ell \pi'_E}(x)$$

pour $x \in H_E^e \cap G^{reg}$, pour une constante $d \in \overline{\mathbf{F}}_\ell^*$. Comme $H_E^e \cap G^{reg}$ est dense dans H_E^e, et que les caractères des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles de H_E sont localement constants sur H_E^e, l'égalité est vraie pour tout $x \in H_E^e$. Les multiplicités des représentations irréductibles qui interviennent dans chaque terme sont inférieures à m, et $m < \ell$. L'indépendance linéaire des traces des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations supercuspidales de H_E sur les elliptiques (3.1) implique que $\Sigma.\pi_E \equiv \Sigma.\pi'_E$. $\square$

6. Démonstrations des théorèmes 1.2, 1.3

La démonstration du théorème principal est achevée. Nous démontrons le théorème 1.2 en (6.1), et le théorème 1.3 en (6.2).

6.1. La correspondance définie en (1.2) est une bijection de $\mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ sur $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$, car :

– Elle est définie sur tout ${}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$, car toute $\pi \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G)$ est la réduction modulo ℓ d'une représentation $\pi' \in \mathrm{Scusp}(G)$ (2.4).

– Elle est surjective, car toute $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(W)(n)$ est la réduction modulo ℓ d'une représentation $\sigma' \in \mathrm{Irr}(W)(n)$ (2.6).

– Elle est injective, par le (3) du théorème principal.

6.2. Nous montrons le théorème 1.3 : si la caractéristique de F est 0 et $\ell > n$, le support supercuspidal de $r_\ell \pi$, pour $\pi \in \mathrm{Scusp}(G)$ entière, correspond à $r_\ell(\sigma)$ si σ correspond à π (par les bijections de Langlands).

Il est déjà démontré si $r_\ell \sigma$ est irréductible.

Avec les notations de (2.9), on écrit $\pi = \mathrm{ind}_{F,F_f}\, \pi_f, \sigma = \mathrm{ind}_{F,F_f}\, \sigma_f$, avec $\pi_f \leftrightarrow \sigma_f, f(\pi_f) = f(\sigma_f) = 1$. La représentation $r_\ell \pi_f$ est irréductible et supercuspidale, et $\tau_f := r_\ell \sigma_f$ est irréductible ; les représentations $r_\ell \pi_f$ et $r_\ell \sigma_f$ se correspondent par la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

6.2.1. On ne fait aucune restriction sur (F, ℓ). On s'intéresse au cas où $r_\ell \sigma$ est réductible. On la décrit, en utilisant que $r_\ell \sigma$ est la semi-simplifiée de $\mathrm{ind}_{F,F_f}\, \tau_f$.

Par la théorie de Clifford (4.1), le fixateur de τ_f dans le groupe de Galois Σ_f de F_f/F est d'ordre $d > 1$; par la théorie de Galois, le fixateur est le groupe de Galois de $F_f/F_{f/d}$. Soit $\tau_{f/d}$ une représentation irréductible de $W_{F_{f/d}}$ qui prolonge τ_f. Son induite à W_F

$$\tau_1 := \mathrm{ind}_{F,F_{f/d}}\, \tau_{f/d}$$

est irréductible. C'est un constituant de $r_\ell \sigma$. Un générateur κ du groupe Ξ des $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-caractères de W_F/W_{F_f} s'identifie à un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-caractère non ramifié de F^* d'ordre f par l'isomorphisme de réciprocité. On a

$$r_\ell \sigma = \tau_1 \oplus (\tau_1 \otimes r_\ell \kappa) \oplus \cdots \oplus \big(\tau_1 \otimes r_\ell \kappa^{d-1}\big).$$

6.2.2. On ne fait aucune restriction sur (F, ℓ). On choisit un relèvement $\sigma'_{f/d}$ de

$$\tau_{f/d} = r_\ell \sigma'_{f/d}.$$

On a la tour d'extensions $F \subset F_{f/d} \subset F_f$, qui correspond à des inclusions inverses pour les groupes de Weil. On peut restreindre de $F_{f/d}$ à F_f, et induire de $F_{f/d}$ à F les représentations des groupes de Weil correspondants. La convention, déja utilisée pour $X = \tau$, est que la restriction de $X_{f/d}$ à F_f est notée X_f, et son induite à F est notée X_1 (sauf mention contraire).

La réduction modulo ℓ commute avec l'action de Galois, la restriction, l'induction, la multiplication par κ. Donc l'induite $\sigma'_1 := \mathrm{ind}_{F,F_{f/d}}\, \sigma'_{f/d}$ est ℓ-irréductible car elle relève

$$\tau_1 = r_\ell \sigma'_1.$$

La restriction $\sigma'_f := \operatorname{res}_{F_f,F_{f/d}} \sigma'_{f/d}$ est ℓ-irréductible et comme σ_f, elle relève τ_f.

Le fixateur de σ'_f dans le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(F_f/F)$ contient $\operatorname{Gal}(F_f/F_{f/d})$, il lui est même égal par la théorie de Clifford, et la représentation induite

$$\sigma' := \operatorname{ind}_{F,F_f} \sigma'_f = \sigma'_1 \oplus (\sigma'_1 \otimes \kappa) \oplus \cdots \oplus \left(\sigma'_1 \otimes \kappa^{d-1}\right)$$

relève $r_\ell \sigma$. Les représentations $r_\ell \sigma$ et σ' ont la même longueur d.

Soit $\pi'_{f/d}$ correspondant à $\sigma'_{f/d}$ par la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, $\sigma'_{f/d} \leftrightarrow \pi'_{f/d}$. L'induction automorphe à F et le changement de base à F_f correspondent à l'induction et à la restriction galoisiennes, par les bijections de Langlands, lorsque les représentations galoisiennes concernées restent irréductibles. Comme σ'_1 et σ'_f sont irréductibles, on a $\pi'_1 := \operatorname{ind}_{F,F_{f/d}} \pi'_{f/d} \leftrightarrow \sigma'_1$ et $\pi'_f := \operatorname{res}_{F_f,F_{f/d}} \pi'_{f/d} \leftrightarrow \sigma'_f$. Comme σ'_1 est ℓ-irréductible, π'_1 est ℓ-supercuspidale par la proposition (2.3).

Comme la bijection de Langlands est compatible avec l'action du groupe de Galois, le fixateur de π'_f dans $\operatorname{Gal}(F_f/F)$ est $\operatorname{Gal}(F_f/F_{f/d})$. La description de l'induction automorphe [2] montre que

$$\operatorname{ind}_{F,F_f} \pi'_f = \pi'_1 \times (\pi'_1 \otimes \kappa) \times \cdots \times \left(\pi'_1 \otimes \kappa^{d-1}\right)$$

(avec la notation de Zelevinski [23] pour l'induite parabolique normalisée). Cette $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation de G est irréductible, entière, non cuspidale. On la note π'.

6.2.3. On suppose $\ell > n$ et que la caractéristique de F est 0. Nous allons montrer que la représentation irréductible cuspidale $r_\ell \pi$ est un sous-quotient de $r_\ell \pi'$. Tous les sous-quotients irréductibles de $r_\ell \pi'$ ont le même support supercuspidal

$$r_\ell \pi'_1 \oplus r_\ell(\pi'_1 \otimes \kappa) \oplus \cdots \oplus r_\ell\left(\pi'_1 \otimes \kappa^{d-1}\right)$$

puisque $r_\ell \pi'_1$ est supercuspidale. Par la correspondance de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$, il correspond à la représentation semi-simple

$$r_\ell \sigma = r_\ell \sigma'_1 \oplus r_\ell(\sigma'_1 \otimes \kappa) \oplus \cdots \oplus r_\ell\left(\sigma'_1 \otimes \kappa^{d-1}\right).$$

Le théorème 1.3 sera donc démontré.

Les représentations irréductibles π, π' sont fixes par Ξ. Les caractères κ-tordus de π et de π' sont donnés par la formule (5.6.1) pour $E = F_f$. La constante $c(\pi)$ appartient à $\overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ par (5.6), car π_f est entière et $r_\ell \pi_f$ est supercuspidale.

LEMME. – *$c(\pi') \in \overline{\mathbf{Z}}_\ell^*$ et $r_\ell c(\pi') = r_\ell c(\pi)$.*

Démonstration. – a) Préliminaires. En (6.2.2), la $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation $r_\ell \pi'_{f/d}$ correspond à $\tau_{f/d}$ par la bijection de Langlands sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$; on déduit du théorème 5.1 que

$$r_\ell \pi'_f = r_\ell \pi_f.$$

La somme des caractères κ-tordus des sous-quotients irréductibles de $r_\ell \pi'$, fixes par κ, est égale à $r_\ell(\chi^\kappa_{\pi'})$.

C'est valable pour toute représentation $\pi' \in (\operatorname{Irr} G)^\Xi$ entière, i.e. induite d'une représentation entière V' du groupe

$$G' := \{g \in G \mid \det g \in N_{F_f/F} F_f^*\}.$$

Vérifions-le. L'induction commute avec la réduction modulo ℓ et la formule (5.5.1) pour $\chi^{\kappa}_{\pi'}$ montre que

$$r_\ell(\chi^{\kappa}_{\pi'}) = \sum_{W', g \in G/G'} \kappa(g)\chi_{g.W'}$$

W' parcourant tous les sous-quotients irréductibles de $r_\ell V' = \bigoplus W'$. Si le fixateur de W' dans G/G' n'est pas trivial, alors la représentation $\mathrm{ind}_{G,G'} W'$ de G induite par W' est réductible, aucun de ses sous-quotients n'est fixe par κ, et $\sum_{g \in G/G'} \kappa(g)\chi_{g.W'} = 0$. Si le fixateur est trivial, alors $\mathrm{ind}_{G,G'} W'$ est un sous-quotient irréductible de $r_\ell \pi'$, fixe par κ.

b) Montrons qu'il existe $x \in GL(n/f, F_f) \cap G^{reg}$ tel que $\chi^{\kappa}_{\pi'}(x) \in \overline{\mathbf{Z}}^*_\ell$. Il suffit, par densité, de montrer que $r_\ell \chi^{\kappa}_{\pi'} = \chi^{\kappa}_{r_\ell \pi'} \neq 0$. La représentation $r_\ell \pi'$ a un unique sous-quotient irréductible générique ; l'unicité montre qu'il est fixe par κ. On utilise alors a) et l'indépendance linéaire des caractères κ-tordus des représentations irréductibles fixes par κ (5.5).

c) Par b) et la formule (5.6.1), l'inverse de $c(\pi')$ appartient à $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$. L'égalité $r_\ell \pi'_f = r_\ell \pi_f$ implique que

$$r_\ell\big(\chi^{\kappa}_{\pi'}(x)c(\pi')^{-1}\big) = r_\ell\big(\chi^{\kappa}_{\pi}(x)c(\pi)^{-1}\big)$$

pour tout $x \in \mathrm{GL}(n/f, F_f) \cap G^{reg}$. Les propriétés des caractères tordus montrent que le second membre est non identiquement nul, car nous savons que $c(\pi) \in \overline{\mathbf{Z}}^*_\ell$ et que $r_\ell \pi$ est irréductible, fixe par κ. On en déduit $c(\pi') \in \overline{\mathbf{Z}}^*_\ell$.

d) Par c), on a $r_\ell \chi^{\kappa}_{\pi'} = r_\ell(c(\pi')c(\pi)^{-1})\chi^{\kappa}_{r_\ell \pi}$. L'indépendance linéaire des κ-caractères tordus implique que $r_\ell(c(\pi')c(\pi)^{-1}) = 1$ et que $r_\ell \pi$ est le sous-quotient générique de $r_\ell \pi'$. Le lemme et le théorème 1.3 sont démontrés. $\square$

Addendum

Ce texte est une version améliorée de la prépublication 207 (mars 1999) de l'Institut de Mathématiques de Jussieu. On peut en fait supprimer la restriction $\ell > n$, en évitant l'analyse harmonique modulaire (modulo ℓ), et en utilisant une méthode de Khare qui permet de globaliser des congruences locales ainsi que la correspondance de Langlands *globale* de Harris–Taylor. On peut aussi supprimer la restriction F de caractéristique 0 si l'on admet la correspondance de Langlands *globale* de Lafforgue [19].

RÉFÉRENCES

[1] ARTHUR J., CLOZEL L., *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Ann. of Math. Studies, Vol. **120**, Princeton University Press, 1989.

[2] BUSHNELL C.J., HENNIART G., KUTZKO P.C., *Correspondance de Langlands locale pour* GL_n *et conducteurs de paires, Prépublication 97-63, Orsay*, 1997.

[3] CURTIS C.W., REINER I., *Representation Theory of Finite Groups and Associated Algebras*, Wiley Interscience, 1988.

[4] DELIGNE P., KAZHDAN D., VIGNÉRAS M.-F., Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, in: Bernstein J.N., Deligne P., Kazhdan D., Vignéras M.-F. (Eds.), *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, 1984.

[5] GALLAGHER P.X., Determinants of representations of finite groups, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **28** (1965) 162–167.

[6] GOLDSCHMIDT D.M., *Lectures on Character Theory*, Mathematics Lecture Notes Series, Vol. **8**, Publish or Perish, 1980.

[7] HARRIS M., Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program, *Invent. Math.* **129** (1997) 75–119.
[8] HARRIS M., TAYLOR R., *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Prepublication 227*, Institut de Mathématiques de Jussieu, 1999.
[9] HENNIART G., Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique, *Invent. Math.* **130** (2000) 439–455.
[10] HARISH-CHANDRA, VAN-DIJK G., *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups*, Lecture Notes Math., Vol. **162**, Springer, 1970.
[11] HENNIART G., HERB R., Automorphic induction for GL(n) (over non-archimedean fields), *Duke Math. J.* **78** (1995) 131–192.
[12] VIGNÉRAS M.-F., Correspondance modulaire galois-quaternions pour un corps p-adique, in: *Number Theory Ulm, 1987*, Lecture Notes in Math., Vol. **1380**, 1989, pp. 254–266.
[13] VIGNÉRAS M.-F., Représentations modulaires de $\mathrm{GL}(2,F)$ en caractéristique ℓ, **F** corps p-adique $p \neq \ell$, *Compositio Math.* **72** (1989) 33–66, Erratum *Compositio Math*. 101 (1996) 109–113.
[14] VIGNÉRAS M.-F., Sur la conjecture locale de Langlands pour $\mathrm{GL}(n,F)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$, *CRAS* **318** (1994) 905–908.
[15] VIGNÉRAS M.-F., *Représentations modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$*, Progress in Math., Vol. **137**, Birkhäuser, 1996.
[16] VIGNÉRAS M.-F., A propos d'une conjecture de Langlands modulaire, in: Cabanes M. (Ed.), Progress in Math., Vol. **141**, Birkhäuser, 1996.
[17] VIGNÉRAS M.-F., Induced R-representations of p-adic groups, *Selec. Math., New Ser.* **4** (1998) 549–623.
[18] VIGNÉRAS M.-F., Intégrales orbitales modulo ℓ pour un groupe réductif p-adique, in: Pragacz et al. (Eds.), *Algebraic Geometry: Hirzebruch 70*, Contemporary Mathematics, Vol. **231**, American Mathematical Society, 1999.
[19] VIGNÉRAS M.-F., Correspondance de Langlands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n,F)$ modulo $\ell \neq p$, *Invent. Math.* (2000), à paraître.
[20] VIGNÉRAS M.-F., Congruences modulo ℓ between ε factors for cuspidal representations of $\mathrm{GL}(2)$, *J. de Théorie des Nombres de Bordeaux*, à paraître.
[21] VIGNÉRAS M.-F., Formal degrees and existence of stable arithmetic lattices of cuspidal representations of p-adic reductive groups, *Invent. Math.* **98** (1989) 549–563.
[22] VIGNÉRAS M.-F., WALDSPURGER J.-L., Premiers réguliers de l'analyse harmonique mod ℓ d'un groupe réductif p-adique, *J. Reine Angew. Math.*, à paraître.
[23] ZELEVINSKI A., Induced representations of reductive p-adic groups II, *Ann. Scient. E.N.S.* **13** (1980) 165–210.

(Manuscrit reçu le 7 septembre 1999 ;
accepté, après révision, le 11 décembre 2000.)

Marie-France VIGNÉRAS
Institut de Mathématiques de Jussieu,
Université Denis Diderot – Paris 7,
Case 7012,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France
E-mail : vigneras@math.jussieu.fr