

CORRESPONDANCE DE JACQUET–LANGLANDS POUR LES CORPS LOCAUX DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

PAR ALEXANDRU IOAN BADULESCU

RÉSUMÉ. – Le but de cet article est la preuve de la correspondance de Jacquet–Langlands locale en caractéristique non nulle. Si F est un corps local de caractéristique non nulle et G' est une forme intérieure de $GL_n(F)$, on construit un parallèle entre la théorie des représentations de G' et celle d'une forme intérieure de $GL_n(L)$ respectivement, où L est un corps local de caractéristique nulle, proche de F au sens de [17]. La correspondance de Jacquet–Langlands entre G' et $GL_n(F)$ est prouvée en utilisant cette construction et les idées développées déjà par Deligne, Kazhdan et Vignéras [10] pour la preuve en caractéristique nulle. Nous obtenons au passage les résultats suivants, connus jusqu'ici uniquement en caractéristique nulle : le théorème d'orthogonalité des caractères pour G' , des relations entre le conducteur et le niveau d'une représentation de G' , ainsi qu'un théorème de finitude pour les représentations automorphes cuspidales d'une forme intérieure de GL_n sur un corps global de caractéristique non nulle.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – In this article we prove the Jacquet–Langlands local correspondence in non-zero characteristic. Let F be a local field of non-zero characteristic and G' an inner form of $GL_n(F)$; then, following [17], we prove relations between the representation theory of G' and the representation theory of an inner form of $GL_n(L)$, where L is a local field of zero characteristic close to F . The proof of the Jacquet–Langlands correspondence between G' and $GL_n(F)$ is done using the above results and ideas from the proof by Deligne, Kazhdan and Vignéras [10] of the zero characteristic case. We also get the following, already known in zero characteristic: orthogonality relations for G' , inequality involving conductor and level for representations of G' and finiteness for automorphic cuspidal representations with fixed component at almost every place for an inner form of GL_n over a global field of non-zero characteristic.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soient F un corps local non archimédien et A une algèbre centrale simple de dimension finie sur F . Soit A^* le groupe des éléments inversibles de A . On sait que A^* est isomorphe à $GL_r(D)$, où D est une algèbre à division sur F , et on l'identifiera avec ce groupe. La dimension de D en tant qu'espace vectoriel sur F est un carré d^2 . On pose $n = rd$, $G = GL_n(F)$ et $G' = GL_r(D)$. Si O_F (resp. O_D) est l'anneau des entiers de F (resp. D), on fixe une mesure de Haar sur G (resp. G') telle que le volume de $GL_n(O_F)$ (resp. $GL_r(O_D)$) soit égal à 1. Un élément de G ou G' dont le polynôme caractéristique est séparable (i.e. sans racine multiple sur une clôture algébrique de F) est dit *semi-simple régulier*. Si g est un élément de G et g' un élément de G' on écrit $g \leftrightarrow g'$ si g et g' sont semi-simples réguliers et ont le même polynôme caractéristique.

On dit alors que g et g' se correspondent. Si π est une représentation lisse de longueur finie de G ou G' , on note χ_π le caractère de π .

On note $E^2(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de G et $E^2(G')$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de G' . La correspondance de Jacquet–Langlands s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 1.1. – *Il existe une unique bijection :*

$$C : E^2(G) \rightarrow E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$(1.1) \quad \chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{C(\pi)}(g'),$$

à chaque fois que $g \in G$ et $g' \in G'$ se correspondent.

Ce résultat a été prouvé pour F de caractéristique nulle dans [10] et le but de cet article est de donner une démonstration en caractéristique non nulle. Comme nous le verrons plus bas, un des principaux obstacles en caractéristique non nulle est le fait que les relations d'orthogonalité des caractères des représentations de carré intégrable ne sont pas prouvées à ce jour pour le groupe G' . Bien entendu, si nous démontrons la correspondance de Jacquet–Langlands d'une autre façon, ces relations d'orthogonalité pour G' en découleront puisqu'on les a déjà montrées pour G [2]. C'est en effet ce qui va se passer. Attaquer la correspondance en essayant de prouver l'orthogonalité pour G' en caractéristique non nulle semble depuis longtemps moins raisonnable que de l'attaquer par la méthode des “corps proches” en suivant une idée de Kazhdan [17]. C'est ce chemin que nous allons suivre. Expliquons la démarche préconisée et les difficultés rencontrées.

Soient F un corps local de caractéristique non nulle et D_F une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 . Soit r un entier strictement positif. On pose $n = rd$. On note G'_F le groupe $GL_r(D_F)$. Soient O_F l'anneau des entiers de F , P_F l'idéal maximal de O_F et π_F une uniformisante de F . Soient O_{D_F} l'anneau des entiers de D_F et P_{D_F} l'idéal maximal de O_{D_F} . On fixe une uniformisante π_{D_F} de D_F . On pose $K_F = GL_r(O_{D_F})$ et, pour tout entier positif non nul l , $K_F^l = Id + M_r(P_{D_F}^l)$. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G'_F , on note $H(G'_F; K)$ l'algèbre de Hecke des fonctions localement constantes à support compact sur G'_F qui sont bi-invariantes par K . Si π est une représentation lisse irréductible de G'_F , alors le niveau de π (notation $niv(\pi)$) est par définition 0 si π a un vecteur fixe non nul sous K_F et le plus petit entier positif l tel que π ait un vecteur fixe non nul sous K_F^l sinon. Il est alors connu qu'il y a une correspondance bijective entre les représentations lisses irréductibles de G'_F de niveau inférieur ou égal à l et les $H(G'_F, K_F^l)$ -modules irréductibles. Pour étudier $H(G'_F, K_F^l)$, on part de la décomposition de Bruhat

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F} K_F A K_F,$$

où \mathcal{A}_F est l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ telles que pour tout i, j on ait $a_{ij} = \delta_{i,j} \pi_{D_F}^{a_i}$, avec $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$. Si l est un entier strictement positif, alors K_F^l est un sous-groupe distingué de K_F et on peut donc obtenir une décomposition du type

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F} \coprod_{(x,y)} K_F^l x A y K_F^l.$$

Alors, l'ensemble des fonctions caractéristiques des ensembles $K_F^l x A y K_F^l$ forme une base de l'espace vectoriel $H(G'_F, K_F^l)$. L'ensemble des couples (x, y) s'identifie de façon naturelle à un sous-ensemble de $(K_F/K_F^l) \times (K_F/K_F^l)$. Or, on a

$$K_F/K_F^l \cong GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ld}).$$

L'idée de Kazhdan se traduit, dans notre situation, de la façon suivante : si L est un corps local non archimédien de caractéristique non nulle, et π_L une uniformisante fixée de L , si m est un entier strictement positif, on dit que L est m -proche de F (ou que L et F sont m -proches) s'il existe un isomorphisme d'anneaux

$$\bar{\lambda}_{FL}^m : O_F/P_F^m \rightarrow O_L/P_L^m$$

qui envoie la classe de π_F sur la classe de π_L . Dans cette situation, on peut considérer sur L une algèbre à division centrale de dimension d^2 qui ait le même invariant de Hasse que D_F , et, si on adopte toutes les notations plus haut aussi pour le corps L , obtenir que $\bar{\lambda}_{FL}^m$ induit naturellement un isomorphisme de $O_{D_F}/P_{D_F}^{md}$ sur $O_{D_L}/P_{D_L}^{md}$. Ensuite on utilise les décompositions

$$G'_F = \coprod_{A_F \in \mathcal{A}_F} \coprod_{(x_F, y_F)} K_F^m x_F A_F y_F K_F^m$$

et

$$G'_L = \coprod_{A_L \in \mathcal{A}_L} \coprod_{(x_L, y_L)} K_L^m x_L A_L y_L K_L^m.$$

L'isomorphisme de $O_{D_F}/P_{D_F}^{md}$ sur $O_{D_L}/P_{D_L}^{md}$ induit un isomorphisme de $GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{md}) \times GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{md})$ sur $GL_r(O_{D_L}/P_{D_L}^{md}) \times GL_r(O_{D_L}/P_{D_L}^{md})$, et on peut espérer que cet isomorphisme réalise une bijection entre les sous-ensembles $\{(x_F, y_F)\}$ et $\{(x_L, y_L)\}$ de ces deux groupes sur lesquels sont indexées les partitions plus haut. Ceci est une première difficulté. On montre (lemme 2.7) que, en choisissant comme il faut les uniformisantes de D_F et D_L , on trouve bien une telle bijection. On obtient alors, par les considérations plus haut, une application bijective d'une base de $H(G'_F, K_F^m)$ sur une base de $H(G'_L, K_L^m)$, et donc un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels entre les deux algèbres de Hecke. Dans une situation idéale cette application serait en fait un isomorphisme d'algèbres (conjecture de Kazhdan), et induirait ainsi une bijection naturelle entre l'ensemble des représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à m de G'_F et l'ensemble des représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à m de G'_L . Remarquons que, si L et F sont m proches, et si $m \geq l > 0$, alors L et F sont trivialement l -proches. Nous montrons dans la section 2 (th. 2.13) le résultat suivant, plus faible que la conjecture de Kazhdan : pour tout entier strictement positif l , il existe un entier $m \geq l$ tel que, si L est un corps m proche de F , alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels entre $H(G'_F, K_F^l)$ et $H(G'_L, K_L^l)$ induit à partir de cette proximité est un isomorphisme d'algèbres. Nous prouvons aussi que la bijection induite entre l'ensemble des représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à l de G'_F et l'ensemble des représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à l de G'_L envoie les représentations de carré intégrable sur des représentations de carré intégrable et les représentations cuspidales sur des représentations cuspidales (th. 2.17), et qu'elle préserve les facteurs ε^l (th. 2.19). Comme elle préserve également le niveau, il s'ensuit que les résultats que nous avons prouvés dans [3] uniquement en caractéristique nulle (inégalités concernant le niveau et le conducteur d'une représentation), ainsi que leurs conséquences (théorème de finitude pour les représentations automorphes cuspidales d'une forme intérieure de GL_n), sont valables aussi en caractéristique non nulle (section 3, th. 3.1 et th. 3.2).

Supposons maintenant que nous voulions prouver le théorème 1.1 quand le corps F est de caractéristique non nulle. Nous voulons d’abord fixer une représentation essentiellement de carré intégrable π de G et trouver une représentation essentiellement de carré intégrable π' de G' telle qu’en posant $\mathbf{C}(\pi) = \pi'$ on ait la relation (1.1). Considérons un entier strictement positif l . On peut trouver m suffisamment grand pour que, si L est un corps local non archimédien de caractéristique nulle m -proche de F , on ait un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G_L & \xrightarrow{1} & G'_L \\ \uparrow 2 & & \uparrow 2' \\ G & \cdots & G' \end{array}$$

où

- la flèche 1 est la correspondance déjà établie en caractéristique nulle par [10],
- la flèche 2, conséquence de la proximité des corps F et L , est une application qui réalise une bijection entre l’ensemble de classes de représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à l de G et l’ensemble de classes de représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à l de G_L ,
- la flèche $2'$ joue un rôle similaire pour G' et G'_L ,
- les pointillés en bas représentent pour l’instant notre désir de construire une correspondance (Jacquet–Langlands en caractéristique non nulle).

Fixons $l \geq \text{niv}(\pi)$ (sans quoi la flèche 2 n’est pas définie pour π). On pense, naturellement, monter π le long de 2, transférer le long de 1, redescendre le long de $2'$ et prouver ensuite que le résultat ainsi obtenu est le bon candidat au poste de π' . Voici maintenant les principales difficultés :

- nous pouvons déplacer π le long de 2 et ensuite le long de 1, mais on n’est pas sûr de pouvoir descendre le résultat le long de $2'$; en effet, il se peut qu’il soit de niveau supérieur à l . C’est vrai que la flèche 2 préserve le niveau, mais 1 ne le préserve certainement pas dans le sens où il est défini ici (même si on espère qu’il conserve le niveau normalisé tel qu’il est défini dans la théorie des types). Prendre L plus proche revient à changer complètement de diagramme, et les mêmes problèmes recommencent. La solution est de borner uniformément, à partir uniquement de π , le niveau de toutes les représentations susceptibles d’intervenir dans la démonstration,
- même si on pouvait descendre le long de $2'$ le résultat ainsi obtenu, il est difficile de prouver que ce qu’on trouve convient pour définir une correspondance de Jacquet–Langlands entre G et G' . Les flèches 2 et $2'$ sont de nature essentiellement linéaire alors que la correspondance est de nature essentiellement harmonique.

Nous réglerons le premier problème en montrant que le facteur ε' d’une représentation (tel que défini dans [12]) est conservé à la fois par 1, 2, et $2'$. Donc, le facteur ε' de la représentation obtenue en appliquant 2 et ensuite 1 à π est égal au facteur ε' de π . Mais on sait borner le niveau d’une représentation à partir du conducteur qui se lit sur son facteur ε (voir la section 3). Or, à facteur ε' fixé, ce conducteur est borné. Tout cela montre qu’en se donnant π (et même en se donnant uniquement le facteur ε' de π), on se donne automatiquement un entier l' tel que le niveau de l’image par la flèche 1 de l’image par la flèche 2 de π soit inférieur à l' . En fixant donc π , on choisit dès le départ m (et donc L) de façon à ce qu’il fonctionne pour l' (à la place de l), et on est assuré du fait qu’on puisse promener π sur le diagramme jusqu’à G' .

Pour résoudre le deuxième problème, c’est plus difficile techniquement. Pour une relation du type (1.1) il faut regarder des couples $g \leftrightarrow g'$ où $g \in G$ et $g' \in G'$, mais les constructions faites avec des corps proches ne voient que des ouverts assez gros, pas des points. Nous serons

donc forcés de raisonner sur des voisinages de g et g' sur lesquels les caractères fonction des représentations qui nous intéressent sont constants. La difficulté, une fois de plus, sera un problème de borne uniforme (de la “taille” des ouverts). Ceci explique la machinerie calculatoire développée à la section 4.

Dans la deuxième section on étudie les groupes $GL_r(D)$ définis sur des corps proches, en suivant les indications de Kazhdan [17]. La construction est pénible; les résultats sont les théorèmes 2.17 et 2.19. Nous tirons dans la troisième section des conséquences immédiates de ces théorèmes : la validité des résultats de [3] en caractéristique non nulle, ici les th. 3.1 et 3.2. Ces résultats seront par ailleurs utilisés dans la preuve de la correspondance (section 5). Dans la quatrième section, nous donnons quelques résultats concernant l’analyse harmonique de deux groupes du type $GL_r(D)$ définis sur des corps proches et qui se correspondent comme dans la section 2. Dans la cinquième section nous démontrons enfin le théorème 1.1 en caractéristique non nulle. Nous nous inspirons fortement de [10]. Cet article a été rédigé en caractéristique nulle, et les auteurs utilisent plusieurs techniques que nous ne pouvons pas nous permettre dans le cas de caractéristique non nulle. Notamment, la correspondance est prouvée par une récurrence qui fait intervenir en même temps un transfert d’intégrales orbitales qu’on ne peut pas obtenir ici. Nous avons séparé la démonstration de la correspondance, en la rendant dépendante d’un seul résultat à prouver : l’orthogonalité des caractères (connu en caractéristique nulle mais non en caractéristique non nulle). Ici nous utilisons la théorie des corps proches décrite aux sections 2 et 4 et nous pratiquons un va-et-vient entre le théorème 1.1 et le théorème d’orthogonalité des caractères sur les groupes $GL_r(D)$ en caractéristique non nulle (th. 5.3), en prouvant, au passage, la validité de ce dernier résultat.

Ce travail a été mené dans le cadre d’une thèse de doctorat sous la direction de Guy Henniart ; je lui suis très reconnaissant de m’avoir proposé un si beau sujet, et de m’avoir encouragé et aidé tout au long de mes recherches, avec la gentillesse et la disponibilité qui le caractérisent. Je considérerai toujours un honneur que d’avoir été accueilli ce temps durant par le Laboratoire d’Arithmétique et Géométrie Algébrique de l’Université Paris-Sud, Orsay, où j’ai pu côtoyer des chercheurs exceptionnels, merveilleux exemples pour tout jeune mathématicien. Je remercie Bertrand Lemaire qui m’a beaucoup aidé par ses conseils et tous ceux avec lesquels j’ai eu des discussions mathématiques, et qui m’ont souvent donné des réponses à des questions vitales pour mon travail : Marie-France Vignéras, François Courtès, Anne-Marie Aubert, et les autres membres du séminaire Groupes Réductifs et Formes Automorphes. Je remercie ceux qui ont lu le manuscrit avec attention, et qui m’ont fait des commentaires très utiles : Guy Henniart, Hervé Jacquet, Colette Mœglin et Bertrand Lemaire.

2. Corps locaux proches et formes intérieures du groupe linéaire

Soient F un corps local de caractéristique non nulle, D_F une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F et G'_F le groupe $GL_r(D_F)$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et L un corps local m -proche de F au sens de [17]. On voudrait définir un groupe G'_L sur L tel qu’il y ait une ressemblance entre la théorie des représentations de G'_F et celle de G'_L à la manière dont Kazhdan l’a fait pour les groupes de Chevalley dans [17] et Lemaire pour GL_n dans [18]. L’idée est simple : choisir une algèbre à division D_L centrale sur L de dimension n^2 qui ait le même invariant de Hasse que D_F , et poser $G'_L = GL_r(D_L)$. Dans ce qui suit nous montrons que ce groupe est effectivement solution de notre problème ; on construit G'_L de façon à pouvoir vérifier les théorèmes que Kazhdan a montrés pour les groupes de Chevalley, et montrer aussi quelques autres résultats utiles pour la suite. Les résultats de 2.3 et 2.4 sont démontrés dans un cadre général dans [9]. On les a redémontrés ici d’une façon concrète dans ce cas particulier pour fixer les notations qu’on utilise par la suite.

2.1. Préliminaires sur les algèbres à division

Soient F un corps local non archimédien, v_F la valuation normalisée de F , O_F l'anneau des entiers de F , P_F l'idéal maximal de O_F formé des éléments de F de valuation strictement positive, $k_F = O_F/P_F$ le corps résiduel de F (de cardinal fini q) et π_F une uniformisante de F . Soit D une algèbre à division centrale sur F . On identifie F au sous-corps $1_D F$ de D . On sait que $\dim_F(D)$ est un carré d^2 . On sait également qu'il existe une valuation v_D sur D à valeurs dans \mathbb{Z} surjective qui prolonge dv_F ; on note O_D l'ensemble des éléments de D de valuation positive ou nulle et P_D l'ensemble des éléments de D de valuation strictement positive; O_D est un anneau local non commutatif et P_D est l'idéal (bilatère) maximal de O_D .

On dispose d'une classification des algèbres à division centrales sur F de dimension d^2 : si D est une telle algèbre, il existe un sous-corps commutatif maximal E de D qui soit une extension non ramifiée de degré d de F ; il existe également un élément π_D de D et un générateur σ du groupe de Galois de l'extension E/F tels que :

- $\pi_D^d = \pi_F$,
- $D = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \pi_D^i E$,
- pour tout $e \in E$ on a $\pi_D^{-1} e \pi_D = \sigma(e)$. L'élément σ est uniquement déterminé et permet de calculer l'invariant de Hasse de D .

Réciproquement, en se donnant un générateur σ du groupe de Galois de E/F où E est une extension non ramifiée de degré d de F (unique à isomorphisme près), on peut construire une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 en lui imposant les trois conditions plus haut. Si on fixe E , deux telles algèbres sont isomorphes si et seulement si $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ est le même. Ce sont les résultats de la Proposition a, p. 277, et du Corollaire b, p. 335 de [19].

Nous commençons par la relation entre les extensions non ramifiées de même degré sur deux corps locaux proches.

2.2. Préliminaires sur les extensions non ramifiées d'un corps local

Soient $F, v_F, O_F, P_F, \pi_F, k_F, q = \text{card}(k_F)$ comme plus haut. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si on fixe une clôture algébrique \overline{F} de F , alors il existe une unique extension E non ramifiée de degré d de F incluse dans \overline{F} . On a les propriétés suivantes :

- la valuation normalisée de E prolonge celle de F et π_F est une uniformisante de E ;
- si $l = q^d$ et P est le polynôme $P(X) = X^{l-1} - 1 \in F[X]$, alors E est un corps de décomposition de P ; en particulier, pour toute racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité y_E dans \overline{F} , on a $y_E \in E$ et $E = F[y_E]$;
- le cardinal du corps résiduel $k_E = O_E/P_E$ de E est égal à q^d et on a un isomorphisme de groupes $g_{E/F}$ de $\text{Gal}(E/F)$ sur $\text{Gal}(k_E/k_F)$; cet isomorphisme est donné par l'application suivante : si $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ alors σ induit un automorphisme σ' de O_E qui envoie P_E sur P_E et qui agit comme l'identité sur O_F ; σ' induit par conséquent un isomorphisme σ'' de k_E sur k_E dont la restriction à k_F est l'identité et on pose $g_{E/F}(\sigma) = \sigma''$.

C'est la Proposition 17.8, p. 334, [19].

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $O_{Fm} = O_F/P_F^m$ et $O_{Em} = O_E/P_E^m$. Dans ce qui suit, une barre au-dessus d'un symbole rappelle que ce symbole est rattaché (d'une façon ou d'une autre) à k_F ou k_E , et un chapeau au-dessus d'un symbole rappelle qu'il est rattaché à O_{Fm} ou O_{Em} . Soient P le polynôme $X^{l-1} - 1 \in F[X]$, \hat{P} le polynôme $X^{l-1} - \hat{1} \in O_{Fm}[X]$ et \overline{P} le polynôme $X^{l-1} - \bar{1} \in k_F[X]$. Soit $\overline{P} = \overline{P}_1 \overline{P}_2 \dots \overline{P}_k$ une décomposition en produit de polynômes unitaires irréductibles de \overline{P} dans $k_F[X]$. Supposons (sans restreindre la généralité) que \overline{P}_1 ait une racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité \bar{y} dans l'extension k_E de k_F . On sait qu'alors le degré de \overline{P}_1 est égal à d .

PROPOSITION 2.1. – (a) Il existe un unique polynôme unitaire $\widehat{P}_1 \in O_{F_m}[X]$ tel que

(A) \widehat{P}_1 divise \widehat{P} , et

(B) l'image de \widehat{P}_1 dans $k_F[X]$ soit \overline{P}_1 (en particulier \widehat{P}_1 est irréductible).

(b) Soit y l'unique racine de P dans E telle que l'image de y dans k_E soit \bar{y} . Notons \hat{y} l'image de y dans O_{E_m} . Il existe un isomorphisme de O_{F_m} -algèbres

$$\hat{f}_m : O_{F_m}[X]/(\widehat{P}_1) \rightarrow O_{E_m}$$

induit par le morphisme $f_m : O_{F_m}[X] \rightarrow O_{E_m}$ donné par $Q \mapsto Q(\hat{y})$.

Démonstration. – (a) On montre l'existence et l'unicité.

Existence : Dans la démonstration de la Proposition a, p. 277, de Pierce on montre que la décomposition de P en produit de polynômes unitaires irréductibles est du type $P = P_1 P_2 \dots P_k$ où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, l'image facteur de P_i dans $k_F[X]$ est \overline{P}_i (en outre, les \overline{P}_i sont tous distincts parce que \overline{P} est sans racine multiple dans une clôture algébrique de k_F). On vérifie aussitôt que l'image facteur de P_1 dans $O_{F_m}[X]$ satisfait à (A) et (B).

Unicité : Soit \widehat{M} un polynôme unitaire de $O_{F_m}[X]$ qui satisfait à (A) et (B). Il suffit de montrer que \widehat{M} a un représentant M dans $O_F[X]$ qui divise $P = P_1 P_2 \dots P_k$ (voir l'Existence); on aurait alors que M est un produit des P_i , et, par (B), que $M = P_1$.

Écrivons $\widehat{P} = \widehat{M}\widehat{V}$ où, \widehat{M} et \widehat{P} étant unitaires, \widehat{V} est unitaire. Soient N un représentant unitaire de \widehat{M} et U un représentant unitaire de \widehat{V} dans $O_F[X]$. On applique le théorème 1 de [4] IV, 3, plus précisément la remarque qui suit la démonstration. Cette variante plus fine du lemme de Hensel assure que si N et U sont deux polynômes unitaires tels que

$$P \equiv NU \pmod{(\pi_F^m)},$$

et par ailleurs le résultant des polynômes N et U est de valuation nulle, alors la décomposition "se relève" au sens où il existe une décomposition $P = MV$ dans $O_F[X]$ où M et V sont tels que

$$M \equiv N \pmod{(\pi_F^m)}$$

et

$$V \equiv U \pmod{(\pi_F^m)}.$$

Or, le résultant \widehat{R} de \widehat{M} et \widehat{V} est de valuation nulle parce que, les polynômes étant unitaires, la réduction de \widehat{R} modulo π_F est égale au résultant des réductions \overline{M} et \overline{V} modulo π_F , et ce dernier est non nul dans k_F , parce que $\overline{P} = \overline{M}\overline{V}$ est sans facteurs multiples, soit \overline{M} et \overline{V} sont forcément premiers entre eux. (Le lecteur remarquera que la difficulté de cet exercice réside dans le fait que O_{mF} n'est pas principal. En utilisant que O_F et k_F le sont on coince le problème entre les deux.)

(b) L'application f_m est visiblement un morphisme de O_{F_m} -algèbres. Montrons qu'elle est surjective. L'algèbre O_{E_m} est un O_{F_m} -module libre de rang d dont une base est

$$\mathcal{B} = \{\hat{1}, \hat{y}, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^{d-1}\};$$

en effet, \mathcal{B} est une famille génératrice car $\{1; y; y^2 \dots y^{d-1}\}$ était une famille génératrice de O_E sur O_F ([23], prop. 5, p. 20) et \mathcal{B} est une famille libre car, \widehat{P}_1 étant irréductible, c'est le polynôme minimal de \hat{y} . Or, la base \mathcal{B} se trouve dans l'image de f_m donc f_m est bien surjective. Comme le noyau de f_m est clairement l'idéal principal engendré par \widehat{P}_1 , le résultat en découle. \square

PROPOSITION 2.2. – On note G_m l'ensemble des O_{Fm} -automorphismes de l'algèbre O_{Em} . Alors le morphisme naturel $g_{m,E/F} : Gal(E/F) \rightarrow G_m$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. – On rappelle qu'on a noté $g_{E/F}$ l'isomorphisme canonique

$$Gal(E/F) \simeq Gal(k_E/k_F).$$

S'il existait σ et σ' distincts dans $Gal(E/F)$ tels que $g_{m,E/F}(\sigma) = g_{m,E/F}(\sigma')$ alors on aurait également $g_{E/F}(\sigma) = g_{E/F}(\sigma')$ ce qui est impossible car $g_{E/F}$ est un isomorphisme. Donc $g_{m,E/F}$ est injective. D'autre part, d'après la proposition 2.1(b), un O_{Fm} -automorphisme de l'algèbre O_{Em} est uniquement déterminé par l'image de \hat{y} , et par ailleurs cette image doit être une racine de \hat{P}_1 . Comme le degré de \hat{P}_1 est d , le cardinal de G_m est inférieur ou égal à d qui est le cardinal de $Gal(E/F)$. Mais alors, l'application $g_{m,E/F}$ étant injective elle est forcément surjective et finalement bijective. \square

2.3. Corps locaux proches et extensions non ramifiées

Soit F un corps local de caractéristique non nulle. Si L est un corps local de caractéristique nulle et m est un entier supérieur ou égal à 1, on dit que F et L sont m -proches si O_{Fm} et O_{Lm} sont isomorphes en tant qu'anneaux. On appelle alors un triplet de m -proximité un triplet $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}_{FL}^m)$ où π_F est une uniformisante de F , π_L est une uniformisante de L , et $\bar{\lambda}_{FL}^m$ est un isomorphisme de O_{Fm} sur O_{Lm} qui envoie la classe de π_F sur la classe de π_L . Soient F et L deux corps locaux m -proches ($m \geq 1$) et $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}_{FL}^m)$ un triplet de m -proximité correspondant. Soient $d \geq 1$, E une extension non ramifiée de dimension d de F et K une extension non ramifiée de dimension d de L .

THÉORÈME 2.3. – Les corps E et K sont m -proches.

Démonstration. – L'isomorphisme $\bar{\lambda}_{FL}^m : O_{Fm} \rightarrow O_{Lm}$ s'étend de façon naturelle en un isomorphisme $\bar{\lambda}_{FL}^m : O_{Fm}[X] \rightarrow O_{Lm}[X]$. Soient $\bar{P}_F \in k_F[X]$ et $\hat{P}_F \in O_{Fm}[X]$ choisis comme \bar{P}_1 et \hat{P}_1 dans la proposition 2.1. Posons

$$\bar{P}_L = \bar{\lambda}_{FL}^m(\bar{P}_F) \in k_L[X] \quad \text{et} \quad \hat{P}_L = \bar{\lambda}_{FL}^m(\hat{P}_F) \in O_{Lm}[X].$$

Alors on a un isomorphisme

$$(2.1) \quad \bar{\lambda}_{FL}^m : O_{Fm}[X]/(\hat{P}_F) \simeq O_{Lm}/(\hat{P}_L).$$

Maintenant on sait par le point (b) de la proposition 2.1 que

$$(2.2) \quad O_{Fm}[X]/(\hat{P}_F) \simeq O_{Em},$$

isomorphisme qui dépend du choix d'une racine de \hat{P}_F . D'autre part \hat{P}_L est un polynôme qui vérifie les conditions (A) et (B) de la proposition (avec corps de base cette fois le corps L). Par unicité et par le point (b) de la proposition 2.1 (appliquée cette fois sur L) on a un isomorphisme

$$(2.3) \quad O_{Lm}[X]/(\hat{P}_L) \simeq O_{Km}$$

qui dépend du choix d'une racine primitive de \hat{P}_F . Des isomorphismes (2.1), (2.2) et (2.3) on déduit un isomorphisme

$$\bar{\lambda}_{EK}^m : O_{Em} \simeq O_{Km}.$$

Le triplet $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}_{EK}^m)$ est un triplet de m -proximité pour les corps E et K . \square

2.4. Corps locaux proches et algèbres à division

Soient F et L deux corps locaux m -proches ($m \geq 1$) et soit D_F une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F . On choisit un sous-corps non ramifié maximal E de D_F et notons σ_E le générateur du groupe de Galois de l'extension E/F qui correspond à D_F comme dans l'introduction. Soit K une extension non ramifiée de degré d de L . Il existe un isomorphisme canonique $g_{E/F, K/L} : Gal(E/F) \simeq Gal(K/L)$, image de l'isomorphisme

$$g : Gal(k_E/k_F) \simeq Gal(k_K/k_L)$$

qui envoie le Frobenius sur le Frobenius. À son tour, l'isomorphisme $g_{E/F, K/L}$ induit (par la proposition 2.2) un isomorphisme $g_{m, E/F, K/L} : G_{m, E/F} \simeq G_{m, K/L}$. Par transport de structure on a pour $\hat{\sigma} \in G_{m, E/F}$ et $\hat{x} \in O_{Em}$:

$$(2.4) \quad g_{m, E/F, K/L}(\hat{\sigma})(\bar{\lambda}_{EK}^m(\hat{x})) = \bar{\lambda}_{EK}^m(\hat{\sigma}(\hat{x})).$$

On note D_L l'algèbre à division centrale sur L de dimension d^2 qui correspond à l'extension K/L et à l'élément $\sigma_K = g_{E/F, K/L}(\sigma_E)$ du groupe de Galois $Gal(K/L)$. On fixe une uniformisante π_{D_L} de D_L avec les propriétés de 2.1 (relatives à π_L).

En reprenant les notations de 2.1 on a

$$(2.5) \quad D_F = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \pi_{D_F}^i E,$$

$$(2.6) \quad O_{D_F} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i O_E,$$

$$(2.7) \quad P_{D_F}^{md} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i P_E^m,$$

d'où

$$(2.8) \quad O_{D_F} / P_{D_F}^{md} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i O_E / P_E^m.$$

On a donc un isomorphisme de groupes additifs $\bar{\lambda}_{D_F D_L}^m : O_{D_F} / P_{D_F}^{md} \simeq O_{D_L} / P_{D_L}^{md}$ qui envoie $\sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i \hat{\lambda}_i$ sur $\sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_L}^i \bar{\lambda}_{EK}^m(\hat{\lambda}_i)$ pour tout d -uplet $\{\hat{\lambda}_0; \hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_{d-1}\} \in O_{Em}^d$. Montrons que cet isomorphisme est compatible avec la multiplication (raison pour laquelle on a choisi σ_K correspondant à σ_E). En effet, il suffit de vérifier la compatibilité avec la multiplication sur deux éléments du type $\pi_{D_F}^i \hat{x}$ et $\pi_{D_F}^j \hat{x}'$ où $0 \leq i, j \leq d-1$ et $\hat{x}, \hat{x}' \in O_{Em}$. Soit $\hat{\sigma}_E$ l'image de σ_E dans $G_{m, E/F}$. On a

$$(2.9) \quad \pi_{D_F}^i \hat{x} \pi_{D_F}^j \hat{x}' = \pi_{D_F}^{i+j} g_{m, E/F, K/L}(\hat{\sigma}_E^j)(\hat{x}) \hat{x}' \quad \text{si } i+j < d$$

et

$$(2.10) \quad \pi_{D_F}^i \hat{x} \pi_{D_F}^j \hat{x}' = \pi_{D_F}^{i+j-n} \hat{\pi}_F g_{m,E/F,K/L}(\hat{\sigma}_E^j)(\hat{x})\hat{x}' \quad \text{si } i + j \geq n.$$

Finalement, en utilisant la relation (2.4) plus haut on a obtenu le :

THÉORÈME 2.4. – *La flèche $\bar{\lambda}_{D_F D_L}^m : O_{D_F}/P_{D_F}^{md} \rightarrow O_{D_L}/P_{D_L}^{md}$ définie plus haut est un isomorphisme d’anneaux.*

2.5. Bijections formelles

Prenons le cas le plus simple du groupe linéaire sur deux corps locaux proches F et L . Ce cas a déjà été traité par Lemaire qui a montré comment on peut “transférer” certaines parties ouvertes et compactes de $GL_n(F)$ à $GL_n(L)$ et les implications qu’a ce transfert pour les théories des représentations des deux groupes. Supposons maintenant qu’on se soit donné un élément d’un de ces sous-ensembles de $GL_n(F)$ et un élément du sous-ensemble de $GL_n(L)$ correspondant et qu’on veuille comparer leurs polynômes caractéristiques qui sont, certes, à coefficients dans des corps différents, mais proches. C’est un problème très concret si on se représente les deux éléments comme des matrices dont on sait comparer les éléments. Seulement, la façon abstraite dont on définit les bijections entre des objets attachés à $GL_n(F)$ et $GL_n(L)$ respectivement ne le permet pas. On va alors définir ici des *bijection formelles* (formelles parce qu’elles ne respectent pas les opérations) qui nous permettront de traiter ce genre de situation concrète. Ce problème peut être vu aussi comme celui d’un choix *précis* de représentant dans une classe d’équivalence.

2.5.1. Les corps locaux proches

Soit F un corps local de caractéristique non nulle. On choisit un système de représentants S_F de O_F/P_F dans O_F .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, L un corps m -proche de F et $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}_{F L}^m)$ le triplet de m -proximité associé. Pour tout $x \in S_F$ on choisit un représentant $y(x)$ dans O_L de l’image par $\bar{\lambda}_{F L}^m$ (dans O_L/P_L^m) de la classe de x dans O_F/P_F^m . L’ensemble $S_L = \{y(x) : x \in S_F\}$ est un système de représentants de O_L/P_L^m dans O_L . Pour simplifier les calculs, on impose la condition suivante : 0_F et 1_F font partie de S_F , et on a $y(0_F) = 0_L$ et $y(1_F) = 1_L$.

On note $\lambda_{F L}^m$ la bijection de S_F sur S_L qui envoie x sur $y(x)$. Si on se représente les éléments de F et de L par des séries à l’aide des uniformisantes π_F et π_L et des systèmes de représentants S_F et S_L respectivement, on obtient une bijection de F dans L qui prolonge $\lambda_{F L}^m$ – et pour laquelle on utilisera donc la même notation – donnée par :

$$\lambda_{F L}^m \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} s_j \pi_F^j \right) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \lambda_{F L}^m(s_j) \pi_L^j.$$

La bijection $\lambda_{F L}^m$ induit une bijection (bien définie) de O_F/P_F^m sur O_L/P_L^m et cette bijection n’est autre que l’isomorphisme $\bar{\lambda}_{F L}^m$. On appelle $\lambda_{F L}^m$ une *bijection formelle*. Notons les propriétés suivantes qui sont immédiates :

$$(2.11) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in F, \quad \lambda_{F L}^m(\pi_F^i x) = \pi_L^i \lambda_{F L}^m(x),$$

$$(2.12) \quad \forall x \in F, \quad v_L(\lambda_{F L}^m(x)) = v_F(x).$$

2.5.2. Les extensions non ramifiées

Soient F et L comme plus haut, E une extension non ramifiée de F de degré d et K une extension non ramifiée de L de degré d . Nous reprenons les notations de 2.2. Les corps E et K

étant m -proches par le théorème 2.3, on peut bien entendu définir une bijection formelle entre E et K comme plus haut en oubliant complètement les corps F et L . Mais, pour définir une bijection formelle entre deux algèbres à division sur F et L respectivement, bijection qui ait une certaine propriété utile par la suite (voir 2.5.3), on définit une bijection formelle entre E et K de la façon suivante, plus précise : au lieu de partir comme dans la sous-section 2.5.1 avec un système de représentants S_E *quelconque* de O_E/P_E dans O_E , on fixe un isomorphisme $\lambda_{EK}^m : k_E \simeq k_K$ compatible avec $\bar{\lambda}_{FL}^m : k_F \simeq k_L$ et on impose que

- S_E soit formé de 0 et de toutes les racines du polynôme $P_E = X^{l-1} - 1 \in F[X]$,
- S_K soit formé de 0 et de toutes les racines du polynôme $P_K = X^{l-1} - 1 \in L[X]$,
- la bijection λ_{EK}^m entre S_E et S_K soit donnée par l'application suivante : si y est une racine de P_E , et \bar{y} est l'image de y dans k_E , alors $\lambda_{EK}^m(y) = z$ où z est l'unique racine de P_K qui se trouve au-dessus de $\bar{\lambda}_{EK}^m(\bar{y}) \in k_K$.

C'est à partir de ce choix (qui est, remarquons-le), compatible avec la condition $y(0_F) = 0_L$ et $y(1_F) = 1_L$, qu'on étend l'application λ_{EK}^m en une bijection $\lambda_{EK}^m : E \simeq K$ comme dans la sous-section 2.5.1.

On obtient ainsi une bijection qui a la propriété d'être compatible avec l'action des éléments du groupe de Galois $Gal(E/F)$. En effet, quel que soit $\sigma \in Gal(E/F)$ on vérifie facilement que, pour tout $x \in E$,

$$(2.13) \quad \lambda_{EK}^m(\sigma(x)) = g_{E/F, K/L}(\sigma)(\lambda_{EK}^m(x)).$$

L'application λ_{EK}^m est une bijection formelle entre les corps locaux E et K . Elle induit un isomorphisme $\bar{\lambda}_{EK}^m : O_{Em} \simeq O_{Km}$.

2.5.3. Les algèbres à division

Soient F, E, D_F et L, K, D_L comme dans la sous-section 2.4. On suppose qu'on a construit des bijections formelles $\lambda_{FL}^m : F \simeq L$ et $\lambda_{EK}^m : E \simeq K$ comme au 2.5.1 et 2.5.2. On construit une bijection formelle entre D_F et D_L de la façon (naturelle) suivante : on pose, pour tout d -uplet $(\alpha_0; \alpha_1 \dots \alpha_{d-1}) \in E^d$,

$$(2.14) \quad \lambda_{D_F D_L}^m \left(\sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i \alpha_i \right) = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_L}^i \lambda_{EK}^m(\alpha_i).$$

La bijection $\lambda_{D_F D_L}^m$ induit une bijection (bien définie) de $O_{D_F}/P_{D_F}^{md}$ sur $O_{D_L}/P_{D_L}^{md}$ et cette bijection est l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{D_F D_L}^m$. La bijection $\lambda_{D_F D_L}^m$ a aussi les propriétés suivantes :

$$(2.15) \quad \forall x \in D_F, \quad v_{D_L}(\lambda_{FL}^m(x)) = v_{D_F}(x),$$

$$(2.16) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in D_F, \quad \lambda_{D_F D_L}^m(\pi_{D_F}^i x) = \pi_{D_L}^i \lambda_{D_F D_L}^m(x),$$

$$(2.17) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in D_F, \quad \lambda_{D_F D_L}^m(x \pi_{D_F}^i) = \lambda_{D_F D_L}^m(x) \pi_{D_L}^i.$$

Les propriétés (2.15) et (2.16) sont évidentes, seule la propriété (2.17) pose un petit problème. Il suffit bien sûr de la montrer pour $x \in E$. On sait que si $x \in E$ alors $x \pi_{D_F}^i = \pi_{D_F}^i \sigma_E^i(x)$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $x \in E$ on a $\lambda_{EK}^m(\sigma_E^i(x)) = \sigma_K^i(\lambda_{EK}^m(x))$. Mais c'est la relation (2.13) (et c'était justement pour avoir cette propriété (2.17) qu'on avait choisi λ_{EK}^m comme dans 2.5.2).

2.5.4. Les matrices, les polynômes

Si F, D_F et L, D_L sont comme au 2.5.3, la bijection formelle entre F et L s'étend de façon naturelle en une bijection entre F^n et L^n . Si U est un F -espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base et V un L -espace vectoriel de dimension n muni d'une base, une bijection formelle entre F et L s'étend "composante par composante" en une bijection entre U et V . C'est pareil pour des espaces vectoriels à droite ou à gauche sur D_F et D_L . En particulier cela vaut pour les espaces de matrices $M_n(F)$, $M_n(L)$ et $M_r(D_F)$, $M_r(D_L)$, et aussi pour des espaces de polynômes. En général, on notera λ_{FL}^m la bijection formelle donnée entre F et L , et ζ_{FL}^m la bijection induite entre $M_n(F)$ et $M_n(L)$. Pareillement, la bijection formelle entre $M_r(D_F)$ et $M_r(D_L)$ induite par $\lambda_{D_FD_L}^m$ sera notée $\zeta_{D_FD_L}^m$.

2.6. La construction

Soient F, E, D_F, L, K, D_L comme plus haut et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'étudier les ressemblances entre les groupes $G'_F = GL_r(D_F)$ et $G'_L = GL_r(D_L)$. On va suivre le chemin indiqué par Kazhdan dans [17]. On pose $K_F = GL_r(O_{D_F})$, $K_L = GL_r(O_{D_L})$ et, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on note K_F^l le noyau de la projection $K_F \rightarrow GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ld})$ et K_L^l le noyau de la projection $K_L \rightarrow GL_r(O_{D_L}/P_{D_L}^{ld})$. Pour tout l , K_F^l est un sous-groupe distingué de K_F . C'est aussi le groupe $Id + M_r(P_{D_F}^{ld})$. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G'_F on note $H(G'_F; K)$ l'algèbre des fonctions complexes localement constantes à support compact sur G'_F et bi-invariantes par K . On fait de même pour G'_L .

Notation. – Si $g = (g_{ij}) \in M_r(D_F)$ alors on note $v_F(g)$ le minimum des valuations en tant qu'éléments de D_F des coefficients g_{ij} de g . De même sur L .

Maintenant, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, si F et L sont l -proches, on construit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\zeta_{D_FD_L}^l : H(G'_F; K_F^l) \simeq H(G'_L; K_L^l).$$

Cet isomorphisme sera dépendant du triplet de l -proximité $(\lambda_{D_FD_L}^m; \pi_{D_F}; \pi_{D_L})$ déduit du triplet de l -proximité fixé pour F et L comme nous l'avons expliqué au 2.4.

Posons

$$\mathcal{A}_F = \{A = (a_{ij})_{i,j} \in GL_r(D_F) : a_{ij} = \delta_{ij} \pi_{D_F}^{a_i}, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r\}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroneker.

LEMME 2.5. – On a

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}} K_F A K_F.$$

Démonstration. – Voir [21], p. 43. □

Soit $l \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{A}_F$. Comme K_F^l est un sous-groupe de K_F , il existe un sous-ensemble X de $K_F \times K_F$ tel que

$$K_F A K_F = \coprod_{(B;C) \in X} K_F^l B A C^{-1} K_F^l.$$

Posons

$$\mathbf{T}_{F,l} = GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ld}) \times GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ld}).$$

Si $(B; C) \in K_F \times K_F$, alors $K_F^l B A C^{-1} K_F^l$ ne dépend que de la classe $(\widehat{B}; \widehat{C})$ de $(B; C)$ dans $\mathbf{T}_{F,l}$. On peut donc définir sans ambiguïté $K_F^l \widehat{B} A \widehat{C}^{-1} K_F^l$ pour tout $(\widehat{B}; \widehat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$. Notons

maintenant $\mathbf{H}_{F,l,A}$ l'ensemble des couples $(\widehat{B}; \widehat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$ tels qu'il existe un représentant B de \widehat{B} dans $GL_r(O_{D_F})$ et un représentant C de \widehat{C} dans $GL_r(O_{D_F})$ tels qu'on ait $BA = AC$. En écrivant cette relation $BAC^{-1} = A$ on vérifie que $\mathbf{H}_{F,l,A}$ est un sous-groupe de $\mathbf{T}_{F,l}$. Posons enfin

$$\widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} = \mathbf{T}_{F,l} / \mathbf{H}_{F,l,A}.$$

LEMME 2.6. – (a) Pour tout $(\widehat{B}; \widehat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$, l'ensemble $K_F^l \widehat{B} \widehat{A} \widehat{C}^{-1} K_F^l$ ne dépend que de la classe $(\widetilde{B}; \widetilde{C})$ de $(\widehat{B}; \widehat{C})$ dans $\widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$; on le note $K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l$.

(b) On a

$$K_F A K_F = \coprod_{(\widetilde{B}; \widetilde{C}) \in \widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l.$$

Démonstration. – (a) Soient $(\widetilde{B}; \widetilde{C}) \in \widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$ et $(\widehat{B}; \widehat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$, $(\widehat{B}'; \widehat{C}') \in \mathbf{T}_{F,l}$ deux représentants de $(\widetilde{B}; \widetilde{C})$. Il existe donc $(\widehat{U}; \widehat{V}) \in \mathbf{H}_{F,l,A}$ tel que $\widehat{B}' = \widehat{B}\widehat{U}$ et $\widehat{C}' = \widehat{C}\widehat{V}$. Soit $(B; C)$ un représentant de $(\widehat{B}; \widehat{C})$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ et U et V des représentants de \widehat{U} et de \widehat{V} dans $GL_r(O_{D_F})$ qui vérifient $UA = AV$. On a donc

$$\begin{aligned} K_F^l \widehat{B}' \widehat{A} \widehat{C}'^{-1} K_F^l &= K_F^l \widehat{B} \widehat{U} \widehat{A} \widehat{V}^{-1} \widehat{C}^{-1} K_F^l = K_F^l B U A V^{-1} C^{-1} K_F^l \\ &= K_F^l B A C^{-1} K_F^l = K_F^l \widehat{B} \widehat{A} \widehat{C}^{-1} K_F^l. \end{aligned}$$

(b) On a

$$K_F A K_F = \bigcup_{(B; C) \in GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})} K_F^l B A C^{-1} K_F^l$$

et pour tout $(B; C) \in GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ on a

$$K_F^l B A C^{-1} K_F^l = K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l.$$

Donc,

$$K_F A K_F = \bigcup_{(\widetilde{B}; \widetilde{C}) \in \widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l.$$

Il suffit de montrer que la réunion est bien disjointe. Soient $(\widetilde{B}; \widetilde{C})$ et $(\widetilde{B}'; \widetilde{C}')$ deux éléments de $\widetilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$. Alors $K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l$ et $K_F^l \widetilde{B}' \widetilde{A} \widetilde{C}'^{-1} K_F^l$ sont ou disjointes ou égales. Supposons que

$$K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l = K_F^l \widetilde{B}' \widetilde{A} \widetilde{C}'^{-1} K_F^l.$$

Comme K_F^l est distingué dans K_F on a

$$K_F^l \widetilde{B} \widetilde{A} \widetilde{C}^{-1} K_F^l = \widetilde{B} K_F^l A K_F^l \widetilde{C}^{-1}$$

et

$$K_F^l \widetilde{B}' \widetilde{A} \widetilde{C}'^{-1} K_F^l = \widetilde{B}' K_F^l A K_F^l \widetilde{C}'^{-1}.$$

En posant $\widetilde{X} = \widetilde{B}'^{-1} \widetilde{B}$ et $\widetilde{Y} = \widetilde{C}'^{-1} \widetilde{C}$ et en réutilisant le fait que K_F^l est distingué dans K_F , on obtient

$$K_F^l \widetilde{X} \widetilde{A} \widetilde{Y}^{-1} K_F^l = K_F^l A K_F^l.$$

Il suffit donc de montrer que dans ce cas on a forcément $\tilde{X} = \tilde{Y} = \tilde{1}$. C'est pareil que de montrer que, si $(\hat{X}; \hat{Y})$ est dans $\mathbf{T}_{F,l}$ et vérifie $K_F^l \hat{X} \hat{A} \hat{Y}^{-1} K_F^l = K_F^l A K_F^l$, alors $(\hat{X}; \hat{Y})$ a un représentant $(X; Y)$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ tel que $XA = AY$. Montrons que cette assertion est vraie : $K_F^l \hat{X} \hat{A} \hat{Y}^{-1} K_F^l = K_F^l A K_F^l$ implique qu'il existe un représentant $(X'; Y')$ de $(\hat{X}; \hat{Y})$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ et deux éléments k_1 et k_2 de K_F^l tels qu'on ait $X' A Y'^{-1} = k_1 A k_2$. Mais alors il suffit de prendre $X = k_1^{-1} X'$ et $Y = k_2 Y'$, car l'appartenance de k_1 et k_2 à $K_F^l = Id + M_r(P_{D_F}^{ld})$ nous garantit $\hat{X} = \hat{X}'$ et $\hat{Y} = \hat{Y}'$ et avec ce choix on a bien $XA = AY$. \square

Maintenant on va traiter les corps F et L à la fois. Les objets définis plus haut sur F se définissent de même sur L et c'est l'indice F ou L qui indique à tout moment de quel corps il s'agit. Les résultats plus haut sont évidemment valables aussi sur L .

On se rappelle l'isomorphisme $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : O_{D_F} / P_{D_F}^{ld} \simeq O_{D_F} / P_{D_F}^{ld}$. Il induit un isomorphisme $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : \mathbf{T}_{F,l} \simeq \mathbf{T}_{L,l}$.

On se rappelle également la bijection formelle $\zeta_{D_F D_L}^l : M_r(D_F) \simeq M_r(D_L)$. Elle induit une bijection $\zeta_{D_F D_L}^l : \mathcal{A}_F \simeq \mathcal{A}_L$.

LEMME 2.7. – Pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, l'isomorphisme $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : \mathbf{T}_{F,l} \simeq \mathbf{T}_{L,l}$ induit un isomorphisme

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : \mathbf{H}_{F,l,A} \simeq \mathbf{H}_{L,l,\zeta_{D_F D_L}^l(A)}$$

et par conséquent une bijection

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} \simeq \tilde{\mathbf{T}}_{L,l,\zeta_{D_F D_L}^l(A)}.$$

Démonstration. – Supposons que A soit la matrice $diag(\pi_{D_F}^{a_1}, \pi_{D_F}^{a_2}, \dots, \pi_{D_F}^{a_r})$. Soit $(\hat{B}; \hat{C}) \in \mathbf{H}_{F,l,A}$. Il existe donc un représentant $(B; C)$ de $(\hat{B}; \hat{C})$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ tel que

$$(2.18) \quad BA = AC.$$

Écrivons $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$. La relation (2.18) se traduit par :

$$(2.19) \quad \forall i, j, \quad b_{ij} \pi_{D_F}^{a_j} = \pi_{D_F}^{a_i} c_{ij}.$$

Par les propriétés (2.16) et (2.17) de la bijection formelle $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l$ on a alors :

$$(2.20) \quad \forall i, j, \quad \zeta_{D_F D_L}^l(b_{ij}) \pi_{D_L}^{a_j} = \pi_{D_L}^{a_i} \zeta_{D_F D_L}^l(c_{ij})$$

et cette relation implique $\zeta_{D_F D_L}^l(B) \zeta_{D_F D_L}^l(A) = \zeta_{D_F D_L}^l(A) \zeta_{D_F D_L}^l(C)$ et par conséquent $(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\hat{B}); \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\hat{C})) \in \mathbf{H}_{L,l,\zeta_{D_F D_L}^l(A)}$. Donc $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\mathbf{H}_{F,l,A}) \subset \mathbf{H}_{L,l,\zeta_{D_F D_L}^l(A)}$. Comme les rôles de F et L sont symétriques il est évident que ce résultat est suffisant pour en déduire que $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : \mathbf{H}_{F,l,A} \rightarrow \mathbf{H}_{L,l,\zeta_{D_F D_L}^l(A)}$ est un isomorphisme, par exemple parce qu'on peut lui construire une application réciproque en partant de $(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l)^{-1} : \mathbf{T}_{L,l} \simeq \mathbf{T}_{F,l}$. \square

D'après les lemmes 2.6 et 2.7, si pour tout ensemble W on note $\mathbf{1}_W$ la fonction caractéristique de W , alors l'ensemble :

$$\{ \mathbf{1}_{K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l} : A \in \mathcal{A}_F, (\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} \}$$

est une base de l'espace vectoriel $H(G'_F; K_F^l)$. Soit

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : H(G'_F; K_F^l) \rightarrow H(G'_L; K_L^l)$$

l'application linéaire déterminée par

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l (\mathbf{1}_{K_F^l} \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l) = \mathbf{1}_{K_L^l} (\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{B})) (\zeta_{D_F D_L}^l(A)) (\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{C}))^{-1} K_L^l.$$

THÉORÈME 2.8. – *L'application $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. – Cela découle des lemmes 2.6 et 2.7. \square

REMARQUE 2.9. – Soit l un entier strictement positif. La surjection canonique

$$O_{D_F} / P_{D_F}^{(l+1)d} \rightarrow O_{D_F} / P_{D_F}^{ld}$$

induit une surjection canonique

$$\mathbf{T}_{F,l+1} \rightarrow \mathbf{T}_{F,l}$$

dont la restriction induit une surjection

$$\mathbf{H}_{F,l+1,A} \rightarrow \mathbf{H}_{F,l,A}.$$

Finalement, on obtient une surjection canonique

$$\tilde{\mathbf{T}}_{F,l+1,A} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}.$$

Supposons que F et L sont $(l+1)$ -proches. De la même façon, on a une surjection canonique

$$\tilde{\mathbf{T}}_{L,l+1,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)}.$$

Il est très facile de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{T}}_{L,l+1,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} \\ \bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l+1} \uparrow & & \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l \uparrow \\ \tilde{\mathbf{T}}_{F,l+1,A} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} \end{array}$$

où on aura tenu compte du fait que $\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A) = \zeta_{D_F D_L}^l(A)$ (par les définitions mêmes) est commutatif. Cela implique que l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : H(G'_F; K_F^l) \simeq H(G'_L; K_L^l)$$

est induit par la restriction de l'isomorphisme

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l+1} : H(G'_F; K_F^{l+1}) \simeq H(G'_L; K_L^{l+1}).$$

LEMME 2.10. – Soit $A = \text{diag}(\pi_{D_F}^{a_1}; \pi_{D_F}^{a_2} \dots \pi_{D_F}^{a_r}) \in \mathcal{A}_F$. Alors

$$\text{vol}(K_F^l AK_F^l) = q^d \sum_{i < j} a_j - a_i \text{vol}(K_F^l).$$

Démonstration. – On a

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_F^l AK_F^l) &= \text{card}(K_F^l / (AK_F^l A^{-1} \cap K_F^l)) \text{vol}(AK_F^l) \\ &= \text{card}(K_F^l / (AK_F^l A^{-1} \cap K_F^l)) \text{vol}(K_F^l). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$(2.21) \quad \text{card}(K_F^l / (AK_F^l A^{-1} \cap K_F^l)) = q^d \sum_{i < j} a_j - a_i.$$

Posons $\mathcal{X}_A = AM_r(P_{D_F}^{dl})A^{-1} \cap M_r(P_{D_F}^{dl})$ (en particulier, $\mathcal{X}_1 = M_r(P_{D_F}^{dl})$). L'ensemble \mathcal{X}_A est formé des matrices $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in M_r(P_{D_F}^{dl})$ qui vérifient $v_{D_F}(\pi_D^{a_i} x_{ij} \pi_D^{-a_j}) \geq dl$ pour tout $i < j$, soit des matrices $X \in M_r(P_{D_F}^{dl})$ et pour tout $i < j$,

$$v_{D_F}(x_{ij}) \geq dl + a_j - a_i.$$

Par conséquent, le cardinal du groupe additif $\mathcal{X}_1 / \mathcal{X}_A$ est $q^d \sum_{i < j} a_j - a_i$. Ce que nous voulons montrer (eq. (2.21)) se traduit par

$$\text{card}(1 + \mathcal{X}_1 / 1 + \mathcal{X}_A) = q^d \sum_{i < j} a_j - a_i = \text{card}(\mathcal{X}_1 / \mathcal{X}_A).$$

Disons que $A \in \mathcal{A}_F$ est petite si on a $\max_{i < j} (a_j - a_i) \leq ld$. Des calculs simples montrent que, si A est petite, alors

- $\mathcal{X}_1 \cdot \mathcal{X}_A \subset \mathcal{X}_A$, donc $1 + \mathcal{X}_A$ est un sous-groupe distingué de $1 + \mathcal{X}_1$ multiplicatif,
- $\mathcal{X}_1 \cdot \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_A$, donc l'application $1 + x \mapsto x$ de $1 + \mathcal{X}_1$ dans \mathcal{X}_1 induit un isomorphisme de groupes

$$(1 + \mathcal{X}_1 / 1 + \mathcal{X}_A; \cdot) \cong (\mathcal{X}_1 / \mathcal{X}_A; +).$$

Nous avons ainsi le résultat voulu (eq. (2.21)) si A est petite. Comme tout élément $A \in \mathcal{A}_F$ s'écrit comme produit de matrices petites de \mathcal{A}_F , pour avoir le résultat en général il suffit de remarquer que, pour toute $A \in \mathcal{A}_F$ et toute $A' \in \mathcal{A}_F$ petite on a

- $\mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_{AA'} \subset \mathcal{X}_{AA'}$, donc $1 + \mathcal{X}_{AA'}$ est un sous-groupe distingué de $1 + \mathcal{X}_A$ multiplicatif,
- $\mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_A \subset \mathcal{X}_{AA'}$, donc l'application $1 + x \mapsto x$ de $1 + \mathcal{X}_A$ dans \mathcal{X}_A induit un isomorphisme de groupes $(1 + \mathcal{X}_A / 1 + \mathcal{X}_{AA'}; \cdot) \cong (\mathcal{X}_A / \mathcal{X}_{AA'}; +)$. □

Pour tout $g \in G'_F$ on pose $h(g) = (\text{vol}(K_F^l))^{-1} \mathbf{1}_{K_F^l g K_F^l}$. On a le :

- LEMME 2.11. – (a) Pour tout $A, A' \in \mathcal{A}_F$ on a $h(A) * h(A') = h(AA')$.
- (b) Pour tout $B, C \in GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ on a $h(B) * h(A) * h(C) = h(BAC)$.

Démonstration. – (a) Par la proposition 2.2, chapitre 3 de [15], il suffit de démontrer qu'on a

$$\text{vol}(K_F^l AK_F^l) \text{vol}(K_F^l A' K_F^l) = \text{vol}(K_F^l) \text{vol}(K_F^l AA' K_F^l).$$

Ceci est une conséquence directe du lemme 2.10.

(b) Par la même proposition 2.2 de [15], il suffit de montrer qu'on a :

$$\text{vol}(K_F^l BK_F^l) \text{vol}(K_F^l AC K_F^l) = \text{vol}(K_F^l) \text{vol}(K_F^l BACK_F^l)$$

et

$$\text{vol}(K_F^l AK_F^l) \text{vol}(K_F^l CK_F^l) = \text{vol}(K_F^l) \text{vol}(K_F^l AC K_F^l).$$

C'est une relation facile à obtenir parce que K_F^l est distingué dans K_F (donc on peut "sortir" B et C) et les volumes sont pris par rapport à une mesure de Haar à droite et à gauche (donc finalement on peut effacer B et C partout où ils apparaissent). \square

REMARQUE 2.12. – Si W_F est un ensemble ouvert et compact de G'_F invariant à gauche et à droite par K_F^l et L est un corps l -proche de F , la construction de l'isomorphisme $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l$ implique que l'image de la fonction caractéristique de W_F est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert compact W_L de G'_L qui est invariant à gauche et à droite par K_L^l . Le calcul de volumes qu'on fait dans la démonstration du lemme 2.11 plus haut montre qu'on a alors :

$$\text{vol}(W_F) = \text{vol}(W_L).$$

On pose $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(W_F) = W_L$.

THÉORÈME 2.13. – Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier m tel que, si les corps F et L sont m -proches, alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l : H(G'_F; K_F^l) \simeq H(G'_L; K_L^l)$ est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. – On utilise la démarche de Kazhdan en précisant certains détails :

LEMME 2.14. – Soit \mathcal{C} un sous-ensemble fini de \mathcal{A}_F et soit

$$G'_F(\mathcal{C}) = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} K_F A K_F.$$

- (a) Il existe $m > l$ qui dépend de \mathcal{C} tel qu'on ait, pour tout $g \in G'_F(\mathcal{C})$, $gK_F^m g^{-1} \subset K_F^l$.
- (b) Supposons que L soit m -proche de F . Alors pour tout $f_1, f_2 \in H(G'_F; K_F^l)$ à support dans $G'_F(\mathcal{C})$ on a

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(f_1 * f_2) = \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(f_1) * \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(f_2).$$

Démonstration. – (a) Il faut trouver un m tel qu'on ait $K_F^m \subset \bigcap_{g \in G'_F(\mathcal{C})} g^{-1} K_F^l g$. Il suffit de prendre

$$m \geq l + \sup_{g \in G'_F(\mathcal{C})} v_F(g^{-1}) + \sup_{g \in G'_F(\mathcal{C})} v_F(g)$$

i.e.

$$m \geq l + \max_{A \in \mathcal{C}} v_F(A^{-1}) + \max_{A \in \mathcal{C}} v_F(A).$$

(b) Il suffit de montrer ce résultat pour $f_1 = \mathbf{1}_{K_F^l g K_F^l}$ et $f_2 = \mathbf{1}_{K_F^l g' K_F^l}$, avec $g, g' \in G'_F(\mathcal{C})$. En revenant à la définition du produit de convolution on trouve :

$$\mathbf{1}_{K_F^l g K_F^l} * \mathbf{1}_{K_F^l g' K_F^l}(x) = \text{vol}(K_F^l g K_F^l \cap K_F^l g' K_F^l x).$$

Par le point (a), cette intersection est bi-invariante par K_F^m et on a :

$$\mathbf{1}_{K_F^l g K_F^l} * \mathbf{1}_{K_F^l g' K_F^l} = \sum_{A \in \mathcal{A}_F} \sum_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F, l, A}} \text{vol}(K_F^l g K_F^l \cap K_F^l g' K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}) \mathbf{1}_{K_F^m \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^m}.$$

Les corps F et L étant m -proches, $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ est bien définie. D'après la formule plus haut qui vaut aussi bien sur L que sur F , et la remarque 2.12 sur les volumes,

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(f_1 * f_2) = \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(f_1) * \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(f_2).$$

Le résultat de (b) est alors une conséquence du fait que, si $m \geq l$, alors $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l$ est induite par la restriction de $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ (remarque 2.9 plus haut).

LEMME 2.15. – Pour tout entier i , $0 \leq i \leq r$, on pose $A_i = \text{diag}(\pi_{D_F}^{a_1}, \pi_{D_F}^{a_2} \dots \pi_{D_F}^{a_r})$ où pour $1 \leq j \leq i$, $a_j = 0$ et pour $i + 1 \leq j \leq r$, $a_j = 1$. On pose aussi $A_{-1} = \text{diag}(\pi_{D_F}^{-1}; \pi_{D_F}^{-1} \dots \pi_{D_F}^{-1})$. Soit s_F un système de représentants de $GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ld})$ dans $GL_r(O_{D_F})$. Alors

$$\{h(x): x \in s_F \cup \{A_{-1}; A_0; A_1 \dots A_r\}\}$$

est une famille génératrice de $H(G'_F; K^l_F)$ comme \mathbb{C} -algèbre.

Démonstration. – On a déjà vu que $\{h(BAC): A \in \mathcal{A}_F, B \in s_F, C \in s_F\}$ était une famille génératrice de $H(G'_F; K^l_F)$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel. Si $A \in \mathcal{A}_F$, $A = \text{diag}(\pi_{D_F}^{a_1}; \pi_{D_F}^{a_2} \dots \pi_{D_F}^{a_r})$ alors, si $a_1 \geq 0$, A s'écrit

$$A = A_0^{a_1} \prod_{1 \leq i \leq r-1} A_i^{a_{i+1} - a_i} A_r,$$

et si $a_1 < 0$, A s'écrit

$$A = A_{-1}^{-a_1} \prod_{1 \leq i \leq r-1} A_i^{a_{i+1} - a_i}.$$

Le lemme 2.11 implique alors le lemme 2.15. □

LEMME 2.16. – L'algèbre $H(G'_F; K^l_F)$ est de présentation finie.

Démonstration. – D'après la remarque qui suit le corollaire 3.4. de [5], $H(G'_F; K^l_F)$ est un module de type fini sur son centre $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$, qui, à son tour, est une algèbre de type fini sur \mathbb{C} . Il existe donc un $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$ -module libre M de rang fini p et un sous-module N de M tels que $H(G'_F; K^l_F) \simeq M/N$ en tant que $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$ -modules. Soit $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_p\}$ une base de M sur $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$. L'algèbre commutative $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$, étant de type fini, est isomorphe à $\mathbb{C}[X_1; X_2 \dots X_n]/I$ où I est un idéal donné par un nombre fini de relations $R_1, R_2 \dots R_u$ entre les X_i . Elle est en particulier noethérienne et donc le module N est de type fini. Le $\mathcal{Z}(G'_F; K^l_F)$ -module M/N est donc le module engendré par la famille $\{Y_1, Y_2 \dots Y_p\}$ avec un nombre fini de relations $R'_1, R'_2 \dots R'_v$ linéaires entre les Y_i . En écrivant encore pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ le produit $Y_i Y_j$ sur la base $\{Y_1, Y_2 \dots Y_p\}$ de M on obtient encore une famille finie (de cardinal au plus p^2) de relations $\{R''_1, R''_2 \dots R''_w\}$. Alors $H(G'_F; K^l_F)$ est isomorphe à l'algèbre non commutative engendrée sur \mathbb{C} par les $n + p$ variables $X_1, X_2 \dots X_n, Y_1, Y_2 \dots Y_p$, avec les relations $R_1, R_2 \dots R_u, R'_1, R'_2 \dots R'_v, R''_1, R''_2, \dots, R''_w$ et les $n(n - 1)/2$ relations qui traduisent le fait que les variables $X_1, X_2 \dots X_n$ commutent entre elles. Le lemme est démontré. □

Fin de la démonstration du théorème 2.13. – Nous explicitons la démonstration dont le principe est dû à Kazhdan :

Par le lemme 2.16, $H(G'_F; K^l_F)$ est de présentation finie ; c'est donc l'algèbre non commutative engendrée sur \mathbb{C} par un nombre fini de générateurs $g_1, g_2 \dots g_n$ avec un nombre fini de relations $R_1, R_2 \dots R_u$ qu'on va regarder comme des polynômes non commutatifs en n variables qui s'annulent en $(g_1; g_2 \dots g_n)$. Par ailleurs, le lemme 2.15 nous fournit une famille

finie $\{h_1, h_2 \dots h_p\}$ de générateurs de $H(G'_F; K^l_F)$. Soient alors $G_i (1 \leq i \leq n)$ des polynômes en p variables qui appliqués à $(h_1; h_2 \dots h_p)$ donnent les $g_1, g_2 \dots g_n$, et $F_i (1 \leq i \leq p)$ des polynômes en n variables qui appliqués à $(g_1; g_2 \dots g_n)$ donnent les $h_1, h_2 \dots h_p$. Soit s le plus grand nombre parmi les degrés (totaux) des polynômes

$$R'_1 = R_1((G_1; G_2 \dots G_n)), R'_2 = R_2((G_1; G_2 \dots G_n)), \dots, R'_u = R_u((G_1; G_2 \dots G_n))$$

et

$$F'_1 = F_1((G_1; G_2 \dots G_n)), F'_2 = F_2((G_1; G_2 \dots G_n)), \dots, F'_p = F_p((G_1; G_2 \dots G_n))$$

et un compact \mathbf{K} suffisamment grand dans G'_F pour qu'il contienne tous les produits de s éléments qui se trouvent dans la réunion des supports de tous les h_i . Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{A}_F$ de cardinal fini tel que $\mathbf{K} \subset G'_F(\mathcal{C})$ (voir le lemme 2.14). Prenons l'entier m associé à \mathcal{C} comme dans le lemme 2.14. Notons $h'_1, h'_2 \dots h'_p$ les images de $h_1, h_2 \dots h_p$ par $\zeta^l_{D_F D_L}$. Définissons un morphisme d'algèbres $t: \mathbb{C}(g_1, g_2 \dots g_p) \rightarrow H(G'_L; K^l_F)$ défini par :

$$t(g_i) = G_i((h'_1; h'_2 \dots h'_p))$$

Ce morphisme vérifie $t(R_i((g_1, g_2 \dots g_n))) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq u$ par le choix de m relativement aux polynômes $R'_1, R'_2 \dots R'_u$ et par le lemme 2.14. Il induit donc un morphisme d'algèbres

$$\bar{t}: H(G'_F; K^l_F) \rightarrow H(G'_L; K^l_L),$$

car $H(G'_F; K^l_F)$ est la \mathbb{C} -algèbre non commutative engendrée par $g_1, g_2 \dots g_n$ avec les relations traduites par l'annulation des polynômes $R_1, R_2 \dots R_u$ en $(g_1; g_2 \dots g_n)$. Or, ce morphisme d'algèbres vérifie

$$(2.22) \quad \bar{t}(h_i) = h'_i$$

pour tout $1 \leq i \leq p$ par le choix de m relatif aux polynômes $F'_1, F'_2 \dots F'_p$ et par le lemme 2.14. Comme c'est un morphisme d'algèbres, (2.22) et les lemmes 2.11 et 2.15 impliquent que pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, pour tout $(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F, l, A}$ on a

$$\bar{t}(\mathbf{1}_{K^l_F} \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F) = \mathbf{1}_{K^l_L} (\zeta^l_{D_F D_L}(\tilde{B})) (\zeta^l_{D_F D_L}(A)) (\zeta^l_{D_F D_L}(\tilde{C}))^{-1} K^l_L.$$

Comme c'est un morphisme d'espaces vectoriels qui coïncide avec $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ sur une base de $H(G'_F; K^l_F)$, on a $\bar{t} = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$, donc $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ est un isomorphisme d'algèbres. \square

Nous rappelons que le niveau d'une représentation lisse irréductible π de G'_F (resp. G'_L) est le plus petit entier l tel que π ait un vecteur fixe non nul sous K^l_F (resp. K^l_L). Soit π une représentation lisse irréductible de niveau inférieur ou égal à l de G'_F ; notons V_π l'espace de la représentation π . Alors $H(G'_F; K^l_F)$ agit sur $V_\pi^{K^l_F}$, espace des vecteurs fixes sous K^l_F , par

$$f(v) = \pi(f)v$$

pour tout $f \in H(G'_F; K^l_F)$ et tout $v \in V_\pi^{K^l_F}$. L'espace $V_\pi^{K^l_F}$ est ainsi muni d'une structure de $H(G'_F; K^l_F)$ -module. On note $V_{\pi, H}$ le $H(G'_F; K^l_F)$ -module $V_\pi^{K^l_F}$ pour le différencier du \mathbb{C} -espace $V_\pi^{K^l_F}$ avec lequel il coïncide ensemblistement. On sait que $V_{\pi, H}$ est un $H(G'_F; K^l_F)$ -module non nul irréductible et que $\pi \mapsto V_{\pi, H}$ induit une bijection entre l'ensemble des classes

d'équivalence de représentations irréductibles de G'_F de niveau inférieur ou égal à l et l'ensemble des classes d'isomorphie de $H(G'_F; K^l_F)$ -modules irréductibles ([5] ou [7]). Maintenant, si m est comme dans le th. 2.13, l'isomorphisme $\zeta^l_{D_F D_L} : H(G'_F; K^l_F) \simeq H(G'_L; K^l_L)$ induit une bijection (notée toujours $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$) entre l'ensemble des classes d'isomorphie de $H(G'_F; K^l_F)$ -modules irréductibles et l'ensemble des classes d'isomorphie de $H(G'_L; K^l_L)$ -modules irréductibles. Donc l'image par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ de la classe d'isomorphie de $V_{\pi, H}$ est une classe d'isomorphie de $H(G'_L; K^l_L)$ -modules irréductibles et elle correspond à une classe d'équivalence C_L de représentations irréductibles de niveau inférieur ou égal à l de G'_L . Si C_F est la classe d'équivalence de la représentation π , on pose $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(C_F) = C_L$.

THÉORÈME 2.17. – (a) *L'application $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ réalise une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_F de niveau inférieur ou égal à l (resp. égal à l) sur l'ensemble des classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_L de niveau inférieur ou égal à l (resp. égal à l).*

(b) *Soit π une représentation lisse irréductible de G'_F de niveau inférieur ou égal à l . Alors π est de carré intégrable si et seulement si $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\pi)$ est une représentation de carré intégrable de G'_L .*

(c) *Soit π une représentation lisse irréductible de G'_F de niveau inférieur ou égal à l . Alors π est cuspidale si et seulement si $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\pi)$ est une représentation cuspidale de G'_L .*

REMARQUE 2.18. – On parle abusivement de $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\pi)$ alors que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ n'est définie que pour les classes d'équivalence. C'est ce qui arrivera parfois aussi par la suite, puisque toutes les propriétés des représentations sont en fait des propriétés des classes d'équivalence.

Démonstration. – (a) Le fait que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ soit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_F de niveau inférieur ou égal à l sur l'ensemble des classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_L de niveau inférieur ou égal à l résulte de la discussion faite avant l'énoncé du théorème.

Soit maintenant $\Pi(G'_F, l)$ (resp. $\Pi(G'_F, l - 1)$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de niveau inférieur ou égal à l (resp. à $l - 1$) de G'_F . Adoptons les mêmes notations pour G'_L . Alors $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ réalise une bijection de $\Pi(G'_F, l)$ sur $\Pi(G'_L, l)$, et aussi (mettre $l - 1$ à la place de l), $\bar{\zeta}^{l-1}_{D_F D_L}$ réalise une bijection de $\Pi(G'_F, l - 1)$ sur $\Pi(G'_L, l - 1)$. Par la remarque 2.9 et ce qu'on vient de voir, la restriction de $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ à $\Pi(G'_F, l - 1)$ induit $\bar{\zeta}^{l-1}_{D_F D_L}$. Nous obtenons alors que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ réalise une bijection de $\Pi(G'_F, l) \setminus \Pi(G'_F, l - 1)$ sur $\Pi(G'_L, l) \setminus \Pi(G'_L, l - 1)$, qui est la variante "niveau exactement égal à l " de l'énoncé.

(b) Supposons maintenant que π soit de carré intégrable. Soit σ une représentation (irréductible et de niveau inférieur ou égal à l) se trouvant dans l'image par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ de la classe d'équivalence de π . Comme nous l'avons dit plus haut, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$f : V_{\pi}^{K^l_F} \simeq V_{\sigma}^{K^l_L}$$

induit par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$. L'isomorphisme f induit un isomorphisme, dans les espaces duaux munis des actions contragrédientes :

$$f' : V_{\pi}^{\prime K^l_F} \simeq V_{\sigma}^{\prime K^l_L}.$$

Soient $v \in V_{\pi}^{K^l_F}$ et $v' \in V_{\pi}^{\prime K^l_F}$ tels que $v'(v) \neq 0$. Considérons le coefficient non nul de π

$$h_{\pi} : G'_F \rightarrow \mathbb{C}$$

défini par

$$g \mapsto v'(\pi(g)(v)).$$

Pour tout $g \in G'_F$, h_π est constant sur $K_F^l g K_F^l$ égal à $h_\pi(g)$. On a aussi

$$(2.23) \quad h_\pi(g) = \text{vol}(K_F^l g K_F^l)^{-1} v'(\pi(\mathbf{1}_{K_F^l g K_F^l})(v)).$$

La représentation π étant de carré intégrable, $|h_\pi|^2$ est trivial sur Z et intégrable sur G'_F/Z . Exprimons cette propriété à partir de la décomposition

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F} \coprod_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$$

(lemme 2.6(b)) en étudiant l'action par multiplication de Z là-dessus. Notons \mathcal{A}_F^0 le sous-ensemble de \mathcal{A}_F formé des matrices $A = \text{diag}(\pi_{D_F}^{a_1}; \pi_{D_F}^{a_2}; \dots; \pi_{D_F}^{a_r})$ telles que $a_1 \in \{0; 1 \dots d-1\}$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_F^0$ notons $\mathcal{A}_F(A)$ l'ensemble des matrices obtenues à partir de A par multiplication avec une puissance de $\pi_F = \pi_{D_F}^d$. C'est un sous-ensemble de \mathcal{A}_F . On a

$$\mathcal{A}_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F^0} \mathcal{A}_F(A).$$

Montrons que, pour tout $A \in \mathcal{A}_F^0$, l'ensemble $\coprod_{A' \in \mathcal{A}_F(A)} \coprod_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l$ est stable sous l'action de Z par multiplication et étudions cette action. Identifions Z avec F^* . Alors, si z est un élément de Z , z s'écrit de façon unique $z = \pi_F^\alpha x$ où x est un élément de O_F^* . D'autre part, on a un isomorphisme

$$O_F^*/(1_F + P_F^l) \simeq (O_F/P_F^l)^*.$$

On peut ainsi décomposer l'action de Z sur $\coprod_{A' \in \mathcal{A}_F(A)} \coprod_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l$ puisque :

– si $z = \pi_F^\alpha$, alors $z K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l$ s'écrit $K_F^l \tilde{B} A'' \tilde{C}^{-1} K_F^l$ où $A'' = z A' \in \mathcal{A}_F(A)$, et une simple vérification montre qu'on a aussi $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A''} = \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A'}$,

– si $z \in O_F^*$, alors :

– si $z \in 1_F + P_F^l$, on a $z K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l = K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l$, tandis que

– si $z \notin 1_F + P_F^l$, $z K_F^l \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K_F^l = K_F^l \tilde{B}' A' \tilde{C}'^{-1} K_F^l$, où $(\tilde{B}'; \tilde{C}')$ est un élément de $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$ différent de $(\tilde{B}; \tilde{C})$ et qui ne dépend que de la classe de z modulo $1_F + P_F^l$.

Finalement, dire que $|h_\pi|^2$ est intégrable sur G'_F/Z revient à dire que la somme

$$(2.24) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_F^0} \left(\sum_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} (\text{card}((O_F/P_F^l)^*))^{-1} \times \text{vol}(K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l; dg) (\text{vol}(1_F + P_F^l; dz))^{-1} |h_\pi(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1})|^2 \right)$$

est convergente.

Maintenant, $f(v)$ est un élément de $V_\sigma^{K_F^l}$, $f'(v')$ est un élément de $V_\sigma'^{K_F^l}$ et l'application

$$h_\sigma : G'_L \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$g \mapsto f'(v')(\sigma(g)(f(v)))$$

est un coefficient non nul de σ . Pour tout $g \in G'_L$, h_σ est constant sur $K^l_L g K^l_L$ égal à $h_\sigma(g)$. On a aussi

$$(2.25) \quad h_\sigma(g) = \text{vol}(K^l_L g K^l_L)^{-1} f'(v')(\sigma(\mathbf{1}_{K^l_L g K^l_L})(f(v))).$$

La fonction h_σ est de carré intégrable modulo le centre sur G'_L si et seulement si la somme

$$(2.26) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_F^0} \left(\sum_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{L, l, \zeta^l_{D_F D_L}(A)}} (\text{card}((O_L/P^l_L)^*))^{-1} \right. \\ \left. \times \text{vol}(K^l_L \tilde{B} \zeta^l_{D_F D_L}(A) \tilde{C}^{-1} K^l_L; dg) (\text{vol}(1_L + P^l_L; dz))^{-1} |h_\sigma(\tilde{B} \zeta^l_{D_F D_L}(A) \tilde{C}^{-1})|^2 \right)$$

est convergente, où on a tenu compte du fait que $\zeta^l_{D_F D_L}$ réalise une bijection de \mathcal{A}_F^0 sur \mathcal{A}_L^0 . Mais cette somme correspond terme pour terme à la somme (2.24) puisque

- les volumes des sous-ensembles de G'_F et G'_L qui se correspondent sont égaux pour les mesures fixées sur G'_F et G'_L ,
- les volumes des sous-ensembles des centres de G'_F et G'_L qui se correspondent sont égaux pour les mesures fixées sur les centres F^* de G'_F et L^* de G'_L ,
- $\text{card}((O_F/P^l_F)^*) = \text{card}((O_L/P^l_L)^*)$ parce que les anneaux O_F/P^l_F et O_L/P^l_L sont isomorphes,
- par construction de l'isomorphisme f' on a

$$v'(\pi(\mathbf{1}_{K^l_F g K^l_F})(v)) = f'(v')(\sigma(\mathbf{1}_{K^l_L g K^l_L})(f(v))),$$

et alors (2.23) et (2.25) impliquent que

$$h_\sigma(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1}) = h_\pi(\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\tilde{B}) \zeta^l_{D_F D_L}(A) \bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\tilde{C}^{-1})).$$

On vient de montrer qu'un coefficient non nul de σ est de carré intégrable sur G'_L/Z . Donc σ est de carré intégrable. La réciproque se montre exactement de la même façon.

(c) Une représentation est cuspidale si et seulement si elle admet un coefficient non nul à support compact modulo le centre. La démonstration est la même que celle du point (b), en plus facile : il faut remplacer “somme convergente” par “somme à nombre fini de termes non nuls”. □

Soit ψ un caractère additif non trivial de F . On dit que k est le conducteur de ψ si k est le plus petit entier tel que P^k_F soit inclus dans $\ker \psi$. On fixe une fois pour toutes un caractère ψ non trivial de F de conducteur nul. Si π est une représentation lisse irréductible de G'_F , on note $L(s; \pi)$, $\varepsilon(s; \pi; \psi)$ et $\varepsilon'(s; \pi; \psi)$ les fonctions de Godement–Jacquet [12]. On sait que la fonction $\varepsilon(s; \pi; \psi)$ est égale à q^{-ms} , à multiplication par un scalaire non nul près, où q est, comme avant, le cardinal du corps résiduel de F , et m est un entier ([12], th. 3.3, (4)). D'après [12], équation (3.3.5), p. 33, l'entier m ne dépend pas du choix de ψ plus haut (une fois que son conducteur est nul) ; il ne dépend donc que de π : on le note par la suite $m(\pi)$ et on l'appelle le *conducteur de π* . En suivant [12], nous allons utiliser une formule particulière pour la fonction $\varepsilon'(s; \pi; \psi)$, très commode pour les calculs. Supposons que le niveau de π soit l . Soit f un coefficient de π tel que f est constant non nul sur K^l_F (choisi comme dans la démonstration

du th. 2.17(b)). Prenons le cas particulier $\Phi = \mathbf{1}_{K_F^l}$ dans le th. 3.3 de [12]. Nous posons donc

$$Z(s; f) = \int_{K_F^l} f(g) |N(g)|^s dg = f(1) \text{vol}(K_F^l)$$

où N est la norme réduite. On sait par le dit théorème qu'il existe s_0 dans \mathbb{R} tel que, si s est un nombre complexe de partie réelle supérieure ou égale à s_0 , alors

$$Z(s; \check{f}) = q^{-nl} \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi(\text{tr}_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1}) |N(g)|^s dg$$

converge et $Z(s; \check{f})$ est une fraction rationnelle en la quantité q^{-s} . Par les points (2) et (4) du même théorème, $\varepsilon'(s; \pi; \psi)$ est une fraction rationnelle en la quantité q^{-s} qui vérifie :

$$(2.27) \quad \varepsilon'(s; \pi; \psi) = (-1)^{r(d-1)} Z(1-s+(n-1)/2; \check{f}) Z(s+(n-1)/2; f)^{-1}.$$

Nous adoptons les mêmes conventions pour le corps L . Si L est m -proche de F , le triplet de m -proximité $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}_{F^l}^m)$ associée induit naturellement un isomorphisme de groupes additifs $\lambda_{-m} : \pi_F^{-m} O_F / O_F \simeq \pi_L^{-m} O_L / O_L$. Alors, si ψ_L est un caractère additif de L , on dit que ψ_L est m -proche de ψ si ψ_L est de conducteur nul et le caractère induit par ψ sur $\pi_F^{-m} O_F / O_F$ et le caractère induit par ψ_L sur $\pi_L^{-m} O_L / O_L$ se correspondent via λ_{-m} (i.e. $\psi = \psi_L \circ \lambda_{-m}$).

Le théorème suivant est d'une importance capitale pour la démonstration de la correspondance :

THÉORÈME 2.19. – *Si m est comme dans le théorème 2.13, si L est un corps m -proche de F , si ψ_L est un caractère additif de L m -proche de ψ , alors on a :*

(a) *si π est une représentation lisse irréductible de niveau $\leq l$ de G'_F , alors les fonctions $\varepsilon'(s; \pi; \psi)$ et $\varepsilon'(s; \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\pi); \psi_L)$ sont égales,*

(b) *si π est une représentation cuspidale de niveau $\leq l$ de G'_F , alors les fonctions $\varepsilon(s; \pi; \psi)$ et $\varepsilon(s; \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\pi); \psi_L)$ sont égales ; en particulier $m(\pi) = m(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\pi))$.*

Démonstration. – On peut supposer que le niveau de π est l .

(a) Posons $\pi_L = \bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\pi)$. Soient f un coefficient de π et f_L un coefficient de π_L choisis comme dans la démonstration de la proposition 2.17. Notons N_L la norme réduite sur G'_L . Montrons qu'on a alors :

(i) $Z(s; f) = Z(s; f_L)$ et

(ii) pour les s pour lesquels $Z(s; \check{f})$ converge, $Z(s; \check{f}_L)$ converge et on a $Z(s; \check{f}) = Z(s; \check{f}_L)$.

Le point (i) est évident. Pour montrer (ii) on prouve que

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)} \psi_L(\text{tr}_{M_r(D_L)/L}(g)) f_L(g^{-1}) |N_L(g)|^s dg \\ &= \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi(\text{tr}_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1}) |N(g)|^s dg, \end{aligned}$$

en montrant que les intégrales prennent la forme de deux sommes identiques. On a une décomposition

$$\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F) = \prod_{A \in \mathcal{A}_F^+} \prod_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}} K_L^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_L^l$$

où \mathcal{A}_F^+ est l'ensemble des matrices dans \mathcal{A}_F dans lesquelles toutes les puissances de l'uniformisante π_{D_F} qui apparaissent sont supérieures ou égales à $-ld$ (rappelons que $\pi_{D_F}^d = \pi_F$). On a une décomposition analogue pour $\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)$ qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L) \\ &= \prod_{A \in \mathcal{A}_F^+} \prod_{(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}} K_L^l \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}) K_L^l \end{aligned}$$

tenant compte du fait que $\zeta_{D_F D_L}^m$ réalise une bijection de \mathcal{A}_F^+ sur \mathcal{A}_L^+ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}_F^+$, $\zeta_{D_F D_L}^l$ réalise une bijection de $\tilde{T}_{l,A,F}$ sur $\tilde{T}_{l, \zeta_{D_F D_L}^m(A), L}$.

On a vu à la proposition 2.17 que, par la construction de f_L à partir de f_2 , on a : pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, pour tout $(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, f est constant sur l'ensemble $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$ et f_L est constant sur $K_L^l \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}) K_F^l$; en outre les valeurs de f et f_L sont égales. C'est pareil pour les fonctions $|N|$ et $|N_L|$ qui y sont constantes égales à $|N(A)|$. On a aussi

$$\text{vol}(K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l) = \text{vol}(K_L^l \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}) K_L^l).$$

Par ailleurs, si on note U la matrice $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in GL_r(D_F)$ définie par $u_{ij} = \delta_{i, r-j}$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}_F$ et pour tout $(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, la fonction $f(g^{-1})$ est constante sur l'ensemble

$$K_F^l \tilde{C} A^{-1} \tilde{B}^{-1} K_F^l$$

égale à $f(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1})$, et on a

$$K_F^l \tilde{C} A^{-1} \tilde{B}^{-1} K_F^l = K_F^l (\tilde{C} U) (U A^{-1} U) (U \tilde{C}^{-1}) K_F^l$$

où $U A^{-1} U \in \mathcal{A}_F$ et $(\tilde{C} U; U \tilde{B}^{-1}) \in \tilde{T}_{l, U A^{-1} U, F}$. Le même phénomène se produit aussi sur G'_L et toutes les applications des objets sur F vers les objets correspondants sur L commutent à l'action par multiplication de U , qui est une simple permutation de lignes ou colonnes.

Montrons encore que, si $A \in \mathcal{A}_F^+$, si $(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, alors

- $\psi \circ \text{tr}_{M_r(D_F)/F}$ est constante sur $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$,
- $\psi_L \circ \text{tr}_{M_r(D_L)/L}$ est constante sur $K_L^l \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}) K_L^l$, et
- on a

$$\psi \circ \text{tr}_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1}) = \psi_L \circ \text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1})).$$

Posons $A = \text{diag}(\pi_{D_F}^{a_1}, \pi_{D_F}^{a_2} \dots \pi_{D_F}^{a_r})$ où $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$. n rappelle qu'on a $A \in \mathcal{A}_F^+$ et donc $a_1 \geq -ld$. Par conséquent, la différence de deux éléments de l'ensemble $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$ est un élément de $M_r(O_{D_F})$, donc la différence de leurs traces réduites est un élément de O_F et ψ est trivial sur O_F . Donc $\psi \circ \text{tr}_{M_r(D_F)/F}$ est constante sur $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$. De la même façon on montre que $\psi_L \circ \text{tr}_{M_r(D_L)/L}$ est constante sur $K_L^l \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}) K_L^l$.

Maintenant, montrer qu'on a

$$\psi \circ \text{tr}_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}) = \psi_L \circ \text{tr}_{M_r(D_F)/F}(\zeta_{D_F D_L}^l(\tilde{B})\zeta_{D_F D_L}^m(A)\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1})),$$

revient à montrer que

$$\begin{aligned} & \psi(\pi_F^{-l} \text{tr}_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B}(\pi_F^l A)\tilde{C}^{-1})) \\ &= \psi_L(\pi_L^{-l} \text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{B}))(\pi_L^l \zeta_{D_F D_L}^m(A))\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1})) \end{aligned}$$

et, vu que ψ_L et ψ sont m -proches, et $m \geq l$, il suffit de montrer que l'image (bien définie) de

$$\text{tr}_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B}(\pi_F^l A)\tilde{C}^{-1})$$

dans O_F/P_F^l et l'image (bien définie) de

$$\text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{B})(\pi_L^l \zeta_{D_F D_L}^m(A))\bar{\zeta}_{D_F D_L}^l(\tilde{C}^{-1}))$$

dans O_L/P_L^l se correspondent par l'application $\bar{\lambda}_{F_L}^l$ (induite par $\bar{\lambda}_{F_L}^m$).

Maintenant, si on choisit des représentants B et C^{-1} de \tilde{B} et de \tilde{C}^{-1} , puisque $\bar{\lambda}_{D_F D_L}^l$ (induit par $\bar{\lambda}_{F_L}^l$) est un isomorphisme d'anneaux de $O_{D_F}/P_{D_F}^{dl}$ sur $O_{D_L}/P_{D_L}^{dl}$, on a

$$\zeta_{D_F D_L}^m(B\pi_F^l AC^{-1}) - \zeta_{D_F D_L}^m(B)\zeta_{D_F D_L}^m(\pi_F^l A)\zeta_{D_F D_L}^m(C^{-1}) \in M_r(P_{D_L}^{ld})$$

et par conséquent l'image dans O_L/P_L^l de $\text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B\pi_F^l AC^{-1}))$ est égale à l'image dans O_L/P_L^l de $\text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B)\zeta_{D_F D_L}^m(\pi_F^l A)\zeta_{D_F D_L}^m(C^{-1}))$. Il nous suffit donc de montrer que l'image dans O_F/P_F^l de $\text{tr}_{M_r(D_F)/F}(B(\pi_F^l A)C^{-1})$ et l'image dans O_L/P_L^l de $\text{tr}_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B\pi_F^l AC^{-1}))$ se correspondent par l'application $\bar{\lambda}_{F_L}^l$. Mais la trace réduite d'un élément de $M_r(D_F)$ est la somme des traces réduites des éléments diagonaux de cette matrice et de même pour D_L , donc, pour avoir (enfin) le résultat voulu il nous suffit du lemme suivant :

LEMME 2.20. – Soit $x \in O_{D_F}$. Alors l'image de $\text{tr}_{D_F/F}(x)$ dans O_F/P_F^l et l'image de $\text{tr}_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x))$ dans O_L/P_L^l se correspondent par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{F_L}^l$.

Démonstration. – Reprenons les notations de la section 2.5. Écrivons

$$x = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i e_i$$

où tous les e_i sont dans E , et même dans O_E puisque $x \in O_{D_F}$. Alors, par définition,

$$\lambda_{D_F D_L}^m(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i \lambda_{E K}^m(e_i).$$

L'algèbre D_F agit sur le E -espace vectoriel D_F de dimension d par multiplication à gauche et la trace réduite de x sur F est la trace de l'endomorphisme qui correspond à x ; on peut la calculer facilement en choisissant dans le E -espace D_F la base $\pi_{D_F}^0, \pi_{D_F}^1, \dots, \pi_{D_F}^{d-1}$. On trouve

$$\text{tr}_{D_F/F}(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_F^i(e_0).$$

Pareillement, on a

$$tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x)) = \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_L^i(\lambda_{EK}^m(e_0)) = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_{EK}^m(\sigma_F^i(e_0)).$$

Pour tout $1 \leq i \leq d - 1$, l'image de $\sigma_F^i(e_0)$ dans O_E/P_E^l et l'image de $\lambda_{EK}^m(\sigma_F^i(e_0))$ dans O_K/P_K^l se correspondent par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{EK}^m$, et donc l'image de $tr_{D_F/F}(x)$ dans O_E/P_E^l et l'image de $tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x))$ dans O_K/P_K^l se correspondent aussi par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{EK}^m$. Comme $tr_{D_F/F}(x) \in O_F$ et $tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x)) \in O_L$ et que $\bar{\lambda}_{EK}^m : O_E/P_E^l \simeq O_K/P_K^l$ induit $\bar{\lambda}_{FL}^m : O_F/P_F^l \simeq O_L/P_L^l$, le lemme est démontré. \square

On peut donc décomposer les intégrales dans l'égalité (2.28) en des sommes qui se correspondent terme à terme et en déduire que

$$\begin{aligned} & \int_{\pi_L^{-1}M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)} \psi(tr_{M_r(D_L)/L}(g)) f_L(g^{-1}) |N_L(g)|^s dg \\ &= \int_{\pi_F^{-1}M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi_L(tr_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1}) |N(g)|^s dg. \end{aligned}$$

On conclut maintenant par la relation (2.27) et par l'égalité des fonctions Z (pour un nombre infini de valeurs de q^{-s}) montrée.

(b) Les facteurs ε et ε' sont reliés par la relation-définition :

$$(2.29) \quad \varepsilon'(s; \pi; \psi) = \varepsilon(s; \pi; \psi) L(1 - s; \tilde{\pi}) L(s; \pi)^{-1}$$

où $\tilde{\pi}$ est la représentation contragrédiente de π .

Si G'_F n'est pas le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division, alors la fonction L associée à une représentation cuspidale est triviale. Comme la contragrédiente d'une représentation cuspidale est une représentation cuspidale on conclut par le point (a) ci-dessus et le théorème 2.17(c).

Si G'_F est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division, alors on sait que si π est une représentation de G'_F ou G'_L on a $m(\pi) = niv(\pi) + n - 1$. Comme $\zeta_{D_F D_L}^m$ conserve le niveau, nous savons donc déjà qu'elle conserve le conducteur. Autrement dit, le rapport

$$(2.30) \quad \varepsilon(s; \pi_F; \psi) / \varepsilon(s; \pi_L; \psi_L) = c$$

où c est une constante. Reste à montrer que $c = 1$.

Si π est une représentation de G'_F ou G'_L on a

$$L(1 - s; \tilde{\pi}) L(s; \pi)^{-1} = U_\pi(q^{-s})$$

où

$$(2.31) \quad U_\pi(X) = 1 \quad \text{ou} \quad U_\pi(X) = \frac{X(1 - \alpha X)}{X - \beta}$$

avec α et β deux nombres complexes (facile à obtenir à partir de [12], th. 5.11). Les égalités (2.29), (2.30) et le point (a) impliquent alors :

$$U_{\pi_L} / U_{\pi_F} = c.$$

Des calculs simples montrent que, quelle que soit la forme de U_{π_F} et U_{π_L} (voir (2.31)), on doit avoir $c = 1$. \square

3. Conséquences immédiates

Dans cette section nous donnons une preuve du fait que les résultats de [3], a priori valables en caractéristique nulle, sont vrais indépendamment de la caractéristique. Ce sont les théorèmes 3.1 et 3.2 plus bas. Ce n'est pas la preuve la plus simple, ni la plus naturelle qui soit, étant basée sur la construction faite à la section précédente. D'autre part, ces résultats sont un corollaire immédiat de la dite construction et sont, aussi, indispensables pour la preuve de la correspondance de Jacquet–Langlands en caractéristique non nulle. Ils étaient donc incontournables.

Soit F un corps local non archimédien, soit D une algèbre à division centrale de dimension finie d^2 sur F , soit r un entier strictement positif ; posons $A = M_r(D)$. On pose $n = rd$.

THÉORÈME 3.1. – (a) *Si π est une représentation cuspidale de A^* , alors on a*

$$\text{niv}(\pi) \leq \frac{m(\pi)}{r} - d + 2.$$

(b) *Si π est une représentation lisse irréductible quelconque de A^* , alors on a*

$$\text{niv}(\pi) \leq m(\pi) - n + 2r.$$

Soit maintenant F un corps global et soit A une algèbre centrale simple de dimension finie sur F . Soient $F^*(\mathbb{A})$ et $A^*(\mathbb{A})$ les groupes des adèles de F^* et A^* respectivement. On identifie F^* au centre de A^* et $F^*(\mathbb{A})$ au centre de $A^*(\mathbb{A})$. Pour toute place v de F on note F_v et A_v les localisés de F et de A en v .

THÉORÈME 3.2. – *Soit V un ensemble fini de places finies de F . Si pour toute place $v \notin V$ on fixe une représentation lisse irréductible π_v de A_v^* , alors il existe au plus un nombre fini de classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales π de $A^*(\mathbb{A})$, telles que, pour tout $v \notin V$, la composante locale de π à la place v soit équivalente à π_v .*

La preuve des deux théorèmes est très concise : Dans [3], nous avons montré que le th. 3.1(a) implique le th. 3.1(b) qui à son tour implique le th. 3.2, et ce indépendamment de la caractéristique. Dès lors, le seul problème reste le point 3.1(a). Il a été prouvé dans [3] en caractéristique nulle. Pour boucler la démonstration nous indiquons ici la preuve dans le cas où F est de caractéristique non nulle. Si, dans ce cas, π est une représentation cuspidale de $A^* = GL_r(D)$ de niveau l , alors en se plaçant dans la situation des théorèmes 2.17 et 2.19 et avec les mêmes notations, nous pouvons appliquer le th. 3.1(a) à la représentation *cuspidale* (par 2.17(c)) $\tilde{\zeta}_{D_F D_L}^l(\pi)$, puisque le corps L est de caractéristique nulle. On obtient ensuite la même relation pour π , car l'application $\tilde{\zeta}_{D_F D_L}^l$ conserve toutes les quantités qui apparaissent dans l'inégalité (par construction pour r et n , par th. 2.17(a) pour le niveau et 2.19(b) pour le conducteur).

Le théorème 3.2 appliqué à une situation particulière (la prop. 5.6) jouera un rôle important dans la démonstration de la correspondance.

4. Quelques résultats d'analyse harmonique sur des structures proches

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique non nulle et D_F une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 . Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = dr$ et $G_F = GL_n(F)$ et

$G'_F = GL_r(D_F)$. Comme en caractéristique nulle, on veut trouver une correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de G_F et les représentations essentiellement de carré intégrable de G'_F . Le fait essentiel pour lequel la démonstration ne marche pas comme en caractéristique nulle est qu'on n'a pas l'orthogonalité des caractères sur G'_F . Je ne pense pas qu'on puisse l'obtenir directement comme sur G_F , même si on a construit dans la section précédente une situation proche en caractéristique nulle, parce qu'on ne sait pas "relever" les intégrales orbitales, et surtout parce qu'on n'a pas l'intégrabilité locale des caractères pour les représentations de G'_F . C'est pourquoi on va étudier plutôt G_F et G'_F en parallèle. Plus précisément on aura à tout instant en mémoire le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 G_L & \xrightarrow{1} & G'_L \\
 \uparrow 2 & & \uparrow 2' \\
 G_F & \cdots & G'_F
 \end{array}$$

où L est un corps proche de F qui est de caractéristique nulle. La flèche 1 est la correspondance (qu'on va noter \mathbf{C}_L) déjà établie en caractéristique nulle, les flèches 2 et 2' sont les applications du type $\bar{\zeta}_{FL}^m$ et $\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m$, et on voudrait définir une correspondance à la place où on a mis sur le dessin des pointillés. Les ennuis viennent du fait que les correspondances horizontales et verticales sont de natures très différentes : pour pouvoir user de 2 et 2' on doit être sûr que les objets qu'on veut transférer sont constants sur des ouverts assez "gros", alors que pour la flèche 1 on ne sait pas en quelle mesure elle conserve la propriété "être constant sur un ouvert assez gros" (que ce soit pour des fonctions, pour leurs intégrales orbitales ou pour les caractères de représentations). C'est à l'étude de ce problème que la présente section est dédiée. Un autre problème découle du fait que les correspondances verticales 2 et 2' sont partielles et envoient *certaines* représentations des groupes d'en bas sur *certaines* représentations des groupes d'en haut, et pour obtenir des renseignements sur une autre représentation on est obligé de changer de corps L . Pour régler ce problème il faut se placer dans une situation où le niveau de toutes les représentations qui apparaissent est borné uniformément, et c'est ce qu'on va faire dans la section 5 (suivante) au cours de la démonstration proprement dite.

Dans les sous-sections 1, 2 et 3 nous nous intéressons seulement à $GL_n(F)$. C'est dans la section 4 qu'on démontre le seul résultat sur les formes intérieures de $GL_n(F)$ dont nous avons besoin par la suite.

4.1. Éléments proches

Soient F et L deux corps locaux non archimédiens m -proches. On reprend toutes les notations de la section 2, notamment λ_{EK}^m . On note v_F et v_L les valuations sur F et L respectivement.

Si $a \in F^*$, $b \in L$ et $0 < l \leq m$ on dit que a et b sont l -proches si $(b - \lambda_{FL}^m(a)) \in P_L^{l+v_F(a)}$. On note alors $a \sim_l b$. On remarquera que b est alors non nul, car il a la même valuation que a . On considère que les éléments nuls de F et L sont l -proches pour tout l .

Soient $a \in F^*$ et $b \in L^*$. Si $a = \pi_F^{v_F(a)} a'$ avec $a' \in O_F^*$ et $b = \pi_L^{v_L(b)} b'$ avec $b' \in O_L^*$, alors $a \sim_l b$ si et seulement si on a l'égalité $v_F(a) = v_L(b)$ et que l'image par $\bar{\lambda}_{FL}^m$ de la classe de a' dans O_F/P_F^m et la classe de b' dans O_L/P_L^m sont égales modulo P_L^l .

Propriétés :

- (1) Pour tout $x \in F$, x et $\lambda_{FL}^m(x)$ sont m -proches.
- (2) Pour tous $a \in F$ et $b \in L$ qui sont l -proches, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\pi_F^i a$ et $\pi_L^i b$ sont l -proches.
- (3) Si a_1 et a_2 sont dans F et b_1 et b_2 sont dans L , si $a_1 \sim_l b_1$ et $a_2 \sim_l b_2$, alors $a_1 a_2 \sim_l b_1 b_2$.

(4) Soient A un ensemble fini et pour tout $i \in A$, a_i un élément de F et b_i un élément de L tels que $\sum_A a_i \neq 0$. On pose $l' = l + v_F(\sum_A a_i) - \min_A(v_F(a_i))$. Si $m \geq l'$ et pour tout $i \in A$, $a_i \sim_{l'} b_i$, alors on a : $\sum_A a_i \sim_l \sum_A b_i$.

Les trois premières propriétés sont triviales. Pour démontrer la quatrième on écrit

$$\begin{aligned} \lambda_{FL}^m\left(\sum_A a_i\right) - \sum_A b_i &= \lambda_{FL}^m\left(\sum_A a_i\right) - \sum_A \lambda_{FL}^m(a_i) + \sum_A \lambda_{FL}^m(a_i) - \sum_A b_i \\ &= \lambda_{FL}^m\left(\sum_A a_i\right) - \sum_A \lambda_{FL}^m(a_i) + \sum_A (\lambda_{FL}^m(a_i) - b_i). \end{aligned}$$

Or, pour tout i on a $a_i \sim_{l'} b_i$ et donc

$$\lambda_{FL}^m(a_i) - b_i \in P_F^{l+v_F(\sum_A a_i)}$$

d'où

$$\sum_A (\lambda_{FL}^m(a_i) - b_i) \in P_F^{l+v_F(\sum_A a_i)}.$$

Reste à montrer que

$$\lambda_{FL}^m\left(\sum_A a_i\right) - \sum_A \lambda_{FL}^m(a_i) \in P_F^{l+v_F(\sum_A a_i)}.$$

En écrivant, pour tout i , $a_i = \pi_F^{\min_A v_F(a_i)} a'_i$, $a'_i \in O_F$, on a

$$\lambda_{FL}^m\left(\sum_A a_i\right) = \pi_L^{\min_A v_F(a_i)} \lambda_{FL}^m\left(\sum_A a'_i\right)$$

et, pour tout i ,

$$\lambda_{FL}^m(a_i) = \pi_L^{\min_A v_F(a_i)} \lambda_{FL}^m(a'_i).$$

Il suffit donc de vérifier que $\sum_A a'_i - \sum_A \lambda_{FL}^m(a'_i) \in P_L^{l'}$. Mais comme les a'_i sont dans O_F et les corps sont m -proches, alors par le fait que λ_{FL}^m est induit par λ_{FL}^m (sous-section 2.5.1), $\lambda_{FL}^m(\sum_A a'_i) - \sum_A \lambda_{FL}^m(a'_i) \in P_L^m$; comme $m \geq l'$ le résultat est prouvé.

Sur le F -espace vectoriel F^n on considère la valuation

$$v_{F^n}((a_1; a_2; \dots a_n)) = \min_{1 \leq i \leq n} v_F(a_i).$$

On rappelle que, si F et L sont m -proches on étend l'isomorphisme λ_{FL}^m de façon naturelle, composante par composante, en un isomorphisme de F^n sur L^n . Si $a = (a_1; a_2; \dots a_n) \in F^n$ et $b = (b_1; b_2; \dots b_n) \in L^n$ et si $0 < l \leq m$ on dit que a et b sont l -proches si a et b sont nuls tous les deux ou si a est non nul et que pour tout i on a $b_i - \lambda_{FL}^m(a_i) \in P_L^{l+v_{F^n}(a)}$. Si U est un F -espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base, et V un L -espace vectoriel de même dimension n muni d'une base, alors on peut identifier U à F^n et V à L^n et parler d'éléments l -proches de U et V . Cette extension de la définition des éléments proches s'applique en particulier aux espaces de matrices $M_n(F)$ et $M_n(L)$.

4.2. Éléments proches et polynômes

Si P est un polynôme en n^2 variables commutatives $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}$ à coefficients dans \mathbb{Z} , si $M = (m_{ij}) \in M_n(F)$ (ou $M_n(L)$), on pose $P(M) = P(m_{ij}) \in F$ (ou L). Énonçons quatre propositions qui nous seront utiles par la suite :

PROPOSITION 4.1. – Si $M, M' \in M_n(F)$ alors

$$v_{M_n(F)}(MM') \geq v_{M_n(F)}(M) + v_{M_n(F)}(M').$$

PROPOSITION 4.2. – Soit $M \in GL_n(F)$. Pour tout $k > 0$ on a :

$$M + M_n(P_F^{k-v_{M_n(F)}(M^{-1})}) \subset K_F^k M K_F^k \subset M + M_n(P_F^{k+v_{M_n(F)}(M)}).$$

PROPOSITION 4.3. – Si $k > 0$ est fixé, si $M \in GL_n(F)$, en posant

$$m = k - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1})$$

on a : si F et L sont m -proches, alors $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^k M K_F^k)$.

PROPOSITION 4.4. – Supposons que F est de caractéristique non nulle p . Soit $P \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}]$. Soient $k > 0$ et $M \in M_n(F)$ fixés.

(a) On suppose que tous les coefficients de P se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, p-1\}$ et que $P(M) \neq 0$. On pose $S = \{s \text{ tel que } s \text{ est un monôme de } P\}$ et

$$m = k + v_F(P(M)) - \min_{s \in S} v_F(s(M)) - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1}).$$

Alors, si F et L sont m -proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$ on a $P(M) \sim_k P(N)$.

(b) On ne fait aucune supposition sur les coefficients de P , mais on suppose toujours que $P(M) \neq 0$. Écrivons $P = Q + pR$ où $Q, R \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}]$ et tous les coefficients de Q se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Soit μ le degré total de R , $S = \{s \text{ tel que } s \text{ est un monôme de } Q\}$ et

$$m = \max\left\{k + v_F(P(M)) - \min_{s \in S} v_F(s(M)) - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1});\right. \\ \left.k + v_F(P(M)) + \max\{0; -\mu v_{M_n(F)}(M)\}\right\}.$$

Alors, si F et L sont m -proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$ on a $P(M) \sim_k P(N)$.

(c) Supposons que $P(M) = 0$. Alors il existe m tel que, si F et L sont m -proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$ on ait $v_L(P(N)) \geq k$.

Démonstration de la proposition 4.1. – Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq n$ on a

$$v_F\left(\sum_{k=1}^n m_{ik} m'_{kj}\right) \geq \min_{1 \leq k \leq n} v_F(m_{ik}) + \min_{1 \leq k \leq n} v_F(m'_{kj})$$

d'où le résultat. \square

Démonstration de la proposition 4.2. – Si $A = M + B$ où $B \in M_n(P_F^{k-v_{M_n(F)}(M^{-1})})$ alors

$$A = M(Id + M^{-1}B) \in M K_F^k$$

par la prop. 4.1, d'où la première inclusion.

Si $A = (Id + B)M(Id + C)$ avec $B, C \in M_n(P_F^k)$, alors

$$A = M + BMC + BM + MC$$

où BMC, BM et MC se trouvent dans $M_n(P_F^{k+v_{M_n(F)}(M)})$ par la prop. 4.1, d'où la deuxième inclusion. \square

Démonstration de la proposition 4.3. – Soit $M = BAC$, où $B \in GL_n(O_F), C \in GL_n(O_F)$ et $A \in \mathcal{A}_F$. On a vu qu'alors

$$\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^k M K_F^k) = K_L^k \zeta_{FL}^m(B) \zeta_{FL}^m(A) \zeta_{FL}^m(C) K_L^k.$$

Pour montrer que $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^k M K_F^k)$ il suffit, par la prop. 4.2, de montrer que

$$\zeta_{FL}^m(BAC) - \zeta_{FL}^m(B) \zeta_{FL}^m(A) \zeta_{FL}^m(C) \in M_n(P_L^u)$$

où

$$u = k - v_{M_n(L)}((\zeta_{FL}^m(B) \zeta_{FL}^m(A) \zeta_{FL}^m(C))^{-1}) = k - v_{M_n(F)}(M^{-1}) = m + v_{M_n(F)}(M).$$

On a utilisé pour la deuxième égalité le fait que

- $\zeta_{FL}^m(B) \in GL_n(O_L)$,
- $\zeta_{FL}^m(C) \in GL_n(O_L)$ et
- $v_L(\zeta_{FL}^m(A^{-1})) = v_F(A^{-1}) = v(C^{-1}M^{-1}B^{-1}) = v_F(M^{-1})$. Pour les mêmes raisons, $v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(F)}(A)$ et si on écrit

$$A = \text{diag}(\pi_F^{a_1}; \pi_F^{a_2} \dots \pi_F^{a_n}),$$

alors $v_{M_n(F)}(A) = a_1$. Donc la relation à montrer est

$$\zeta_{FL}^m(BAC) - \zeta_{FL}^m(B) \zeta_{FL}^m(A) \zeta_{FL}^m(C) \in M_n(P_L^{m+a_1});$$

ou encore :

$$\zeta_{FL}^m(B\pi_F^{-a_1}AC) - \zeta_{FL}^m(B) \zeta_{FL}^m(\pi_F^{-a_1}A) \zeta_{FL}^m(C) \in M_n(P_L^m),$$

qui est évidente, car $B, C, \pi_F^{-a_1}A \in M_n(O_F)$ et on peut appliquer le fait que l'application $\bar{\zeta}_{FL}^m$ est induite par la restriction de ζ_{FL}^m . \square

Démonstration de la proposition 4.4. – Le partage du premier résultat de ce théorème (hypothèse $P(M) \neq 0$) en point (a) et point (b) vient du fait que, si F et L sont m -proches la somme à l termes $1 + 1 + \dots + 1$ dans les corps F et L respectivement donne des éléments m -proches pour $l < p$ (voir la propriété (4)), mais pas pour $l = p$. Le point (c) traite du cas $P(M) = 0$ où le résultat est de nature différente.

(a) Par la proposition 4.3, $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$. Par la proposition 4.2, $N - \zeta_{FL}^m(M) \in M_n(P_F^{m-v_{M_n(F)}(M^{-1})})$ et donc N et $\zeta_{FL}^m(M)$ sont $[m - v_{M_n(F)}(M^{-1}) - v_{M_n(F)}(M)]$ -proches. Mais

$$m - v_{M_n(F)}(M^{-1}) - v_{M_n(F)}(M) = k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M)).$$

Donc les coefficients de mêmes indices des deux matrices respectivement sont $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$ -proches. Par la propriété (3), pour chaque $s \in S$, $s(M)$ et $s(N)$ sont $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$ -proches. Les coefficients devant ces monômes se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, p - 1\}$. Les éléments 1_F et 1_L sont m -proches par la condition imposée dans la définition de l'application λ_{FL}^m . Alors, par la propriété (4), pour tout $l \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$, les sommes à l termes $1 + 1 + \dots + 1$ dans F et L respectivement sont m -proches. Ainsi $P(M)$ et $P(N)$ sont des sommes non nulles d'éléments $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$ -proches deux à deux. Donc, par la propriété (4), $P(M)$ et $P(N)$ sont k -proches.

(b) Par le point (a) et le choix de m , $Q(M)$ et $Q(N)$ sont k -proches. Remarquons que la caractéristique de F étant p , $Q(M) = P(M)$. Il suffit de montrer donc que $Q(N) + pR(N)$ et $Q(N)$ sont k -proches. Or, si L est un corps de caractéristique nulle m -proche de F , alors l'image de la somme à p termes $1 + 1 + \dots + 1$ dans O_L/P_L^m est la classe de 0, donc la valuation de l'élément $1 + 1 + \dots + 1$ (p fois 1) est supérieure à m . Par le choix de m dans l'hypothèse, $pR(N) \in P_L^{k+v_L(Q(N))}$ et donc $Q(N) + pR(N)$ et $Q(N)$ sont k -proches.

(c) Considérons le polynôme $Q(X) = P(X) + 1$. On a $Q(M) \neq 0$ et on peut appliquer le point (b) à Q . Or, si $Q(M)$ et $Q(N)$ sont k -proches, alors $Q(N) - \zeta_{FL}^m(Q(M)) \in P_L^k$. Mais

$$Q(N) - \zeta_{FL}^m(Q(M)) = (P(N) + 1) - 1 = P(N)$$

d'où le résultat. \square

4.3. Éléments proches et polynômes caractéristiques, cas de GL_n

Soient F un corps local de caractéristique non nulle p . Soient P_M un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans F et séparable (sans racine multiple), et M la matrice compagnon de P_M . Soit $l > 0$.

PROPOSITION 4.5. – *Il existe deux entiers, $m \geq l$ et s , qui ne dépendent que de P_M et de l , tels que, si L est un corps local de caractéristique nulle m -proche de F , on ait : si g est un élément de G_L (resp. de G_F) dont le polynôme caractéristique est s -proche de P_M , alors g est conjugué à un élément de $\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l)$ (resp. de $K_F^l M K_F^l$).*

Démonstration. – On pose

$$s = l - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1})$$

et

$$m = s.$$

Par la proposition 4.3 et le choix de m , $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l)$ et donc

$$\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l) = K_F^l \zeta_{FL}^m(M) K_F^l.$$

D'autre part, si $K_F M K_F = K_F A K_F$, $A \in \mathcal{A}_F$, alors

$$v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(F)}(A)$$

et

$$v_{M_n(F)}(M^{-1}) = v_{M_n(F)}(A^{-1}).$$

Comme on a $\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l) = K_L^l \zeta_{FL}^m(M) K_L^l$, on en déduit que

$$\zeta_{FL}^m(M) \in K_L^l \zeta_{FL}^m(A) K_L^l$$

et que

$$v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)) = v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(A))$$

et

$$v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)^{-1}) = v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(A)^{-1}).$$

Bref,

$$v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M))$$

et

$$v_{M_n(F)}(M^{-1}) = v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)^{-1}).$$

On peut donc écrire :

$$s = l - v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)) - v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)^{-1}).$$

On remarque par ailleurs que $\zeta_{FL}^m(M)$ est la matrice compagnon de $\zeta_{FL}^m(P_M)$. Donc, si P est un polynôme s -proche de P_M , alors P est un polynôme s -proche du polynôme caractéristique $P_{\zeta_{FL}^m(M)}$ de $\zeta_{FL}^m(M)$ aussi. Donc la matrice compagnon $Comp(P)$ de P sera s -proche de $\zeta_{FL}^m(M)$. Par conséquent

$$Comp(P) - \zeta_{FL}^m(M) \in M_n(P_L^{s+v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M))}) = M_n(P_L^{l-v_{M_n(L)}(\zeta_{FL}^m(M)^{-1})}).$$

Par la proposition 4.2 on a alors

$$Comp(P) \in K_L^l \zeta_{FL}^m(M) K_L^l = \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l).$$

On conclut par le fait que si $g \in GL_n(F)$ a le même polynôme caractéristique P que $Comp(P)$, alors g et $Comp(P)$ sont conjugués (car P est sans racine multiple). \square

PROPOSITION 4.6. – *Soit π une représentation de carré intégrable de G_F . Soit M un élément elliptique régulier de G_F . Soit P_M le polynôme caractéristique de M . Il existe alors m et s qui ne dépendent que de π et de P_M tels que, si L est un corps local de caractéristique nulle m -proche de F , on ait : pour tout élément g de G_L dont le polynôme caractéristique est s -proche de P_M , on a*

$$\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)}(g) = \chi_\pi(M).$$

Démonstration. – On peut supposer que M est la matrice compagnon de P_M , puisque les caractères sont constants sur une classe de conjugaison. Dans [2] nous montrons à la p. 65, au cours de la démonstration du th. 4.3, qu'il existe l tel que χ_π soit constant sur $K_F^l M K_F^l$ et m tel que, si L est un corps m -proche de F , alors $\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)}$ soit constant sur $\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l)$, et ces deux constantes sont égales. Les entiers l et m ne dépendent que de M et de π . (Ce relèvement local des caractères ne se fait que pour des représentations de carré intégrable et pour un M elliptique régulier, car il passe par un relèvement local de l'intégrale orbitale d'un pseudocoefficient.) Nous appliquons ensuite la prop. 4.5 pour ce l et, quitte à augmenter m , nous avons le résultat. Les entiers m et s obtenus ne dépendent que de l , M et π , mais l ne dépend à son tour que de M et π , et M ne dépend que de P_M , étant sa matrice compagnon. \square

4.4. Éléments proches et polynômes caractéristiques, cas des formes intérieures de GL_n

Dans cette sous-section on démontre un résultat sur les formes intérieures de $GL_n(F)$ (la proposition 4.10). Soit D_F une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F . Soit E une extension non ramifiée de dimension d sur F incluse dans D_F . On suppose qu'on a fixé une uniformisante π_F de F (et de E aussi), ainsi qu'une uniformisante π_{D_F} de D_F et un générateur σ_E de $Gal(E/F)$ qui correspondent à D_F comme dans la sous-section 2.4. Soit r un entier strictement positif et $G'_F = GL_r(D_F)$. On pose $n = rd$. Chaque fois qu'on se donne L un corps local m -proche de F , on considère que le triplet correspondant est choisi de façon à ce que l'uniformisante de F qui y apparaît soit π_F . On reprend alors toutes les notations de la section précédente pour K, D_L et tous les objets qui leur sont associés, avec une seule exception : la dimension de D_F sur F est notée ici d alors que dans la section précédente elle était notée n . On rappelle que la base de voisinages $\{K^l_F\}_{l \in \mathbb{N}}$ de l'identité avec laquelle on a travaillé sur G'_F est associée à la base de voisinages $\{P^{dl}_{D_F}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de 0 et non pas à la base de voisinages $\{P^l_{D_F}\}_{l \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 4.7. – Si $M, M' \in M_r(D_F)$ alors

$$v_{M_r(D_F)}(MM') \geq v_{M_r(D_F)}(M) + v_{M_r(D_F)}(M').$$

PROPOSITION 4.8. – Soit $M \in GL_r(D_F)$. Pour tout $k > 0$ on a :

$$M + M_r(P^{d(k-v_{M_r(D_F)}(M^{-1}))}_{D_F}) \subset K^k_F M K^k_F \subset M + M_r(P^{d(k+v_{M_r(D_F)}(M))}_{D_F}).$$

PROPOSITION 4.9. – Si $k > 0$ est fixé, si $M \in GL_r(D_F)$, en posant

$$m = k - v_{M_r(D_F)}(M) - v_{M_r(D_F)}(M^{-1})$$

on a : si F et L sont m -proches, alors $\zeta^m_{D_F D_L}(M) \in \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(K^k_F M K^k_F)$.

Démonstrations. – Les démonstrations des propositions 4.1 et 4.2 s'appliquent aux propositions 4.7 et 4.8 sans changement. Pour la proposition 4.9 il y a un petit problème car l'uniformisante de D_F ne commute pas avec tous les éléments de D_F donc il faut vérifier que $\zeta^m_{D_F D_L}(BAC) - \zeta^m_{D_F D_L}(B)\zeta^m_{D_F D_L}(A)\zeta^m_{D_F D_L}(C) \in M_n(P^{d(m-a_1)}_L)$ est toujours vrai. On multiplie par $\pi_{D_F}^{-a_1}$ comme dans la démonstration de la proposition 4.3 et on écrit :

$$\pi_{D_L}^{-a_1} \zeta^m_{D_F D_L}(BAC) = \zeta^m_{D_F D_L}(\pi_{D_F}^{-a_1} BAC) = \zeta^m_{D_F D_L}(\sigma_E^{a_1}(B)(\pi_{D_F}^{-a_1} A)C)$$

car nous avons défini $\zeta^m_{D_F D_L}$ de sorte qu'elle commute à la multiplication par les uniformisantes (propriété (2)).

Maintenant

$$\begin{aligned} \pi_{D_L}^{-a_1} \zeta^m_{D_F D_L}(B)\zeta^m_{D_F D_L}(A)\zeta^m_{D_F D_L}(C) &= \sigma_K^{a_1}(\zeta^m_{D_F D_L}(B))\pi_{D_L}^{-a_1} \zeta^m_{D_F D_L}(A)\zeta^m_{D_F D_L}(C) \\ &= \sigma_K^{a_1}(\zeta^m_{D_F D_L}(B))\zeta^m_{D_F D_L}(\pi_{D_F}^{-a_1} A)\zeta^m_{D_F D_L}(C). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\zeta^m_{D_F D_L}(\sigma_E^{a_1}(B)) = \sigma_K^{a_1}(\zeta^m_{D_F D_L}(B))$$

par la relation (2.13). Il faut donc montrer que

$$\zeta^m_{D_F D_L}(\sigma_E^{a_1}(B)(\pi_{D_F}^{-a_1} A)C) - \zeta^m_{D_F D_L}(\sigma_E^{a_1}(B))\zeta^m_{D_F D_L}(\pi_{D_F}^{-a_1} A)\zeta^m_{D_F D_L}(C) \in M_r(P^k_{D_F}).$$

On conclut comme dans la démonstration de la proposition 4.3, car $\sigma_E^{a_1}(B)$, $\pi_{D_F}^{-a_1}A$ et C sont dans $M_r(O_{D_F})$.

PROPOSITION 4.10. – Soient $M' \in G'_F$ et $k \in \mathbb{N}$. Il existe un entier m tel que, si F et L sont m -proches, alors pour tout $g' \in \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(K_{D_F}^m M' K_{D_F}^m)$ les polynômes caractéristiques de M' et g' sont k -proches.

Démonstration. – On rappelle la proposition de la p. 295, [19] :

Soit A une algèbre centrale simple sur F de dimension n^2 . Soit E une extension de dimension n de F . Alors, si on a un morphisme d'algèbres unitaires $\Psi : A \rightarrow M_n(E)$, pour tout élément g de A , le polynôme caractéristique de $\Psi(g)$ (qui a priori a des coefficients dans E) a tous ses coefficients dans F et c'est le polynôme caractéristique de g .

Dans notre cas, $A = M_r(D_F)$. Elle agit sur D_F^r . En écrivant $D_F = \bigoplus_{0 \leq i \leq d} \pi_{D_F}^i E$ on a un isomorphisme $D_F^r \simeq E^n$ et par conséquent une action de $M_r(D_F)$ sur E^n . On a obtenu donc un morphisme d'algèbres $\Psi : M_r(D_F) \rightarrow M_n(E)$. Le polynôme caractéristique de M' est alors égal au polynôme caractéristique de $\Psi(M')$. On va calculer ce dernier en fonction des coefficients de M' . Supposons que M' s'écrit $M' = (m'_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ et que $\Psi(M')$ s'écrit $(n_{st})_{1 \leq s, t \leq n}$. Supposons maintenant que pour tous i et j , m'_{ij} s'écrit sur la base $1, \pi_{D_F}, \pi_{D_F}^2 \dots \pi_{D_F}^{d-1}$ de D_F sur E :

$$m'_{ij} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \pi_{D_F}^k e_{ij}^k, \quad e_{ij}^k \in E.$$

Pour tout $0 \leq l \leq d-1$, pour tout tel e_{ij}^k posons $e_{ij}^{kl} = \sigma_E^l(e_{ij}^k)$. On peut fabriquer une matrice $\mathcal{U}(M') = (u_{vw})_{1 \leq v, w \leq n}$ à n lignes et n colonnes et à coefficients dans E en posant pour tout $1 \leq v, w \leq n : u_{vw} = e_{ij}^{kl}$ où i, j, k et l sont définis comme suit : l est le quotient de la division euclidienne de v par r , $i-1$ est le reste de la division euclidienne de v par r , k est le quotient de la division euclidienne de w par r et $j-1$ est le reste de la division euclidienne de w par r .

Notation. – Si P est un polynôme dans $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}][t]$, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice dans $M_n(F)$, si $x \in F$, l'élément $P(a_{11}; a_{12}; \dots; a_{nn}; x)$ de F sera noté abrégé $P(A; x)$.

LEMME 4.11. – Pour tout $1 \leq s, t \leq n$ il existe un polynôme indépendant de M' , $P_{st} \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}][t]$, dont le degré total en les variables $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}$ est 1, tel qu'on ait $n_{st} = P_{st}(\mathcal{U}(M'); \pi_F)$.

Démonstration. – Il suffit de vérifier cette propriété pour des matrices du type $M_{i_0 j_0}^{ke} = (m'_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ où $m'_{ij} = \delta_{i_0 i} \delta_{j_0 j} \pi_{D_F}^k e$ où i_0, j_0 sont des entiers entre 1 et r , k est un entier entre 1 et d , et $e \in E$, car l'ensemble formé par ces matrices engendre $M_r(D_F)$ sur \mathbb{Z} et les polynômes considérés sont de degré 1 en les n^2 premières variables. Soit d_1, d_2, \dots, d_r la base canonique de D_F^r . L'élément $M_{i_0 j_0}^{ke}$ agit sur D_F^r en envoyant d_i sur 0 pour tout $i \neq i_0$ et en envoyant d_{i_0} sur $\pi_{D_F}^k e d_{j_0}$. Si on se représente la matrice $\Psi(M_{i_0 j_0}^{ke})$ par blocs de taille $d \times d$, alors tous ces blocs sont nuls à l'exception de celui qui se trouve dans la position $i_0 j_0$, et ce dernier est égal à $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ où les x_{ij} sont donnés par :

- si $1 \leq i \leq k$, alors $x_{ij} = \delta_{i, j-d+k} \pi_F \sigma^{k-d+j-1}(e)$,
- si $k+1 \leq i \leq n$, alors $x_{ij} = \delta_{i, j+k} \sigma^{j-1}(e)$.

Le lemme est vérifié. \square

LEMME 4.12. – Il existe des polynômes $P_0, P_1 \dots P_{n-1} \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}][t]$ tels que pour toute matrice M' dans $M_r(D_F)$, le coefficient de X^i , $1 \leq i \leq n-1$, dans le polynôme caractéristique de M' soit égal à $P_i(\mathcal{U}(M'); \pi_F)$.

Démonstration. – C'est évident par le lemme 4.11 plus haut.

LEMME 4.13. – *Les points (a), (b) et (c) de la proposition 4.4 sont vérifiés si on remplace $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}]$ par $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nn}][t]$, $P(M)$ par $P(M; \pi_F)$ et $P(N)$ par $P(N; \pi_L)$.*

Démonstration. – La démonstration marche identiquement en tenant compte que, si F et L sont m -proches, alors π_F et π_L sont m -proches. Une autre façon de démontrer ce lemme est de le voir comme un cas particulier de la proposition 4.4 : on applique la proposition 4.4 à $(n + 1)^2$ variables. \square

Démontrons maintenant la proposition 4.10. On remarque que, si M et M' sont dans $M_r(D_F)$, et si $M - M' \in M_r(P_{D_F}^{dh})$, alors pour tout i, j , si on écrit

$$m_{ij} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \pi_{D_F}^k e_{ij}^k \quad \text{et} \quad m'_{ij} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \pi_{D_F}^k e'_{ij}^k,$$

on a pour tout $k : e_{ij}^k - e'_{ij}^k \in P_E^h$. Par conséquent, pour tout entier k_1 fixé, il existe un entier k_2 tel que, si F et L sont k_2 -proches, pour tout $M \in \bar{\zeta}_{D_F D_L}^{k_2}(K_{D_F}^{k_2} M' K_{D_F}^{k_2})$ on ait : $\mathcal{U}(M) \in \bar{\zeta}_{EK}^{k_2}(K_E^{k_1} \mathcal{U}(M') K_E^{k_1})$ (on a utilisé les propositions 4.2, 4.8, 4.3, 4.9 et le fait que si $e, e' \in E$ sont k -proches alors, pour tout $\sigma \in Gal(E/F)$, $\sigma(e)$ et $\sigma(e')$ sont k -proches).

Soit maintenant M' comme dans l'hypothèse de la proposition 4.10. On pose

$$N = \min_{0 \leq i \leq n-1} v_{M_n(E)}(P_i(\mathcal{U}(M')))$$

qui a un sens parce qu'au moins $P_0(\mathcal{U}(M'))$ est non nul (car égal à $det(M')$). L'entier N n'est autre que la valuation du polynôme caractéristique de M'' vu comme élément de F^n . En appliquant la proposition 4(b) à la matrice $\mathcal{U}(M') \in M_n(E)$ on trouve qu'il existe un k_0 tel que, si L est k_0 -proche de F , pour toute matrice $M'' \in \bar{\zeta}_{EK}^{k_0}(K_{EK}^{k_0} \mathcal{U}(M') K_{EK}^{k_0})$, pour tout i entre 0 et $n - 1$ tel que $P_i(\mathcal{U}(M')) \neq 0$, $P_i(\mathcal{U}(M'))$ et $P_i(M'')$ soient k -proches. En appliquant le lemme 4.13(c) aux polynômes P_i qui vérifient $P_i(\mathcal{U}(M')) = 0$ on trouve qu'il existe un k'_0 tel que, si L est k'_0 -proche de F , pour toute matrice $M'' \in \bar{\zeta}_{EK}^{k'_0}(K_{EK}^{k'_0} \mathcal{U}(M') K_{EK}^{k'_0})$ on a $v_{M_n(K)}(P_i(M'')) \geq k + N$. En posant $k_1 = \max\{k_0; k'_0\}$ l'entier $m = k_2$ (voir quelques lignes plus haut pour k_2) vérifie les propriétés requises par la proposition 4.10.

5. Preuve de la correspondance

Soient F un corps local non archimédien et D une algèbre à division centrale sur F et de dimension d^2 . On pose $n = rd$, $G = GL_n(F)$ et $G' = GL_r(D)$. Si O_F (resp. O_D) est l'anneau des entiers de F (resp. D), on fixe des mesures de Haar sur G et G' telles que le volume de $GL_n(O_F)$ (resp. $GL_r(O_D)$) soit égal à 1. Rappelons qu'un élément g de G ou G' est dit *semi-simple régulier* (resp. *elliptique régulier*) si le polynôme caractéristique de g est séparable (resp. irréductible séparable) et que, si g est un élément de G et g' un élément de G' on dit que g correspond à g' et on écrit $g \leftrightarrow g'$ si g et g' sont semisimples réguliers et ont le même polynôme caractéristique. Si π est une représentation lisse de longueur finie de G ou G' , alors on note χ_π le caractère de π vu comme fonction localement constante sur l'ensemble des éléments semi-simples réguliers du groupe en question.

On note $E^2(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$ et $E^2(G')$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de G' . On fixe une fois pour toutes un caractère additif non trivial ψ_F de F , trivial sur l'anneau des entiers de F . Tous les facteurs ϵ' des représentations

de G ou G' seront calculés à partir de ψ_F . Nous voulons montrer le théorème suivant, dit correspondance de Jacquet–Langlands.

THÉORÈME 5.1. – *Il existe une unique application :*

$$\mathbf{C} : E^2(G) \rightarrow E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$(5.1) \quad \chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g')$$

pour tous $g \leftrightarrow g'$.

L'application \mathbf{C} est bijective. Les représentations π et $\mathbf{C}(\pi)$ ont le même facteur ε' .

Nous voudrions montrer ce théorème en partant du fait qu'il a déjà été montré en caractéristique nulle (dans [10]) et en utilisant la construction de situations proches de la section 2. L'idéal serait de prouver que pour les deux groupes G et G' on peut relever localement les caractères des représentations au voisinage des éléments réguliers. En pratique cela est difficile à envisager, et tout ce dont on dispose est un relèvement local des caractères seulement pour G et seulement au voisinage des éléments elliptiques, et seulement pour les représentations de carré intégrable (cette dernière condition n'est pas vraiment une contrainte dans le cadre présent). Ce résultat, qui est une conséquence immédiate des résultats dans [2], permet néanmoins de prouver le théorème plus faible ci-dessous, par comparaison avec la caractéristique nulle et à l'aide des résultats prouvés dans la section 4 :

THÉORÈME 5.2 (Correspondance faible). – *Il existe une bijection :*

$$\mathbf{C}' : E^2(G) \rightarrow E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\mathbf{C}'(\pi)}(g')$$

pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers.

Attirons l'attention sur le fait que cette variante faible n'est pas satisfaisante parce qu'elle ne permet pas d'étendre la correspondance de Jacquet–Langlands aux représentations *qui ne sont pas essentiellement de carré intégrable* (voir pour l'instant [1], ch. 4). Nous ne pouvons donc pas nous arrêter là. Pour montrer le th. 5.1 (variante forte) en caractéristique non nulle, nous remarquons que le th. 5.2 permet de montrer les relations d'orthogonalité des caractères des représentations de carré intégrable sur G' (voir l'annexe), par transfert, une fois qu'on a ce résultat sur G . Nous énonçons donc un troisième théorème :

THÉORÈME 5.3. – *Les relations d'orthogonalité des caractères sont valables sur G et G' .*

On sait pour l'instant qu'il est vrai si la caractéristique du corps de base est nulle [8] et qu'il est vrai pour G si la caractéristique du corps de base est non nulle [2]. Nous suivons ensuite le schéma suivant :

On montre que, sur un corps de base fixé (toute caractéristique),

- (1) le th. 5.3 implique le th. 5.1,
- (2) le th. 5.1 implique le th. 5.2,
- (3) le th. 5.2 implique le th. 5.3.

La preuve de (1) est une réécriture de [10] telle qu'il soit clair que la caractéristique n'intervient pas, en particulier en supprimant toute référence aux résultats de l'appendice 1 dans [10], indisponibles en caractéristique non nulle. Le (2) est trivial. Comme le th. 5.3 est prouvé pour G en toute caractéristique, le (3) est immédiat par transfert sur G' . La partie originale de la démonstration est la preuve (qui utilise la théorie des corps proches développée aux sections 2 et 4, ainsi que les résultats de la section 3), de l'implication

(4) si le th. 5.1 est vrai sur tout corps de caractéristique nulle, alors le th. 5.2 est vrai sur tout corps de caractéristique non nulle.

C'est pour pouvoir démontrer cette implication qu'on a dû intégrer la relation sur les facteurs ε' à l'énoncé du th. 5.1.

Dans cette situation, comme le th. 5.3 est connu en caractéristique nulle, (1), (2), (3) et (4) impliquent que les trois théorèmes sont vrais en toute caractéristique.

Montrons que *le th. 5.3 implique le th. 5.1*.

Démonstration. – On fixe D et on raisonne par récurrence sur r . L'hypothèse de récurrence est :

(\mathbf{H}_k) Le théorème 5.1 est vrai pour $G = GL_{dk}(F)$ et $G' = GL_k(D)$.

Le premier pas ($k = 1$), connu en caractéristique nulle [20] a été traité dans [2] pour le cas de la caractéristique non nulle. Nous supposons que le théorème plus haut est vérifié pour tout entier k de 1 à $r - 1$. On pose $G = GL_{dr}(F)$ et $G' = GL_r(D)$, pour vérifier l'hypothèse \mathbf{H}_r .

Soit π_0 une représentation de carré intégrable de G de caractère central (unitaire) ω . Considérons un corps global \mathbb{F} et une algèbre à division \mathbb{D} sur \mathbb{F} tels que :

- il existe une place v_0 de \mathbb{F} telle que $\mathbb{F}_{v_0} \simeq F$ et $\mathbb{D}_{v_0} \simeq M_r(D)$;
- aux places infinies \mathbb{D} est scindée ;
- à toute place v différente de v_0 où \mathbb{D} est ramifiée, \mathbb{D}_v est isomorphe à une algèbre à division sur \mathbb{F}_v .

Soient v_0, v_1, \dots, v_m les places de \mathbb{F} où \mathbb{D} est ramifiée. On fixe une fois pour toutes un isomorphisme $\mathbb{D}_{v_0} \simeq M_r(D)$ et des isomorphismes $\mathbb{D}_v \simeq M_n(\mathbb{F}_v)$ pour toutes les places v où \mathbb{D} est scindée. Pour toute place v de \mathbb{F} on note $GL_n(\mathbb{F}_v)$ par G_v et \mathbb{D}_v^* par G'_v .

On note indistinctement $Z_v = Z_{GL_n(\mathbb{F}_v)} \simeq Z_{\mathbb{D}_v^*}$. Les adèles des groupes GL_n et \mathbb{D}^* sur \mathbb{F} seront notées $GL_n(\mathbb{A}(\mathbb{F}))$ et $\mathbb{D}^*(\mathbb{A}(\mathbb{F}))$.

Soit v_{m+1} une place finie de \mathbb{F} où \mathbb{D} n'est pas scindée. On pose $S = \{v_0, \dots, v_{m+1}\}$. Pour tout $v \in S$ nous définissons ω_v et π_v de la façon suivante :

- $\omega_{v_0} = \omega, \pi_{v_0} = \pi_0$;
- $\omega_{v_i} \cong 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$;
- $\pi_{v_i} \in E^2(GL_n(\mathbb{F}_{v_i}); \omega_{v_i})$ la représentation de Steinberg de $GL_n(\mathbb{F}_{v_i})$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- π_{m+1} une représentation cuspidale de caractère central trivial de $GL_n(\mathbb{F}_{v_{m+1}})$.

Notons $\tilde{\pi}$ une représentation automorphe cuspidale qui vérifie $\tilde{\pi}_v \simeq \pi_v$ pour tout $v \in S$ et $\tilde{\omega}$ son caractère central. L'existence d'un tel $\tilde{\pi}$ n'est pas évident. Dans un appendice de [14], Henniart montre ce résultat pour un groupe réductif quelconque, mais à condition que les π_v soient cuspidales pour tout $v \in S$. Dans le cas particulier du groupe linéaire, sa démonstration marche avec *représentations de carré intégrable* à la place de *représentations cuspidales*. En effet, il suffit de :

- rajouter à une autre place une composante cuspidale,
- remplacer tout au long de la preuve *coefficient* par *pseudo-coefficient* ; pour montrer que les pseudo-coefficients jouent ici exactement le même rôle que les coefficients dans la démonstration d'Henniart, il faut utiliser les deux arguments suivants :

– un pseudocoefficient d’une représentation de carré intégrable τ est une fonction sur laquelle la trace de toute représentation générique non équivalente à τ s’annule (car ou bien de carré intégrable, ou bien non elliptique),

– toute composante locale d’une représentation automorphe cuspidale de GL_n est générique ([22], p. 190).

Si ω_v est un caractère de Z_v , on note $H(G_v; \omega_v)$ l’espace des fonctions f sur G_v localement constantes à support compact modulo Z_v telles que $f(zg) = \omega_v^{-1}(z)f(g)$ pour tout $g \in G_v$ et tout $z \in Z_v$. Pareil pour G'_v . Pour toute place v on pose $K_v = GL_n(O_v)$ et $K'_v = GL_r(O_{D_v})$. Si $f \in H(G_v; \omega_v)$ et $f' \in H(G'_v; \omega_v)$ sont à support dans l’ensemble des éléments semi-simples réguliers, on dit que f et f' se correspondent si leurs intégrales orbitales sont égales sur des éléments qui se correspondent ($\forall g \leftrightarrow g', \Phi(f; g) = \Phi(f'; g')$) et l’intégrale orbitale de f est nulle sur tout élément g qui ne correspond à aucun $g' \in G'$. Ici le choix de mesures pour ces intégrales orbitales se fait de la façon suivante : sur $G_v = GL_n(\mathbb{F}_v)$ la mesure est telle que $vol(K_v) = 1$, sur $G'_v = GL_r(\mathbb{D}_v)$ la mesure est telle que $vol(K'_v) = 1$, sur Z_v on fixe une mesure dz arbitraire, sur tout tore elliptique maximal T de G_v ou G'_v on fixe la mesure dt telle que pour la mesure quotient dt/dz on ait $vol(T/Z_v) = 1$, sur tous les tores maximaux de G_v on fixe des mesures arbitraires avec la seule condition que si deux tores sont conjugués les mesures choisies se correspondent via cet isomorphisme (c’est indépendant de la conjugaison envisagée), et sur les tores maximaux de G'_v on fixe des mesures provenant des tores maximaux de G_v comme dans l’Annexe. Remarquons que les fonctions qui apparaîtront sont à support dans les éléments semi-simples réguliers, et ne “voient” pas les autres points. En particulier, bien que l’on n’ait pas posé de condition sur la caractéristique du corps de base, pour toute fonction $f' \in H(G'_v; \omega_v)$, il existe une fonction $f \in H(G_v; \omega_v)$ qui lui correspond et réciproquement, par le théorème de submersion de Harish-Chandra [13].

Soit $\tilde{\omega}$ un caractère unitaire de \mathbb{F}^* . On pose $\tilde{\omega}_v = \omega_v$ et on définit $H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega})$ comme l’ensemble des fonctions $f : GL_n(\mathbb{A}(\mathbb{F})) \rightarrow \mathbb{C}$ invariantes à gauche par $GL_n(\mathbb{F})$, qui sont produits sur l’ensemble des places v de fonctions locales $f_v \in H(G_v; \omega_v)$ telles que, pour presque tout v , le support de f_v est inclus dans $Z_v K_v$ et $f_v(k) = 1$ pour tout $k \in K_v$. On définit de façon analogue $H(\mathbb{D}^*(\mathbb{F}); \tilde{\omega})$.

Soient $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega})$ et $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*; \tilde{\omega})$. On dit que \tilde{f} et \tilde{f}' se correspondent et on écrit $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$ si pour tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ on a $f_{v_i} \leftrightarrow f'_{v_i}$ et pour toute place v où \mathbb{D} est scindée on a $\tilde{f}_v = \tilde{f}'_v$ (via les isomorphismes à ces places fixés au début).

On note ρ_0 (resp. ρ'_0) les représentations de $GL_n(\mathbb{A}(\mathbb{F}))$ (resp. $\mathbb{D}^*(\mathbb{A}(\mathbb{F}))$) dans l’espace des formes automorphes cuspidales de caractère central $\tilde{\omega}$.

PROPOSITION 5.4. – Si $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega})$ et $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*; \tilde{\omega})$ sont telles que $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$, et si $\tilde{f}_{v_{m+1}}$ est un coefficient d’une représentation cuspidale de $G_{v_{m+1}}$, alors on a :

$$tr \rho_0(\tilde{f}) = tr \rho'_0(\tilde{f}').$$

PROPOSITION 5.5. – On pose

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}.$$

Posons $G_V = \prod_{v \in V} G_v$, $G'_V = \prod_{v \in V} G'_v$ et $\omega_V = \prod_{v \in V} \tilde{\omega}_v$. Notons $\tilde{\pi}_V$ la représentation de G_V induite par $\tilde{\pi}$ par restriction aux places dans V . Si $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i}; \omega_{v_i})$ et $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i}; \omega_{v_i})$, on écrit $f_V \leftrightarrow f'_V$ si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ f_{v_i} et f'_{v_i} sont à support dans les éléments elliptiques réguliers et pour tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ on a $f_{v_i} \leftrightarrow f'_{v_i}$.

On a alors :

$$\text{tr } \tilde{\pi}_V(\tilde{f}_V) = \sum_{\tilde{\pi}' \in U'} m(\tilde{\pi}') \text{tr } \tilde{\pi}'_V(\tilde{f}'_V)$$

où U' est l'ensemble des représentations automorphes cuspidales $\tilde{\pi}'$ de \mathbb{D}^* telles que pour tout $v \notin V$ on ait $\tilde{\pi}'_v = \tilde{\pi}_v$, $m(\tilde{\pi}')$ est la multiplicité de $\tilde{\pi}'$ dans ρ'_0 et l'indice V veut dire "restriction aux places dans V ".

PROPOSITION 5.6. – L'ensemble U' est fini.

PROPOSITION 5.7. – Posons $V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ comme plus haut. Il existe alors un nombre fini k d'entiers strictement positifs a_j , $1 \leq j \leq k$, et des représentations irréductibles π'_{V_j} de G'_V tels que, pour tout $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i}; \omega_{v_i})$ et pour tout $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i}; \omega_{v_i})$ telles que $f'_v \leftrightarrow f_v$ pour tout $v \in V$, on ait :

$$\text{tr } \tilde{\pi}_V(f_V) = \sum_{j=1}^k a_j \text{tr } \pi'_{V_j}(f'_V).$$

La prop. 5.4 est une application classique de la formule des traces, qui remonte à [16]. Le résultat tel qu'énoncé ici est une conséquence de la formule des traces simple, valable en toute caractéristique. Pour la preuve de 5.5 voir par exemple [11] – c'est indépendant de la caractéristique du corps de base. La prop. 5.6 est prouvée dans [3] en caractéristique nulle et dans la section 3, th. 3.2 du présent article, en caractéristique non nulle. La prop. 5.7 découle immédiatement de 5.5 et 5.6.

PROPOSITION 5.8. – Il existe un nombre fini k' d'entiers strictement positifs a_p , $1 \leq p \leq k'$, et de représentations irréductibles π'_p de G' tels qu'on ait :

$$(5.2) \quad \chi_{\pi_0}(g) = (-1)^{n-r} \sum_{p=1}^{k'} a_p \chi_{\pi'_p}(g') \quad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Démonstration. – Si g'_V est un élément de G'_V et g_V est un élément de G_V qui lui correspond composante par composante (en particulier les composantes de g'_V sont des éléments semi-simples réguliers des G'_{v_i}), alors on écrit $g_V \leftrightarrow g'_V$. Comme dans l'égalité de la prop. 5.7 il apparaît un nombre fini de représentations, et que les caractères de ces représentations sont constants au voisinage de g'_V et de g_V respectivement, en choisissant des fonctions à petit support au voisinage de ces éléments (on peut les choisir telles qu'elles se correspondent, par le principe de submersion de Harish-Chandra) on peut passer à une égalité des caractères fonctions. En mettant alors tout du côté gauche de l'égalité on obtient

$$\chi_{\tilde{\pi}_V}(g_V) - \sum_{j=1}^k a_j \chi_{\pi'_{V_j}}(g'_V) = 0 \quad \forall g_V \leftrightarrow g'_V.$$

Les composantes locales de $\tilde{\pi}_V$ aux places v_1, v_2, \dots, v_m sont des représentations de Steinberg. Le caractère de la représentation de Steinberg de G_{v_i} correspond par la correspondance avec une algèbre à division au caractère de la représentation triviale de G'_{v_i} . On utilise alors l'indépendance linéaire des caractères sur l'ensemble des éléments réguliers de $\prod_{i=1}^m \mathbb{D}_{v_i}^*$ qui est compact modulo le centre. La nullité du coefficient du caractère de la représentation triviale de ce groupe donne la relation voulue sur les caractères fonction à la place v_0 . Le $(-1)^{n-r}$ vient

après un simple calcul de la loi de réciprocité et du fait que le caractère de la représentation de Steinberg de $GL_n(F_{v_i})$ (pour i de 1 à m) est égal à $(-1)^{n-1}$ sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers. □

PROPOSITION 5.9. – *Les représentations π'_p qui apparaissent dans l'égalité de la proposition 5.8 sont de carré intégrable.*

Avant de prouver cette proposition, ouvrons une parenthèse où nous montrons deux propositions, A et B. La prop. B s'applique d'une part pour prouver la proposition 5.9 plus haut et d'autre part dans l'étude de la compatibilité de la correspondance de Jacquet–Langlands avec les foncteurs de Jacquet. L'idée de la démonstration de la prop. B et les arguments sont de [10], B.2.e. Nous évitons ici l'utilisation du transfert des intégrales orbitales posé par récurrence dans [10], et qui est délicat en caractéristique non nulle. La prop. A n'est qu'un résultat intermédiaire, plus faible que la prop. B, et qui ne sert qu'à démontrer cette dernière.

Soient $\pi_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, des représentations lisses irréductibles de G et $\pi'_j, j \in \{1, 2, \dots, k'\}$, des représentations lisses irréductibles de G' , et supposons qu'on ait la relation :

$$(E_G) \quad \left(\sum_{i=1}^k a_i \chi_{\pi_i} \right) (g) = (-1)^{n-r} \left(\sum_{j=1}^{k'} a'_j \chi_{\pi'_j} \right) (g') \quad \text{pour tout } g \in G \leftrightarrow g' \in G'$$

où les a_i et les a'_j sont des nombres complexes. Sur G (resp. G') on fixe la paire parabolique minimale standard $(A; P)$ (resp. $(A'; P')$) où A (resp. A') est le tore diagonal et P (resp. P') est le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles. Donc, si L est un sous-groupe de Levi standard de G , L est le groupe des matrices inversibles diagonales par blocs d'une taille donnée. Il correspond de façon biunivoque à une suite finie d'entiers strictement positifs $(n_1; n_2; \dots n_p)$ où

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

et les n_i représentent les tailles des dits blocs dans l'ordre, en lisant du haut à gauche vers le bas à droite. Pareillement, à un sous-groupe de Levi standard L' de G' correspond de façon biunivoque une suite finie d'entiers strictement positifs $(n'_1; n'_2; \dots n'_p)$ où

$$r = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_p.$$

On dit alors que L se transfère si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, d divise n_i . Soit L' le sous-groupe de Levi standard de G' qui correspond à la suite $(n'_1; n'_2; \dots n'_p)$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $n'_i = n_i/d$. On dit alors que L' correspond à L ou que L correspond à L' ou que L et L' se correspondent. Si P est un sous-groupe parabolique standard de G et $P = LU$ est une décomposition de Levi standard de P , on dit que P se transfère si L se transfère. Alors, si L' est le sous-groupe de Levi standard de G' qui correspond à L , et P' le sous-groupe parabolique standard de G' qui a pour sous-groupe de Levi standard L' , on dit que P et P' se correspondent. Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi standard de G et G' respectivement, on utilise la notation $L \leftrightarrow L'$ pour dire que L et L' se correspondent. On adopte la même notation pour des sous-groupes paraboliques standard qui se correspondent.

Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique propre standard de G qui se transfère et soit $P' = L'U'$ le sous-groupe parabolique standard de G' qui lui correspond. On se demande si on a alors la relation :

$$(E_P) \quad \left(\sum_{i=1}^k a_i \chi_{res_P \pi_i} \right) (l) = (-1)^{n-r} \left(\sum_{j=1}^{k'} a'_j \chi_{res_{P'} \pi'_j} \right) (l') \quad \text{pour tout } l \in L \leftrightarrow l' \in L'$$

(res_P^G est la restriction parabolique, ou “foncteur de Jacquet”). La réponse est oui, sous certaines conditions (voir prop. B), et non en général.

Soient Z_L et $Z_{L'}$ les centres de L et de L' respectivement. On note $X(Z_L)$ l'ensemble des caractères lisses (pas forcément unitaires) de Z_L et pareil pour $Z_{L'}$. Il y a un isomorphisme naturel entre Z_L et $Z_{L'}$ et on identifiera tacitement par la suite, via cet isomorphisme, Z_L et $Z_{L'}$ ainsi que $X(Z_L)$ et $X(Z_{L'})$. Soit A_P l'ensemble des $\omega \in X(Z_L)$ tels que ω soit un exposant central de l'un des π_i relatif à P (c'est-à-dire que ω est le caractère central d'un des sous-quotients irréductibles de la restriction parabolique de π_i à P). Soit $A'_{P'}$ l'ensemble des $\omega \in X(Z_{L'}) = X(Z_L)$ tels que ω soit un exposant central de l'un des π'_j relatif à P' .

PROPOSITION A. – Si (\mathbf{E}_G) est vérifiée et si les conditions (1), (2) et (3) plus bas sont satisfaites :

(1) tous les a_i sont des nombres réels non nuls de même signe et tous les a'_j sont des nombres réels non nuls de même signe,

(2) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, ou bien $\text{res}_P^G \pi_i$ est nulle, ou bien tout sous-quotient irréductible de $\text{res}_P^G \pi_i$ est une représentation essentiellement de carré intégrable,

(3) pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k'\}$, ou bien $\text{res}_{P'}^{G'} \pi'_j$ est nulle, ou bien tout sous-quotient irréductible de $\text{res}_{P'}^{G'} \pi'_j$ est une représentation essentiellement de carré intégrable,

alors on a :

(i) $A_P = A'_{P'}$,

(ii) (\mathbf{E}_P) est vérifiée.

Démonstration. – (i) Tout d'abord on a que pour tout n' le caractère d'une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_{n'}(F)$ est constant, réel, non nul et de signe $(-1)^{n'-1}$ sur les éléments elliptiques réguliers d'un voisinage de l'unité dans $GL_{n'}(F)$. Cela est une conséquence immédiate de la correspondance entre GL_n et une algèbre à division ([20] et [2]), pour ne pas citer d'autres résultats plus généraux sur les germes, mais qui ne sont écrits qu'en caractéristique nulle. Mais alors on a, par l'hypothèse de récurrence $\mathbf{H}_{r'}$, que, pour tout $r' < r$, le caractère d'une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_{r'}(D)$ est constant, réel, non nul et de signe $(-1)^{r'-1}$ sur les éléments elliptiques réguliers d'un voisinage de l'unité dans $GL_{r'}(D)$. Cela s'applique en particulier à L et L' qui sont des produits de tels groupes. Faisons la remarque que c'est le seul endroit où nous avons besoin de l'hypothèse de récurrence. Il existe donc un voisinage V de l'unité dans L tel que le caractère de tout sous-quotient irréductible de $\text{res}_P^G \pi_i$ soit constant réel de signe $(-1)^{n-1}$ sur l'ensemble V_e des éléments elliptiques réguliers de V pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et il existe un voisinage de l'unité V' dans L' tel que le caractère de tout sous-quotient irréductible de $\text{res}_{P'}^{G'} \pi'_j$ soit constant réel de signe $(-1)^{r-1}$ sur l'ensemble V'_e des éléments elliptiques réguliers de V' pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k'\}$.

Soit $g' \in V'_e$ tel qu'il existe $g \in V$ avec la propriété $g \leftrightarrow g'$. On a évidemment $g \in V_e$. Si L correspond à la partition ordonnée $(n_1; n_2; \dots; n_p)$ de n , alors g se représente par un p -uplet $(g_1; g_2; \dots; g_p)$, où $g_i \in GL_{n_i}(F)$. Posons

$$c(g) = \sup_{1 \leq i \leq p-1} \frac{|\det(g_i)|_F}{|\det(g_{i+1})|_F}.$$

Soit maintenant $z \in Z_L = Z_{L'}$. On représente z par un p -uplet $(z_1; z_2; \dots; z_p)$, où $z_i \in F^*$. On pose

$$N(z) = \sup_{1 \leq i \leq p-1} \frac{|z_i|_{F^{n_i}}}{|z_{i+1}|_{F^{n_{i+1}}}}.$$

Alors, si $N(z) < c(g)^{-1}$, on a $c(zg) < 1$ et, par le th. 5.2 de [6], pour toute représentation admissible π de G (ou G')

$$\chi_{res_{P'}^G \pi}(zg) = \chi_{\pi}(zg) \quad (\text{ou } \chi_{res_{P'}^{G'} \pi}(zg') = \chi_{\pi}(zg')).$$

Écrivons maintenant dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de G et respectivement G' :

$$res_P^G \pi_i = \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \pi_i^s, \quad \alpha_s > 0$$

et

$$res_{P'}^{G'} \pi'_j = \sum_{t=1}^{k'_j} \alpha'_t \pi'_j{}^t, \quad \alpha'_t > 0,$$

où les π_i^s et les $\pi'_j{}^t$ sont des représentations irréductibles.

On a alors, en passant aux caractères, et en utilisant la relation (E_G) pour g et z comme plus haut :

$$\sum_{i=1}^k a_i \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \chi_{\pi_i^s}(zg) = (-1)^{n-r} \sum_{j=1}^{k'} a'_j \sum_{t=1}^{k'_j} \alpha'_t \chi_{\pi'_j{}^t}(zg').$$

Si ω_i^s sont les caractères centraux des π_i^s et $\omega'_j{}^t$ sont les caractères centraux des $\pi'_j{}^t$, alors on a l'égalité :

$$\sum_{i=1}^k a_i \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \omega_i^s(z) \chi_{\pi_i^s}(g) = (-1)^{n-r} \sum_{j=1}^{k'} a'_j \sum_{t=1}^{k'_j} \alpha'_t \omega'_j{}^t(z) \chi_{\pi'_j{}^t}(g').$$

On obtient, en regroupant, une relation :

$$(5.3) \quad \sum_{\omega \in A_P} n_{\omega} \omega(z) = \sum_{\omega' \in A_{P'}} n_{\omega'} \omega'(z)$$

où, chose très importante, les n_{ω} et les $n_{\omega'}$ sont tous non nuls comme somme de nombres réels non nuls et de même signe (par exemple, $n_{\omega} = \sum a_i \alpha_s \chi_{\pi_i^s}(g)$, où la somme porte sur les couples (i, s) tels que $\omega_i^s = \omega$). Or, cette relation est vraie pour tout z tel que $N(z) < c(g)^{-1}$. Pour avoir $A_P = A_{P'}$, le lemme suivant suffit :

LEMME 5.10. – Si $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$ sont des caractères distincts de Z_L et a_1, a_2, \dots, a_v sont des nombres complexes tels qu'on ait :

$$\forall z \in Z_L \text{ tel que } N(z) < c, \quad \sum_{i=1}^v a_i \omega_i(z) = 0,$$

alors on a $a_i = 0$ pour tout i .

Démonstration du lemme 5.10. – Raisonnons par l'absurde et supposons v minimal tel que

$$(5.4) \quad \sum_{i=1}^v a_i \omega_i(z) = 0$$

pour tout $z \in Z_L$ tel que $N(z) < c$ et il existe au moins un a_i non nul.

Évidemment $v \geq 2$ et tous les a_i sont non nuls. Soit $z_0 \in Z_L$ tel que $N(z_0) < 1$. Alors pour tout z tel que $N(z) < c$ on a $N(z_0 z) < c$ donc $\sum_{i=1}^v a_i \omega_i(z_0 z) = 0$ ce qui donne $\sum_{i=1}^v a_i \omega_i(z_0) \omega_i(z) = 0$. En multipliant (5.4) par $\omega_1(z_0)$ et en faisant la différence avec la dernière relation obtenue on trouve une relation du type (5.4) avec un v strictement inférieur donc une relation dans laquelle tous les coefficients sont nuls. Ceci implique que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, v\}$ on a $\omega_i(z_0) = \omega_1(z_0)$. Mais alors on a en particulier :

$$\omega_1(z_0) = \omega_2(z_0) \quad \forall z_0 \text{ tel que } N(z_0) < 1$$

et aussi, les ω_i étant des caractères,

$$\omega_1(z_0^{-1}) = \omega_2(z_0^{-1}) \quad \forall z_0 \text{ tel que } N(z_0) < 1.$$

Comme tout élément $h \in Z_L$ s'écrit $h = xy^{-1}$ où $N(x) < 1$ et $N(y) < 1$ (prendre y tel qu'on ait simultanément $N(y) < 1$ et $N(hy) < 1$, et poser $x = hy$) on aboutit à $\omega_1 = \omega_2$ ce qui contredit nos hypothèses. \square

Ainsi le point (i) de la proposition est démontré.

(ii) Prenons maintenant $g' \in L'^{reg}$ quelconque et $g \leftrightarrow g'$. On peut raisonner de la même façon, et il est toujours vrai que pour tout $z \in Z_L$ qui vérifie $N(z) < c$ on a une relation du type (5.3) avec la seule différence qu'on ne puisse plus garantir le fait que les coefficients qui apparaissent soient tous positifs. On écrit cette relation :

$$\sum_{\omega \in A_P} n_\omega \omega(z) = \sum_{\omega \in A'_{P'}} n'_\omega \omega(z).$$

Par le point (i) on a $A_P = A'_{P'}$, et par le lemme plus haut on en déduit que $n_\omega = n'_\omega$ pour tout $\omega \in A_P = A'_{P'}$. En particulier $\sum_\omega n_\omega = \sum_\omega n'_\omega$ et cette relation, si on regarde qui étaient les coefficients n_ω et n'_ω , n'est autre que la relation (E_P) appliquée à $g \leftrightarrow g'$. Le point (ii) est démontré. \square

PROPOSITION B. – Si (E_G) est vérifiée et si

– tous les a_i sont des nombres réels non nuls de même signe et tous les a'_j sont des nombres réels non nuls de même signe et

– pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, π_i est une représentation essentiellement de carré intégrable, alors :

(i) $A_P = A'_{P'}$, pour tout $P \leftrightarrow P'$.

(ii) (E_P) est vérifiée pour tout P qui se transfère.

(iii) Tous les π'_j sont des représentations essentiellement de carré intégrable.

Démonstration. – La démonstration utilise plusieurs fois le critère de Casselman ([7] 4.4.6 et 6.5.1) et la prop. A plus haut. Pour un sous-groupe de Levi standard L de G comme plus haut, le centre Z_L de L s'identifie à $(F^*)^p$ et tout caractère ω de Z_L correspond à une suite ordonnée $(\alpha_1(\omega); \alpha_2(\omega); \dots \alpha_p(\omega))$ de nombre complexes, par la formule :

$$\omega((z_1; z_2; \dots z_p)) = \prod_{1 \leq i \leq p} |z_i|_F^{\alpha_i(\omega)} \quad \forall (z_1; z_2; \dots z_p) \in Z_L.$$

Soit π une représentation lisse irréductible de G . Le critère de Casselman dit que π est une représentation essentiellement de carré intégrable si et seulement si elle a la propriété :

(Cas) pour tout sous-groupe parabolique standard P , ou bien $\text{res}_P^G \pi$ est nulle, ou bien, pour tout sous-quotient irréductible τ de $\text{res}_P^G \pi$, le caractère central ω de τ a la propriété :

$$\forall i, 1 \leq i \leq p-1, \quad \text{Re}(\alpha_i(\omega)) < \text{Re}(\alpha_{i+1}(\omega)).$$

Ce critère implique déjà :

(***) la restriction d'une représentation essentiellement de carré intégrable à un sous-groupe parabolique standard est ou bien nulle, ou bien tous ses sous-quotients irréductibles sont des représentations essentiellement de carré intégrable.

Le critère de Casselman admet aussi une variante : π est une représentation essentiellement de carré intégrable de G si et seulement si elle a la propriété :

(Cas 0) si P est le sous-groupe parabolique standard de G tel que $\text{res}_P^G \pi$ soit cuspidale, alors pour tout sous-quotient irréductible τ de $\text{res}_P^G \pi$, le caractère central ω de τ a la propriété :

$$\forall i, 1 \leq i \leq p-1, \quad \text{Re}(\alpha_i(\omega)) < \text{Re}(\alpha_{i+1}(\omega)).$$

Ces mêmes résultats valent pour G' aussi.

Maintenant, pour chaque représentation π'_j , il existe un sous-groupe parabolique standard P'_j de G' tel que la restriction de π'_j à P'_j soit cuspidale. Soit B_0 l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard P' de G' tels que pour au moins un j la restriction de π'_j à P' soit cuspidale. Définissons une relation d'ordre partielle sur B_0 en posant $P' < Q'$ si et seulement si $P' \subset Q'$. Pour tout $P' \in B_0$, on note $\Pi_{P'}$ l'ensemble des représentations π'_j dont la restriction à P' est cuspidale.

Soit P'_0 un élément minimal de B_0 . Soit $P_0 \leftrightarrow P'_0$. Comme P'_0 est minimal, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k'\}$, la restriction de π'_j à P'_0 est nulle si $\pi'_j \notin \Pi_{P'_0}$, et cuspidale si $\pi'_j \in \Pi_{P'_0}$. Par conséquent, pour tout j , ou bien la restriction de π'_j à P'_0 est nulle, ou bien tous ses sous-quotients irréductibles sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Il en est de même pour les restrictions des π_i à P_0 par (***) . On peut donc appliquer le point (i) de la proposition A pour en déduire que $A_{P_0} = A'_{P'_0}$. Mais alors, (Cas) appliqué aux π_i implique (Cas 0) pour les $\pi'_j \in \Pi_{P'_0}$. Donc tous les éléments de $\Pi_{P'_0}$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable.

On montre alors le point (iii) de notre proposition par récurrence : posons $B_1 = B_0 \setminus \{P'_0\}$. Prenons un élément minimal P'_1 de B_1 . Soit $P_1 \leftrightarrow P'_1$. Soit $j \in \{1, 2, \dots, k'\}$. Alors on a trois possibilités :

- ou bien la restriction de π'_j à P'_1 est nulle,
- ou bien $\pi'_j \in \Pi_{P'_1}$,
- ou bien $\pi'_j \in \Pi_{P'_0}$.

Dans le deuxième cas, les sous-quotients irréductibles de $\text{res}_{P'_1}^{G'} \pi'_j$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable parce que cuspidales, et dans le troisième cas par (***) et par le pas de récurrence précédent. En conclusion, si la restriction de π'_j à P'_1 est non nulle, alors tous les sous-quotients irréductibles de $\text{res}_{P'_1}^{G'} \pi'_j$ à P'_1 sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Comme du côté de G c'est pareil (par (***)) on applique encore une fois le point (i) de la proposition précédente pour avoir que $A_{P_1} = A'_{P'_1}$, et en déduire que tous les éléments de $\Pi_{P'_1}$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Ainsi de suite ; à chaque pas, les restrictions non nulles du côté de G sont constituées uniquement de représentations essentiellement de carré intégrable par (***) , et du côté de G' les restrictions non nulles sont constituées uniquement de représentations cuspidales et de représentations essentiellement de carré intégrable (par (***) et les pas précédents). Après $\text{card}(B_0)$ pas, on est sûr de trouver que toutes les représentations π'_j sont essentiellement de carré intégrable et le point (iii) est démontré.

Le point (iii) implique directement les points (i) et (ii) par application de la prop. A et par (***). La proposition B est démontrée. \square

Démonstration de la proposition 5.9. – C’est immédiat par la prop. B(iii). \square

Soit ω le caractère central de π_0 . Dans l’annexe nous définissons l’espace $L_0(G_e; \omega)$ (resp. $L_0(G'_e; \omega)$) comme espace des fonctions localement constantes sur l’ensemble des éléments elliptiques réguliers de G (resp. G'), invariantes par conjugaison par des éléments de G (resp. G') et de caractère central ω . À partir de la bijection entre l’ensemble des classes de conjugaison des éléments elliptiques réguliers sur les deux groupes nous y définissons une bijection i de $L_0(G_e; \omega)$ sur $L_0(G'_e; \omega)$. Il est bien connu qu’on peut définir des sous-espaces préhilbertiens $L^2(G_e; \omega)$ et $L^2(G'_e; \omega)$ de $L_0(G_e; \omega)$ et respectivement $L_0(G'_e; \omega)$ et que la restriction de i induit une isométrie entre ces deux espaces. Tous ces faits sont rappelés dans l’annexe. Les représentations du côté droit de l’égalité (5.2) sont forcément de caractère central ω et on peut donc écrire une égalité dans $L_0(G'_e; \omega)$:

$$(5.5) \quad i(\chi_{\pi_0}) = (-1)^{n-r} \sum_{p=1}^{k'} a_p \chi_{\pi'_p}.$$

Supposons maintenant que le th. 5.3 est vrai. Alors les objets intervenant dans l’égalité (5.5) sont des éléments de $L^2(G'_e; \omega)$; comme $i(\chi_{\pi_0})$ est de norme 1 et les $\chi_{\pi'_p}$ sont orthogonaux deux à deux et de norme 1, on obtient

$$1 = \sum_{p=1}^{k'} a_p^2.$$

Comme les a_p sont des entiers positifs, on en déduit que $k' = 1$ et $a_1 = 1$ dans la prop. 5.8. On a donc

$$\forall g \leftrightarrow g' \quad \chi_{\pi_0}(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'_1}(g').$$

De plus, π'_1 est la seule représentation essentiellement de carré intégrable de G' avec cette propriété. En effet, si π'_2 en était une autre, il y aurait une contradiction évidente avec l’orthogonalité des caractères sur G' (on a supposé que le th. 5.3 était vrai). On pose

$$\mathbf{C}(\pi_0) = \pi'_1.$$

Ainsi, pour toute $\pi \in E^2(G)$ unitaire (pour l’instant) il existe une unique $\pi' \in E^2(G')$ telle qu’on ait

$$\forall g \leftrightarrow g' \quad \chi_{\pi}(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}(g').$$

On pose alors

$$\mathbf{C}(\pi) = \pi'.$$

Si $\pi \in E^2(G)$ n’est pas unitaire, alors on écrit :

$$\pi = |\det(\cdot)|_F^x \otimes \pi^u$$

où π^u est unitaire et x est un nombre réel, et on pose :

$$\mathbf{C}(\pi) = |nrd_{G'/F^*}(\cdot)|_F^x \mathbf{C}(\pi^u)$$

où nrd est la norme réduite. Ainsi nous avons défini une application \mathbf{C} qui vérifie l’égalité (5.1).

Unicité. Si on suppose qu'il n'y a pas unicité d'une telle application \mathbf{C} on trouve deux représentations essentiellement de carré intégrable de G' qui ont des caractères égaux, bien qu'elles soient non équivalentes. En particulier, elles ont des caractères centraux égaux et donc, en tordant par un caractère de G' on peut les rendre unitaires toutes les deux et obtenir deux représentations de carré intégrable non équivalentes, mais dont les caractères sont égaux. Cela contredit l'orthogonalité des caractères sur G' .

Injectivité. Si $\mathbf{C}(\pi) = \mathbf{C}(\tau)$ alors les caractères de π et τ sont égaux sur l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G qui ont un correspondant sur G' . En particulier il y a égalité sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G , car ils ont tous un correspondant sur G' . Par orthogonalité des caractères sur G , on doit avoir $\pi = \tau$.

Les facteurs ε' . Si on suit la démonstration depuis le début, on voit qu'on a obtenu au passage le résultat suivant : en se plaçant dans la situation globale déjà définie, si π est une représentation de carré intégrable de G , il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})$ et une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}'$ de $\mathbb{D}(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})^*$ telles que

- aux places où \mathbb{D} est scindée les composantes locales de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont égales,
- aux places ramifiées différentes de v_0 les composantes locales de $\tilde{\pi}$ sont des représentations de Steinberg et les composantes locales de $\tilde{\pi}'$ sont des représentations triviales,
- la composante locale de $\tilde{\pi}$ à la place v_0 est π et la composante locale de $\tilde{\pi}'$ à la place v_0 est $\mathbf{C}(\pi)$.

Donc, pour toute place de \mathbb{F} différente de v_0 , les composantes locales de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ ont des fonctions L , ε et ε' égales, aux places où \mathbb{D} n'est pas scindée parce que ces composantes locales sont égales, et aux autres par les calculs de [12] sur les représentations de Steinberg. Donc, si on applique l'équation fonctionnelle de [12], th. 13.8, on trouve que les facteurs ε' de π et $\mathbf{C}(\pi)$ sont aussi égaux. Pour les autres représentations (représentations essentiellement de carré intégrable mais non unitaires) le résultat s'obtient en tordant par un caractère non ramifié, de façon à les rendre unitaires, et en tenant compte du fait que le facteur ε' subit le même décalage par ce changement.

Surjectivité. Supposons qu'il existe une représentation de carré intégrable π' de G' de caractère central ω qui ne se trouve pas dans l'image de \mathbf{C} . Par le th. 5.3, avec les notations de l'annexe, la restriction du caractère de π' à G'_e est dans l'espace $L^2(G'_e; \omega)$ et de plus il est orthogonal à toute restriction à G'_e d'un caractère d'une autre représentation de carré intégrable de caractère central ω de G' . En particulier, il est orthogonal aux caractères des représentations qui se trouvent dans l'image de \mathbf{C} donc en identifiant $L^2(G_e; \omega)$ et $L^2(G'_e; \omega)$ par l'isomorphisme i (voir annexe) et en utilisant la correspondance, la restriction du caractère de π' est orthogonale à la restriction de tout caractère d'une représentation de carré intégrable de G de même caractère central. D'après le corollaire 5.2 dans [2], les restrictions des caractères des représentations de carré intégrable de G de caractère central ω forment un système orthonormal complet de l'espace préhilbertien $L^2(G_e; \omega)$; le caractère de π' serait alors nul sur G'_e . C'est impossible car $\chi_{\pi'}$ est de norme 1 dans $L^2(G'_e; \omega)$. \square

Nous avons prouvé qu'indépendamment de la caractéristique du corps de base, le th. 5.3 implique le th. 5.1.

Montrons maintenant que la validité du résultat 5.1 pour tout corps de caractéristique nulle implique le th. 5.2 pour tout corps de caractéristique non nulle.

Démonstration. – Supposons donc que la caractéristique du corps de base F est non nulle. On procède par contradiction, en transférant à la caractéristique nulle. Du coup, nous travaillerons avec plusieurs corps de base, et les objets porteront parfois des indices indiquant sur quel corps

nous les considérons. Nous prouverons une correspondance faible (th. 5.2) entre les groupes G_F et G'_F en appliquant le th. 5.1 à G_L et G'_L où L est un corps de caractéristique nulle bien choisi (voir la section 2, notamment la sous-section 2.6).

Soit π une représentation de carré intégrable de G_F et soit ω le caractère central (unitaire) de π .

PROPOSITION 5.11. – *Soit π' une représentation de carré intégrable de G'_F de caractère central ω . Supposons qu'il existe $M \in G_F$ et $M' \in G'_F$ elliptiques réguliers tel qu'on ait $M \leftrightarrow M'$ et :*

$$\chi_\pi(M) \neq (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}(M').$$

Alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que, si L est un corps local de caractéristique nulle m -proche de F et C_L est la correspondance sur L entre $GL_n(L)$ et $GL_r(D_L)$, alors π et π' se relèvent et on a

$$C_L(\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)) \neq \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\pi').$$

Démonstration. –

Principe. On veut trouver un voisinage ouvert compact V de M , un voisinage V' ouvert compact de M' et un entier m tels qu'on ait :

- (1) χ_π est constant (égal à $\chi_\pi(M)$) sur V ;
- (2) $\chi_{\pi'}$ est constant (égal à $\chi_{\pi'}(M')$) sur V' ;
- (3) Pour tout corps L qui est m -proche de F , $\bar{\zeta}_{FL}^m(V)$ et $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(V')$ sont bien définis, et on a
 - (a) $\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)}$ est constant égal à $\chi_\pi(M)$ sur $\bar{\zeta}_{FL}^m(V)$ et
 - (b) Pour tout élément $g' \in \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(V')$ il existe un élément $g \in \bar{\zeta}_{FL}^m(V)$ tel qu'on ait $g \leftrightarrow g'$.

Si on suppose que $\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)$ et $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\pi')$ se correspondent par la correspondance en caractéristique nulle, on obtient alors par (3)(a) et (b) que le caractère $\chi_{\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\pi')}$ est constant égal à $(-1)^{n-r} \chi_\pi(M)$ sur $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(V')$. Mais, par (2), $\chi_{\pi'}$ est constant sur V' et en utilisant la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{V'}$ de V' qui se relève, on aurait

$$tr \pi'(\mathbf{1}_{V'}) = tr \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\pi')(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\mathbf{1}_{V'}))$$

ou encore

$$\chi_{\pi'}(M') vol(V') = (-1)^{n-r} \chi_\pi(M) vol(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(V')).$$

C'est une contradiction, car $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ préserve le volume (remarque 2.12) et

$$\chi_{\pi'}(M') \neq (-1)^{n-r} \chi_\pi(M).$$

On va donc construire V , V' et m qui vérifient ces conditions. Quitte à conjuguer M on peut supposer qu'il est la matrice compagnon de son polynôme caractéristique. Soient m et s comme dans la proposition 4.6. Par cette proposition, le caractère $\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)}$ de $\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)$ est constant égal à $\chi_\pi(M)$ sur l'ensemble des éléments de G_L qui ont un polynôme caractéristique s -proche de celui de M . Donc le caractère de $C_L(\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi))$ est constant égal à $(-1)^{n-r} \chi_\pi(M)$ sur l'ensemble des éléments de G'_L qui ont un polynôme caractéristique s -proche de celui de M . Mais le polynôme caractéristique de M est aussi celui de M' . Posons $s = k$ dans la proposition 4.10 et notons m' l'entier (qui dans la proposition 4.10 est noté m) associé à ce k . En posant $m'' = \max\{m; m'\}$, si L et F sont m'' -proches, alors on a $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{m''}(K_{D_F}^{m''} M' K_{D_F}^{m''}) \subset X_{M,s}$ où $X_{M,s}$ est l'ensemble des éléments de G'_L qui ont un polynôme caractéristique s -proche de celui de M . Quitte à changer de voisinage (et à augmenter m'') on peut supposer que $\chi_{\pi'}$ est constant sur $K_{D_F}^{m''} M' K_{D_F}^{m''}$ (car

M' est semi-simple régulier). On pose $V = K_F^m M K_F^m$, $V' = K_{D_F}^{m''} M' K_{D_F}^{m''}$ et alors le triplet $(V; V'; m'')$ vérifie les conditions (1), (2) et (3). On peut donc conclure comme nous l'avons expliqué plus haut. \square

Démontrons maintenant le théorème. Définissons d'abord $\mathbf{C}'(\pi)$. On note $X_{G_F}^\pi$ (resp. $X_{G'_F}^\pi$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de carré intégrable de G_F (resp. G'_F) de caractère central ω et qui ont un facteur ε' égal à celui de π (calculé pour le caractère additif fixé en début de section).

LEMME 5.12. – *Les ensembles $X_{G_F}^\pi$ et $X_{G'_F}^\pi$ sont finis.*

Démonstration. – Nous savons que le facteur ε' de π s'écrit

$$\varepsilon'(s; \pi; \psi_F) = \frac{Q(q^{-s})}{R(q^{-s})},$$

où Q et R sont des polynômes et q est le cardinal du corps résiduel de F . On fixe une telle écriture. Soit τ un élément de $X_{G_F}^\pi$. On rappelle la formule (2.29) :

$$\varepsilon'(s; \tau; \psi_F) = \varepsilon(s; \tau; \psi_F) L(1-s; \check{\tau}) L(s; \tau)^{-1}.$$

On sait que

$$L(s; \tau) = \frac{1}{S(q^{-s})}$$

et

$$L(1-s; \check{\tau}) = \frac{1}{T(q^{s-1})} = q^{-s \deg T} \frac{1}{T'(q^{-s})}$$

où S , T et T' sont des polynômes, $\deg T = \deg T'$. Alors, si on pose

$$\varepsilon(s; \tau; \psi_F) = K q^{-m(\tau)s},$$

où K est une constante complexe (non nulle), on a que

$$K q^{-m(\tau)s} q^{-s \deg T} S(q^{-s}) R(q^{-s}) = Q(q^{-s}) T'(q^{-s}).$$

La comparaison des degrés des polynômes qui interviennent montre que le conducteur $m(\tau)$ de toute classe $\tau \in X_{G_F}^\pi$ est borné par $\deg Q$. Le même raisonnement marche aussi pour $X_{G'_F}^\pi$, bien entendu. Alors le th. 3.1(b) implique que le niveau des éléments de $X_{G_F}^\pi$ et $X_{G'_F}^\pi$ est uniformément borné, et comme ce sont des classes de représentations de carré intégrable de caractère central fixé, il n'y en a qu'un nombre fini. \square

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de représentation de carré intégrable π' de G'_F de caractère central ω telle que $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. Alors, en particulier, il n'en existe pas dans $X_{G'_F}^\pi$. Comme cet ensemble est fini, on peut trouver un m suffisamment grand pour que prop. 5.11 s'applique à tous $\pi' \in X_{G'_F}^\pi$. Soit alors L un corps m -proche de F . Soit ψ_L un caractère additif de L m -proche de ψ . Notons $X_{G_L}^\pi$ (resp. $X_{G'_L}^\pi$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de carré intégrable de G_L (resp. G'_L) de caractère central $\zeta_{FL}^m(\omega)$ et qui ont un facteur ε' égal à celui de π . Par le th. 2.17(b) et th. 2.19(a),

$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ réalise une bijection entre $X_{G'_F}^\pi$ et $X_{G'_L}^\pi$. Donc, en appliquant la prop. 5.11, on obtient $C_L(\bar{\zeta}_{F L}^m(\pi)) \notin X_{G'_L}^\pi$. Ceci contredit le fait déjà prouvé que la correspondance en caractéristique nulle conserve le facteur ε' . Ainsi, il existe une représentation de carré intégrable π' de G_F telle que $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. À ce stade faisons la remarque que

- $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ réalise une bijection de $X_{G'_F}^\pi$ sur $X_{G'_L}^\pi$ (par th. 2.17(b) et th. 2.19(a), on l'a dit plus haut),

- $\bar{\zeta}_{F L}^m$ réalise une bijection de $X_{G'_F}^\pi$ sur $X_{G'_L}^\pi$ (par le même argument),

- C_L réalise une bijection de $X_{G'_L}^\pi$ sur $X_{G'_L}^\pi$ par le th. 5.1 en caractéristique nulle.

Donc, le cardinal de $X_{G'_F}^\pi$ est égal à celui de $X_{G'_L}^\pi$. D'autre part, en appliquant le même raisonnement que plus haut aux autres éléments de $X_{G'_F}^\pi$ on peut trouver pour chacun (au moins) un correspondant dans $X_{G'_L}^\pi$. Mais deux éléments de $X_{G'_F}^\pi$ qui ont des caractères égaux sur les éléments elliptiques réguliers sont égaux, par orthogonalité des caractères sur G_F (vrai en caractéristique non nulle, [2]). Ceci, rajouté à l'égalité des cardinaux, prouve que pour tout élément de $X_{G'_F}^\pi$ on peut trouver exactement un élément de $X_{G'_L}^\pi$ qui lui correspond et réciproquement. Ainsi, on peut définir une correspondance pour les représentations de carré intégrable. On étend la correspondance aux représentations essentiellement de carré intégrable non unitaires en tordant par des caractères, comme en caractéristique nulle. Le fait que pour tout π comme plus haut la correspondance réalise une bijection de $X_{G'_F}^\pi$ sur $X_{G'_L}^\pi$ implique qu'elle est injective et qu'elle conserve le facteur ε' . Montrons qu'elle est surjective. Cela revient à montrer que les ensembles du type $X_{G'_F}^\pi$ réalisent une partition de $E^2(G'_F)$, ou encore que, si $\pi' \in E^2(G'_F)$, on peut toujours trouver $\pi \in E^2(G_F)$ avec le même facteur ε' que π' . Or, à facteur ε' fixé, on a vu que le niveau est borné par une constante K (que ce soit sur G_F ou G'_F). Il suffit alors de partir avec π' et de faire le tour à l'envers, $G'_F - G'_L - G_L - G_F$, pour un corps L suffisamment proche pour que toutes les représentations de niveau inférieur ou égal à K se relèvent; nous savons que le facteur ε' est conservé sur le parcours. Prouvons maintenant l'unicité d'une telle correspondance. Comme la correspondance qu'on a défini est *surjective*, s'il existait une autre correspondance, alors deux classes distinctes de représentations essentiellement de carré intégrable de G_F auraient des caractères égaux sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers. Or, ceci contredit l'orthogonalité des caractères sur G_F . \square

Maintenant on veut prouver que *le th. 5.2 en caractéristique non nulle implique le th. 5.3 en caractéristique non nulle*. Ceci est évident en transférant les relations d'orthogonalité de G à G' par l'isomorphisme i (voir l'annexe) et la correspondance C' .

Récapitulons : nous avons montré que le th. 5.3 en caractéristique nulle (resp. non nulle) implique le th. 5.1 en caractéristique nulle (resp. non nulle). Nous avons montré que le th. 5.1 en caractéristique nulle implique le th. 5.2 en caractéristique non nulle et aussi que le th. 5.2 en caractéristique non nulle implique le th. 5.3 en caractéristique non nulle. Comme le th. 5.3 est vrai en caractéristique nulle [8], tous ces théorèmes sont prouvés en toute caractéristique.

COROLLAIRE 5.13. – *La restriction des caractères des classes de représentations de carré intégrable de G' de caractère central ω fixé à l'ensemble des éléments elliptiques réguliers forme un système orthonormal complet pour l'espace de Hilbert $L^2(G'_e; \omega)$.*

Démonstration. – On avait obtenu ce résultat pour $GL_n(F)$ (corollaire 5.2, [2]) par transfert à partir d'un groupe compact modulo le centre. Grâce à l'isomorphisme i entre $L^2(G_e; \omega)$ et $L^2(G'_e; \omega)$ défini dans l'annexe, on le transfère sans problème sur G' par la correspondance (th. 5.1).

6. Annexe

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soient Z le centre de G et dz une mesure de Haar sur Z . On note G_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G (i.e. dont le polynôme caractéristique est irréductible séparable); sur tout tore elliptique maximal T de G on considère une mesure de Haar dt telle que le volume de T/Z pour la mesure quotient $d\bar{t} = dt/dz$ soit égal à 1; pour tout tore maximal T de G on note T^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T , W_T le groupe de Weyl de T et $|W_T|$ le cardinal de ce groupe. Pour tout élément semi-simple régulier g de G de centralisateur T , on note $D(g)$ la valeur absolue normalisée du déterminant de l'opérateur $Ad(g^{-1}) - Id$ agissant sur $Lie(G)/Lie(T)$. Pour tout caractère unitaire ω de Z on note $L_0(G_e; \omega)$ l'espace des fonctions f définies sur G_e à valeurs dans \mathbb{C} qui sont localement constantes, invariantes par conjugaison par des éléments de G , et vérifient $f(zg) = \omega(z)f(g)$ pour tout $g \in G_e$ et tout $z \in Z$. Soit \mathcal{T}_e un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux. On note $L^2(G_e; \omega)$ le sous-espace de $L_0(G_e; \omega)$ formé des fonctions f pour lesquelles

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_e} |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t}) |f(\bar{t})|^2 d\bar{t}$$

converge. On définit un produit scalaire dans $L^2(G_e; \omega)$ en posant :

$$\langle f_1; f_2 \rangle_e = \sum_T |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t}) f_1(\bar{t}) \overline{f_2(\bar{t})} d\bar{t},$$

qui munit $L^2(G_e; \omega)$ une structure d'espace préhilbertien.

Clozel a montré dans [8] que, si la caractéristique de F est nulle, alors, pour toute représentation π de G de carré intégrable et de caractère central ω , la restriction du caractère de π à G_e se trouve dans $L^2(G_e; \omega)$ et les éléments de $L^2(G_e; \omega)$ ainsi obtenus forment une famille orthonormale pour $\langle ; \rangle_e$. Cette propriété qu'ont tous les groupes réductifs en caractéristique nulle est appelée usuellement l'*orthogonalité des caractères*. Dans [2] nous avons prouvé cette propriété dans le cas de GL_n en caractéristique non nulle, et une conséquence du présent article est la validité de l'orthogonalité des caractères pour toutes les formes intérieures de GL_n en caractéristique non nulle.

Dans le cas particulier où G/Z est compact, alors indépendamment de la caractéristique de F , les caractères de toutes les représentations lisses irréductibles de G de caractère central ω se trouvent dans $L^2(G_e; \omega)$ et forment une base hilbertienne de cet espace (cela se montre comme pour les groupes compacts). C'est le cas du groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division sur F .

Si G et G' sont les groupes des éléments inversibles de deux algèbres centrales simples de même dimension n^2 sur F , on peut identifier leurs centres qu'on note avec la même lettre Z . On fixe une fois pour toutes une mesure sur Z . L'application qui à un élément de G associe son polynôme caractéristique sur F réalise une bijection entre les classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G et l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles séparables de degré n à coefficients dans F . De même pour G' . On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G sur l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G' . On écrit $g \leftrightarrow g'$ si $g \in G$ est elliptique régulier, $g' \in G'$ est elliptique régulier et g et g' ont le même polynôme caractéristique. Il y a un

isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$i: L_0(G_e; \omega) \simeq L_0(G'_e; \omega)$$

défini par

$$i(f)(g') = f(g) \quad \text{si } g \leftrightarrow g'.$$

Maintenant, si $g \leftrightarrow g'$, alors il y a un unique isomorphisme de F -algèbres (qui dans ce cas précis sont des corps) $F[g] \simeq F[g']$, qui envoie g sur g' . On a donc un isomorphisme de groupes multiplicatifs $F[g]^* \simeq F[g']^*$. Mais $F[g]^*$ n'est autre que le tore maximal elliptique $Z(g)$ qui contient g et $F[g']^*$ n'est autre que le tore maximal elliptique $Z(g')$ qui contient g' . Toutes ces considérations impliquent que, si on choisit un ensemble de représentants \mathcal{T}_e des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G et un ensemble de représentants \mathcal{T}'_e des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G' , il y a une bijection

$$j: \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}'_e$$

qui est caractérisée par $T \simeq j(T)$.

Soit $T \in \mathcal{T}_e$. Notons j_T l'isomorphisme de T sur $j(T)$. Étant un morphisme de groupes, j_T transforme la mesure de T en une mesure de Haar de $j(T)$, donc en un multiple de la mesure qu'on avait choisi sur $j(T)$. Mais la restriction de l'application j_T à Z est l'identité, donc, vu le choix des mesures sur T et $j(T)$, on en déduit que j_T préserve la mesure. Alors la restriction de l'isomorphisme i à $L^2(G_e; \omega)$ induit un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de $L^2(G_e; \omega)$ sur $L^2(G'_e; \omega)$. D'une façon plus explicite, on a :

$$\langle i(f); i(h) \rangle = \langle f; h \rangle \quad \forall f, h \in L^2(G_e; \omega).$$

Si maintenant G' est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple de degré n^2 sur F , si g' est un élément semi-simple régulier *quelconque* de G' (i.e. dont le polynôme caractéristique $P_{g'}$ est séparable), alors l'ensemble des éléments de G' dont le polynôme caractéristique est $P_{g'}$ est la classe de conjugaison de g' . L'ensemble des éléments de $GL_n(F)$ dont le polynôme caractéristique est $P_{g'}$ est non vide, constitué d'éléments semi-simples réguliers, et forme une classe de conjugaison dans $GL_n(F)$. On obtient ainsi une injection de l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples réguliers de G' dans l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples réguliers de $GL_n(F)$. On note $g \leftrightarrow g'$ si $g \in G$ est semi-simple régulier, $g' \in G'$ est semi-simple régulier et g et g' ont le même polynôme caractéristique. Soit T' un tore maximal *quelconque* de G' et $g' \in T'^{reg}$. Si $g \leftrightarrow g'$, alors il y a un unique isomorphisme de F -algèbres $F[g] \simeq F[g']$ qui envoie g sur g' . On a donc un isomorphisme de groupes multiplicatifs $F[g]^* \simeq F[g']^*$. Mais $F[g']^*$ n'est autre que le tore T' et $F[g]^*$ est un tore maximal de $GL_n(F)$, le tore maximal qui contient g . On obtient finalement une injection de l'ensemble des classes de conjugaison de tores maximaux de G' dans l'ensemble des classes de conjugaison de tores maximaux de $GL_n(F)$ qui prolonge la bijection j définie plus haut entre l'ensemble des classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de G' et l'ensemble des classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de $GL_n(F)$. On note cette application toujours par la lettre j . Le raisonnement qu'on vient de faire implique aussi que pour tout tore T' de G' il existe un isomorphisme de T' sur tout élément T de la classe de conjugaison correspondant à la classe de conjugaison de T' . Si on fixe maintenant des mesures de Haar sur tous les tores maximaux de $GL_n(F)$, avec la propriété que sur deux tels tores conjugués les mesures se correspondent via la conjugaison, on peut obtenir par les isomorphismes plus haut des mesures de Haar sur tous les tores maximaux non elliptiques de toutes les formes intérieures de $GL_n(F)$.

RÉFÉRENCES

- [1] BADULESCU A.I., *Correspondance entre GL_n et ses formes intérieures en caractéristique positive*, thèse, Univ. Paris XI Orsay, 1999.
- [2] BADULESCU A.I., Orthogonalité des caractères pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle, *Manuscripta Math.* **101** (2000) 49–70.
- [3] BADULESCU A.I., Un théorème de finitude, avec un appendice par BROUSSOUS P., *Comp. Math.* **132** (2002) 177–190.
- [4] BOREVITCH Z.I., CHAFAREVITCH I.R., *Théorie des nombres*, in : Monographies internationales de mathématiques modernes, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [5] BERNSTEIN J., Le “centre” de Bernstein, in : Deligne P. (Ed.), *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris, 1984.
- [6] CASSELMAN W., Characters and Jacquet modules, *Math. Ann.* **230** (1977) 101–105.
- [7] CASSELMAN W., *Introduction to the theory of admissible representations of reductive p -adic groups*, prépublication.
- [8] CLOZEL L., Invariant harmonic analysis on the Schwarz space of a reductive p -adic group, in : *Proc. Bowdoin Conf. 1989*, in : Progress in Math., Vol. **101**, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 101–102.
- [9] DELIGNE P., Les corps locaux de caractéristique p , limites de corps locaux de caractéristique 0, in : *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris, 1984.
- [10] DELIGNE P., KAZHDAN D., VIGNÉRAS M.-F., Représentations des algèbres centrales simples p -adiques, in : *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris, 1984.
- [11] FLATH D., A comparison of the automorphic representations of $GL(3)$ and its twisted forms, *Pacific J. Math.* **97** (1981) 373–402.
- [12] GODEMENT R., JACQUET H., Zeta functions of simple algebras, *S.L.N.* **260** (1972).
- [13] HARISH-CHANDRA, A submersion principle and its applications, *Proc. Indian Acad. Sci.* **90** (1981) 95–102.
- [14] HENNIART G., La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$, *Mém. de la S.M.F. (nouvelle série)* **11/12** (1984).
- [15] HOWE R., Harish-Chandra homomorphism for p -adic groups, *Regional Conferences Series in Math.* **59** (1985).
- [16] JACQUET H., LANGLANDS R.P., *Automorphic forms on $GL(2)$* , in : Lecture Notes Math., Vol. **114**, Springer-Verlag, 1970.
- [17] KAZHDAN D., Representations of groups over close local fields, *J. Analyse Math.* **47** (1986) 175–179.
- [18] LEMAIRE B., thèse, Univ. Paris Sud, 1994.
- [19] PIERCE R.S., *Associative Algebras*, in : Grad. Texts in Math., Vol. **88**, Springer-Verlag.
- [20] ROGAWSKI J., Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field, *Duke Math. J.* **50** (1983) 161–201.
- [21] SATAKE I., Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields, *Publ. Math. IHES* **18** (1963) 1–69.
- [22] SHALIK A.J., The multiplicity one theorem for GL_n , *Ann. of Math.* **100** (1974) 171–193.
- [23] WEIL A., *Basic Number Theory*, in : Classics in Math., Springer-Verlag, 1973.
- [24] ZELEVINSKY A., Induced representations of reductive p -adic groups II, *Ann. Sci. ENS* **13** (1980) 165–210.

(Manuscrit reçu le 9 juillet 2001 ;
 accepté, après révision, le 29 octobre 2001.)

Alexandru Ioan BADULESCU
 Université de Poitiers,
 UFR Sciences SP2MI,
 Département de Mathématiques, Téléport 2,
 Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179,
 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France
 E-mail : badulesc@wallis.sp2mi.univ-poitiers.fr