ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CONSTANTIN CARATHÉODORY

Über die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 79-87

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_79_0>

ÜBER DIE EXISTENZ DER ABSOLUTEN MINIMA BEI REGULÄREN VARIATIONSPROBLEMEN AUF DER KUGEL

« Ernst Zermelo zum 60ten Geburstag am 27 Juli 1931 gewidmet »

von CONSTANTIN CARATHÉODORY (München).

Einleitung.

1. - Nachdem HILBERT eine Methode ersonnen hatte, um mit Hilfe des Diagonalverfahrens von G. CANTOR zu zeigen, dass je zwei beliebige Punkte auf einer regulären Fläche immer durch eine allerkürzeste geodätische Linie verbunden werden können, haben verschiedene Autoren dieses Resultat auf allgemeine *positiv definite* Variationsprobleme übertragen (1). Ist aber das vorliegende Problem nicht definit, so kann man schon an sehr einfachen Beispielen zeigen, dass die Existenz eines absoluten Minimums im Kleinen durchaus nicht hinreichend ist, um die Existenz eines solchen Minimums im Grossen zu sichern (2).

Dies hängt damit zusammen, dass das Hilbertsche Verfahren die gleichmässige Beschränktheit der Längen aller Vergleichskurven (oder eine andere ähnliche Bedingung) zur Voraussetzung hat. Herr L. TONELLI hat die wichtige Bemerkung gemacht, dass der Ansatz von HILBERT anwendbar ist, sobald man auf irgend einem Wege, aus dem Werte I_C des Kurvenintegrals des vorgelegten Variationsproblems längs einer Kurve C, eine obere Schranke für die Länge der Kurve C ableiten kann (3). Er hat überdies diesen allgemeinen Satz in vielen speziellen Fällen erprobt und insbesondere Resultate über semidefinite Variationsprobleme gewonnen, die Herr H. HAHN auf sehr interessante Weise in einen einzigen Satz zusammengefast hat (4).

2. - Es ist nun allerdings sicher, dass man diesen Satz von TONELLI nicht wesentlich verallgemeinern kann, da in den Voraussetzungen, die er macht, nur

(1) S. für die Litteratur O. BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung.* (Leipzig, Teubner, 1909). Neuntes Kap., p. 419.

(2) C. CARATHÉODORY: *Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen.* Math. Ann., Bd. 62 (1906), p. 502.

(3) LEONIDA TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* (Bologna, Zanichelli, 1923). Vol. II, p. 5.

(4) H. HAHN: *Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung.* Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Mathem.-naturw. Kl. Abt. II-*a* Bd. 134 (1925), p. 437.

solche Bedingungen benutzt werden, die gerade in dem Wesen der Hilbertschen Methode wurzeln. Trotzdem scheint es mir angebracht zu sein, den Versuch zu machen, die Tonellische Bedingung durch eine andere zu ersetzen, in welcher die Längen der Kurven, über welche man integriert, gar nicht auftreten, und die einzig und allein vom Kurvenintegral abhängt, das diskutiert wird. Die vorliegende Arbeit trägt diesem Wunsche Rechnung.

Um das Wesentliche unseres Gedankenganges ganz klar hervortreten zu lassen, werden wir nur Probleme behandeln, die überall auf einer geschlossenen Kugel regulär sind. Es wird sich aber zeigen, dass die Anwendbarkeit unserer Sätze viel weiter reicht.

3. - Wir bezeichnen mit P und Q zwei beliebige nicht zusammenfallende Punkte unserer Kugel und mit $\gamma(P, Q)$ eine *geschlossene* rektifizierbare Kurve, die P und Q enthält. Ferner soll mit $\varepsilon(P, Q)$ die untere Grenze der Werte des Integrals

$$\int_{\gamma(P,Q)} F dt, \tag{3.1}$$

für alle möglichen Kurven $\gamma(P, Q)$ bezeichnet werden. Es wird sich dann zeigen, dass die Existenz eines absoluten Minimums sehr eng mit dem Vorzeichen der Funktion $\varepsilon(P, Q)$ zusammenhängt: ein absolutes Minimum ist nämlich erstens nur dann möglich, wenn für jede Wahl von P und Q

$$\varepsilon(P, Q) \geqq 0 \tag{3.2}$$

ist; zweitens existiert immer ein absolutes Minimum, wenn stets

$$\varepsilon(P, Q) > 0 \tag{3.3}$$

ist. Ist aber die Bedingung (3.2) erfüllt und existiert ein Punktepaar (P, Q) für welches $\varepsilon(P, Q) = 0$ ist, so kann es wohl vorkommen, wie wir an einem Beispiele sehen werden, dass gewisse Punktepaare (A, B) unserer Kugel überhaupt nicht durch eine rektifizierbare Kurve verbunden werden können, für welche die untere Grenze der Werte des Integrals, das man untersucht, erreicht wird.

4. - **Notwendigkeit der Bedingung** $\varepsilon(P, Q) \geqq 0$. — Wir nehmen zuerst an dass auf der Kugel irgend eine geschlossene Kurve γ existiert, für welche

$$\int_{\gamma} F dt = \eta < 0 \tag{4.1}$$

ist. Sind dann A und B zwei beliebige Puukte unserer Kugel, so bezeichnen wir mit c_1 und c_2 zwei sphärische Kurvenbogen, von denen der erste von A bis zu einem Punkte P von γ und der zweite von diesem selben Punkte P nach B führt. Es seien nun α_1 und α_2 die Werte des Kurvenintegrals über F längs c_1

und c_2 und es sei c der von A nach B laufende Kurvenbogen, der aus c_1, aus der n-mal durchlaufenen geschlossenen Kurve γ und aus c_2 besteht. Es gilt dann die Relation

$$\int_c F dt = a_1 + a_2 + n \cdot \eta,$$

aus welcher folgt, dass die untere Grenze der Werte unseres Kurvenintegrals längs Kurven die A mit B verbinden, gleich $-\infty$ ist.

Hieraus entnimmt man weiter, dass die Funktion $\varepsilon(P, Q)$, die im vorigen Paragraphen definiert wurde, für jede beliebige Wahl der Punkte P und Q ebenfalls gleich $-\infty$ sein muss. Es gilt daher der

SATZ 1. - *Entweder ist allgemein, für jede Wahl von P und Q*

$$\varepsilon(P, Q) = -\infty,$$

oder man hat stets

$$\varepsilon(P, Q) \geqq 0.$$

Die letzte Bedingung muss notwendig erfüllt sein, falls es irgend zwei Punkte auf der Kugel geben soll, für welche das Problem des absoluten Minimums eine Lösung besitzt.

5. - Allgemeine Eigenschaften der Funktion $\varepsilon(P, Q)$. — Ist die Funktion $\varepsilon(P, Q)$ beschränkt und daher nach dem Vorhergehendem nicht negativ, so ist sie eine *stetige* Funktion ihrer Argumente. Es sei nämlich η eine beliebige positive Zahl; man kann zwei Umgebungen U_P und U_Q von P bzw. Q finden, sodass der absolute Betrag des Integrals über F längs des kürzesten Grosskreisbogens, der einen beliebigen Punkt P_1 von U_P (oder einen beliebigen Punkt Q_1 von U_Q) mit P (oder mit Q) verbindet, stets kleiner als η ist, wenn man diese Grosskreisbogen in irgend einer Richtung durchläuft. Dann müssen aber die Relationen gelten

$$\varepsilon(P, Q) - 4\eta \leqq \varepsilon(P_1, Q_1) \leqq \varepsilon(P, Q) + 4\eta, \tag{5.1}$$

aus denen die Stetigkeit von $\varepsilon(P, Q)$ unmittelbar folgt.

6. - Es sei P ein Punkt unserer Kugel von der Eigenschaft, dass für mindestens einen von P verschiedenen Punkt Q die Relation

$$\varepsilon(P, Q) = 0 \tag{6.1}$$

besteht. Wir wollen die Punktmenge $\mathfrak{M}\mathfrak{S}_P$ aller Punkte Q untersuchen, für welche diese letzte Gleichung erfüllt ist.

Wegen der Stetigkeit von $\varepsilon(P, Q)$, die wir soeben bewiesen haben, ist die Punktmenge $\mathfrak{M}\mathfrak{S}_P$ abgeschlossen. Es ist aber fast selbstverständlich, dass $\mathfrak{M}\mathfrak{S}_P$ in sich dicht ist. Um z. B. zu zeigen, dass Q Häufungspunkt von $\mathfrak{M}\mathfrak{S}_P$ ist, betrachten wir einen kleinen Kreis $\varkappa$, der Q umgibt und diesen letzten Punkt von P trennt. Es existiert nach Voraussetzung eine Folge von geschlossenen Kurven γ_n $(n=1, 2, \ldots)$, die P und Q enthalten, sodass das Integral über F, längs γ_n genommen, gegen Null strebt, wenn n nach Unendlich konvergiert. Auf jeder Kurve γ_n gibt es mindestens einen Punkt R_n, der auf $\varkappa$ liegt. Ist dann R irgend ein Häufungspunkt der Folge $\{R_n\}$, so liegt R auf $\varkappa$ und es ist $\varepsilon(P, R)=0$; also gehört R der Punktmenge $\mathfrak{M}_P$ an.

Die Punktmenge $\mathfrak{M}_P$ ist also *perfekt* und man beweist genau nach derselben Methode, dass sie ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ ist, das P enthält. Denn auf jeder geschlossenen Kurve $\varkappa$, die P von einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{M}_P$ trennt, muss mindestens ein Punkt von $\mathfrak{M}_P$ liegen, und dies wäre nicht immer der Fall, wenn $\mathfrak{M}_P$ kein Kontinuum wäre, oder wenn P nicht auf $\mathfrak{M}_P$ liegen würde.

7. - Für je zwei punkte R und S des Kontinuums $\mathfrak{C}=\mathfrak{M}_P$ ist immer $\varepsilon(R, S)=0$. In der Tat gibt es auf der Kugel, nach Vorgabe einer beliebigen positiven Zahl η, eine geschlossene Kurve γ_1, die P und R enthält, und eine ebensolche Kurve γ_2, die P und S enthält, sodass das. Integral über F längs γ_1 nicht grösser als $\frac{\eta}{2}$ ist, und das analoge Integral längs γ_2 dieselbe Eigenschaft besitzt. Die Kurve $(\gamma_1+\gamma_2)$ ist nun geschlossen, sie enthält R und S und das Integral über F längs dieser Kurve ist kleiner als η.

Das Kontinuum $\mathfrak{C}$ ist nicht willkürlich. Man kann zeigen, dass, wenigstens für reguläre Variationsprobleme, jeder Punkt P von $\mathfrak{C}$ Anfangspunkt (oder Endpunkt) eines Extremalenstückes ist, das ganz aus Punkten von $\mathfrak{C}$ besteht. Hierzu bemerken wir, dass P z. B. Mittelpunkt einesKreises mit dem Rande $\varkappa$ ist, dessen Innere durch das Extremalenfeld, das aus den Extremalen mit dem Anfangspunkt P besteht, einfach und lückenlos überdeckt wird. Man kann ausserdem den Radius von $\varkappa$ so klein wählen, dass ein Punkt Q von $\mathfrak{C}$ ausserhalb dieses Kreises liegt. Es seien wieder γ_n geschlossene Kurven, die P und Q enthalten und für welche das Integral über F gegen Null strebt, wenn n gegen Unendlich Konvergiert.

Auf jeder der Kurven γ_n gibt es einen Bogen c_n, mit dem Anfangspunkt P und dem Endpunkt R_n auf $\varkappa$, der ganz in Inneren des soeben betrachteten Feldes verläuft. Wir ersetzen die Kurven γ_n durch die geschlossenen Kurven $\bar{\gamma}_n$, die man erhält, wenn man c_n aus γ_n herausschneidet und an seiner Stelle den Extremalenbogen e_n des Feldes einsetzt, der dieselben Endpunkte, wie c_n besitzt.

Man sieht sofort ein, dass jede Häufungspunktkurve der Extremalenbogen e_n ein Extremalenbogen e ist, der aus lauter Punkten von $\mathfrak{C}$ besteht.

Wir fassen alle diese Resultate zusammen; es gilt der

SATZ 2. - *Ist die Funktion $\varepsilon(P, Q)$ beschränkt, so ist entweder für alle Punktepaare (P, Q) auf unserer Kugel*

$$\varepsilon(P, Q)>0,$$

oder es gibt mindestens ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ von der Eigenschaft, dass für alle Punktepaare (P, Q), die auf $\mathfrak{C}$ liegen, stets

$$\varepsilon(P, Q)=0$$

ist. Jeder Punkt P von $\mathfrak{C}$ in welchem das Variationsproblem regulär ist, ist Anfangspunkt eines Extremalenbogens e_1, der ganz auf $\mathfrak{C}$ liegt und Endpunkt eines Extremalenbogens e_2, der dieselbe Eigenschaft hat.

Falls also ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ existiert, so ist der einfachste denkbare Fall der, dass $\mathfrak{C}$ aus einer einzigen geschlossenen Extremale besteht. Wir werden gleich an einem Beispiele sehen, dass dieser Fall wirklich vorkommen kann. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, dass man ebenso leicht Beispiele von Variationsproblemen angeben kann, bei welchen $\mathfrak{C}$ aus mehreren sich schneidenden Extremalen besteht; bei diesen gibt es Punktepaare (P, Q) auf $\mathfrak{C}$, die in beliebig enger Nachbarschaft von einander liegen und die man nicht durch eine ganz auf $\mathfrak{C}$ verlaufende Extremale verbinden kann. Der Wortlant des Satzes 2 scheint also keiner wesentlichen Verschärfung fähig zu sein.

8. - **Beispiel.** — Wir Betrachten in der offenen xy-Ebene das Variationsproblem, das in Parameterdarstellung zu der Funktion

$$F=\frac{2}{e^y+e^{-y}}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\frac{2\dot{x}}{e^y+e^{-y}}\right) \tag{8.1}$$

gehört. Man bemerke, dass F immer positiv ist und nur auf der in positiver Richtung durchlaufenen x-Achse verschwindet.

Die Gleichungen der Extremalen lauten $F_{\dot{x}}=a$, oder ausführlich geschrieben

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} y}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\frac{1}{\operatorname{Cos} y}\right)=a. \tag{8.2}$$

Hieraus entnimmt man für a die Bedingung

$$-\frac{(\operatorname{Cos} y+1)}{\operatorname{Cos}^2 y}\leqq a\leqq\frac{\operatorname{Cos} y-1}{\operatorname{Cos}^2 y}, \tag{8.3}$$

und aus dieser letzten Relation folgt weiter, dass die Differentialgleichung (8.2) nur dann reelle Lösungen besitzt, wenn a im Intervall

$$-2\leqq a\leqq\frac{1}{4} \tag{8.4}$$

liegt.

Die letzten Gleichungen erlauben die Gestalt der Extremalen unseres Problem für jeden der in Betracht kommenden Werte von a zu übersehen. Ihre genaue Berechnung führt im Allgemeinem auf elliptische Transcendente; für unsere Zwecke wird es genügen den Fall $a=0$ zu betrachten, der mit elementaren Funktionen erledigt werden kann.

Für $a=0$ folgt nämlich aus (8.2)

$$\mp \frac{dy}{dx} = \mathrm{Sin}\, y \tag{8.5}$$

und die Lösungen dieser letzten Differentialgleichung lauten

$$\mathrm{Sin}\, y\ \mathrm{Sin}\,(x-x_0) = \pm 1. \tag{8.6}$$

Aus diesen Kurven kann man, wenn man noch annimmt, das $\dot{x}>0$ ist, zwei verschiedene Extremalenfelder konstruieren, die beide durch die Schar $y=$konst. transversal geschnitten werden.

Wir betrachten z. B. das Extremalenfeld, das durch die Kurven

$$\mathrm{Sin}\, y \cdot \mathrm{Sin}\,(x-x_0) = +1 \tag{8.7}$$

erzeugt wird, zu denen man noch die Achse $y=0$ hinzufügen muss.

Verbindet man einen Punkt A der oberen Halbebene mit einem Punkt P der x-Achse durch eine Kurve γ, so ist das Integral über F längs γ immer grösser als das Integral längs der Extremalen (8.7), die A enthält, wenn man dieses Integral zwischen A und der Asymptote $y=0$ berechnet. Bezeichnet man die Ordinate von A mit y_0, so ist also nach (8.5) und (8.1)

$$\int_{\gamma} F dt > \int_{y_0}^{0} \frac{1}{\mathrm{Cos}\, y}\left(\mathrm{Cos}\, y - \frac{1}{\mathrm{Cos}\, y}\right)\frac{-dy}{\mathrm{Sin}\, y}$$

oder schliesslich

$$\int_{\gamma} F dt > \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Cos}\, y_0}\right). \tag{8.8}$$

9. - Die Funktion (8.1) ist so gewählt worden, dass das entsprechende Variationsproblem auf der Kugel, dessen Mercatorprojektion die xy-Ebene ist, auf der ganzen Kugel, inklusive der Pole regulär ist. Wenn man nämlich dieselbe Kugel auf eine uv-Ebene stereographisch projiziert, so besteht zwischen den Koordinaten der beiden Ebenen die Relation

$$u + iv = e^{-y+ix}. \tag{9.1}$$

Aus dieser Formel erhält man nach einigen einfachen Rechnungen

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = e^{2y}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \tag{9.2}$$

$$\dot{x} = e^{2y}(u\dot{v} - v\dot{u}) \tag{9.3}$$

$$e^{-2y} = u^2 + v^2. \tag{9.4}$$

Dies alles in (8.1) eingesetzt liefert

$$F = \frac{2}{1+u^2+v^2}\left(\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2} - \frac{2(u\dot{v}-v\dot{u})}{1+u^2+v^2}\right) \tag{9.5}$$

und diese Funktion F ist auch im Punkte $u=v=0$ regulär.

Die nunmehr auf der ganzen Kugel berechnete Funktion F ist für alle Linienelemente der Kugel positiv, ausser wenn das Linienelement den Äquator in positiver Richtung berührt. Infolgedessen ist das Integral über F längs einer geschlossenen Kurve γ ebenfalls immer positiv, ausser wenn γ mit dem ein- oder mehrfach in positiver Richtung durchlaufenen Äquator zusammenfällt.

Die im § 3 eingeführte Funktion $\varepsilon(P, Q)$ ist hier immer $\geqq 0$ und sie verschwindet nur dann, wenn P und Q *beide* auf dem Äquator der Kugel liegen. Das Kontinuum $\mathfrak{C}$ des § 7 fällt daher mit diesem Äquator zusammen.

Nun gibt es keine allerkürzeste Extremale, die zwei Punkte A und B verbindet, falls A und B auf verschiedene Seiten des Äquators liegen. In der Tat bilden sich die Kurven (8.7) auf sphärische Kurven ab, die sich spiralförmig dem Äquator der Kugel asymptotisch nähern, und es ist infolgedessen immer möglich jede Kurve γ von endlicher Länge, die A und B verbindet, durch eine andere zu ersetzen, längs welcher das Integral über F verkleinert wird.

Liegen dagegen die beiden Punkte A und B auf derselben Seite des Äquators, so gibt es einen Kurvenzug ACB, der aus zwei Lösungen AC und CB von (8.5) besteht, und folgende Eigenschaften besitzt:

Erstens liegt C näher an den Äquator als jeder der Punkte A und B; zweitens ist das Integral über F längs jeder Kurve, die A mit B verbindet und den Parallelkreis durch C trifft, nie kleiner als der Wert I_0 des Integrals längs ACB. Hieraus folgt dann leicht die Existenz einer Allerkürzesten, die A mit B verbindet.

Zusammenfassend haben wir das Resultat: *Es gibt immer mindestens eine Allerkürzeste Extremale, die zwei Punkte A und B der Kugel verbindet, wenn beide Punkte auf derselben Seite des Äquators, oder beide auf dem Äquator liegen. Das Problem hat aber keine Lösung, wenn der Äquator die beiden Punkte trennt, oder wenn der eine Endpunkt auf dem Äquator liegt, der andere aber nicht.*

Endlich bemerke man, dass aus dem im § 1 erwähnten Satze von HAHN folgt, dass, wenn die Kugel ein beliebig kleines Loch haufweist, das einen Punkt des Äquators in seinem Inneren enthält, das Problem des absoluten Minimums ausnahmslos eine Lösung besitzt. Dieses letzte Resultat kann man natürlich auch leicht ableiten, indem man sich einer Methode bedient, die derjenigen der §§ 10-13 nachgebildet ist.

10. - Existenz des Absoluten Minimums falls $\varepsilon(P, Q) > 0$ ist. — Es bleibt noch zu beweisen, dass wenn für jede mögliche Wahl von P und Q die Funktion $\varepsilon(P, Q) > 0$ ist, die Existenz eines absoluten Minimums ganz allgemein folgt.

Unser Variationsproblem soll auf der ganzen Kugel regulär sein. Dann gibt es eine feste Zahl ϱ derart, dass, wenn man von einem beliebigen Punkt A der Kugel als Mittelpunkt einen Kreis mit dem sphärischen Radius ϱ beschreibt, das Extremalenfeld, das aus den Extremalen mit dem Anfangspunkt A besteht, das Innere des Kreises einfach und lückenlos überdeckt, wenn man diese Extremalen nur bis zu ihrem ersten Schnittpunkt mit dem Kreise verfolgt.

Wir bezeichnen ferner mit σ das Maximum der sphärischen Längen der soeben gezeichneten Extremalenstücke, wenn wir A noch beliebig auf der Kugel variieren lassen. Endlich sei ε_0 die nach unseren Voraussetzungen sicher von Null verschiedene untere Grenze der stetigen Funktion $\varepsilon(P, Q)$, wenn P und Q irgend zwei Punkte der Kugel bedeuten, deren sphärische Entfernung nicht kleiner als ϱ ist.

Wir betrachten jetzt eine Triangulierung durch welche die Kugel in endlich viele Dreiecke zerlegt wird und die folgenden Bedingungen genügen soll: erstens soll die sphärische Entfernung von irgend zwei Punkten eines und desselben Dreiecks nie grösser als $\frac{\varrho}{2}$ sein; zweitens soll der absolute Betrag des Integrals über F längs des kürzesten Grosskreisbogens, der zwei Punkte P und Q eines unserer Dreiecke verbindet, nie grösser als $\frac{\varepsilon_0}{3}$ sein. Es sei N die Anzahl der Dreiecke in der betrachteten Triangulierung.

11. - Es seien jetzt A und B zwei beliebige Punkte der Kugel und L eine Zahl, die grösser als die sphärische Entfernung von A und B, aber sonst beliebig ist.

Das Problem, unter allen sphärischen Kurven die A mit B verbinden und deren Längen nicht grösser als L sind, eine solche zu finden, für welche das Integral über F ein Minimum ist, hat mindestens eine Lösung. In der Tat kann hier das Verfahren von HILBERT angewandt werden: der Grund, weshalb man früher nur positiv definite Probleme betrachtet hat, entsprang ja aus der Notwendigkeit die Länge der Vergleichskurven unter einer festen Schranke zu halten, und dies ist bei unserer Fragestellung von selbst erfüllt.

Es sei also C eine Kurve, die A mit B verbindet, und die eine Lösung dieses letzten Problems darstellt. Ich behaupte, dass die Länge von C nicht nur, wie vorausgesetzt $\leqq L$ ist, sondern, dass sie für jede Wahl von L immer kleiner als die feste Zahl $(N+1)\sigma$ bleiben muss.

12. - Es sei C_1 ein beliebiger Bogen von C, der die Länge σ hat und den Anfangspunkt P besitzt. Der Bogen C_1 enthält mindestens einen Punkt Q, der die sphärische Entfernung ϱ von P hat. Im entgegengesetzten Fall würde nämlich C_1 ganz im Extremalenfelde verlaufen, das P zum Mittelpunkte hat; man könnte C_1 durch einen Extremalenbogen ersetzen, dessen Länge kleiner als σ ist, und für welchen das Integral des Variationsproblems einen kleineren Wert hat als für C_1. Die Kurve C wäre also nicht eine Lösung des Variationsproblems des letzten Paragraphen.

Ist also die sphärische Länge von C nicht kleiner als $(N+1)\sigma$, so kann man auf C eine Kette von mindestens $(N+1)$ Punkten markieren, von denen je zwei aufeinanderfolgende immer genau die sphärische Entfernung ϱ haben.

Mindestens zwei dieser Punkte, die wir mit P und Q bezeichnen, liegen im Inneren oder auf dem Rande eines und desselben Dreiecks unserer Triangulierung. Wir bezeichnen mit C_2 den Bogen von C, der von P nach Q führt.

Die sphärische Länge von C_2 ist mindestens 2ϱ, weil der auf P folgende Punkt unserer Kette sicher von Q verschieden ist. Aus demselben Grunde ist das Integral über F längs der geschlossenen Kurve, die aus C_2 und dem kürzesten Grosskreisbogen von Q nach P besteht, mindestens gleich ε_0. Also ist das Integral über C_2 nach unserer Voraussetzung über die Dreiecke der Triangulierung notwendig positiv und mindestens $\frac{2\varepsilon_0}{3}$.

Ersetzen wir also C_2 durch den kürzesten Grosskreisbogen, der von P nach Q führt, so verkleinern wir die Länge von C um mindestens $\frac{3\varrho}{2}$ und vermindern gleichzeitig den Wert des Integrals unseres Variationsproblems um mindestens $\frac{\varepsilon_0}{3}$. Dies ist aber mit der postulierten Eigenschaft von C unverträglich.

13. - Es sei jetzt eine Folge C_1', C_2',...., von Kurven gegeben, die A mit B verbinden, nnd für welche das Integral über F gegen seine untere Grenze konvergiert. Man kann, nach den Ergebnissen des letzten Paragraphen diese Folge ersetzen durch eine Folge von Kurven C_1, C_2,...., die diese selben Eigenschaften besitzen und deren Längen immer kleiner als $(N+1)\sigma$ sind. Auf diese letzte Folge kann man das Hilbertsche Verfahren anwenden und also die Existenz eines absoluten Minimums feststellen.

14. - Verallgemeinerungen. — Da unsere Überlegungen auf ganz allgemeinen Prinzipien beruhen, lassen sich die obigen Resultate sofort auf viele andere Probleme übertragen.

Erstens braucht das betrachtete Problem nicht regulär zu sein: es genügt, wenn man um jeden Punkt der Kugel ein Feld von starken (kontinuierlichen oder diskontinuierlichen) Extremalen konstruieren kann. Dann kann die geschlossene Fläche auf welcher das Variationsproblem gegeben ist von höherem Geschlecht als die Kugel oder auch eine einseitige Fläche sein. Drittens gelten alle unsere Schlüsse auch für Probleme, die in mehrdimensionalen (geschlossenen) Räumen definiert sind. Ferner ist es ganz unwesentlich, ob man die Voraussetzung macht, dass die Punktmenge auf welcher das Variationsproblem definiert ist in einem geeigneten Euklidischen Raum eingebettet ist, oder ob man Flächen bzw. Räume heranzieht, die durch die üblichen Methoden der allgemeinen Topologie erzeugt werden.

Auch auf berandete Flächen bzw. Räume kann man unsere Resultate mit einiger Vorsicht übertragen.

Für offene Flächen dagegen, weiss man aus dem Studium der positiv definiten Variationsprobleme auf der Euklidischen Ebene, dass die Existenz eines absoluten Minimums nicht gesichert ist, wenn nicht gewisse Zusatzbedingungen erfüllt sind.