

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PASQUALE CALAPSO

**Il problema della deformazione nel gruppo conforme, delle
reti O di uno spazio a quattro dimensioni**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1, n° 4
(1932), p. 355-370

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_355_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IL PROBLEMA DELLA DEFORMAZIONE
NEL GRUPPO CONFORME, DELLE RETI O DI UNO SPAZIO
A QUATTRO DIMENSIONI

di PASQUALE CALAPSO (Messina).

In questa memoria è trattato il problema della deformazione, nel gruppo conforme, delle superficie (V_2) dello spazio a quattro dimensioni, che ammettano un sistema di linee coniugato ed ortogonale (rete O). L'elemento lineare conforme per le reti O è stato da me dedotto riducendo il problema al tipo II di FUBINI (¹). Il problema della deformazione nel gruppo conforme si comporta molto diversamente di quanto avviene nello spazio a tre dimensioni; e da un'analisi accurata sono pervenuto alle seguenti conclusioni: *Esiste un primo tipo di deformazioni* (che ho chiamato di prima specie) *che si presentano come estensioni di quelle dello spazio ordinario*; per queste permane il teorema (cfr. FUBINI, l. c.): *soltanto le reti O isoterme ammettono deformazioni di prima specie.*

Ma, a differenza di quanto avviene nello spazio ordinario: *Esiste un secondo tipo di deformazione che non trova riscontro nello spazio ordinario. Esiste un terzo tipo di deformazione, che porta una rete O (non degenera) dell' S_4 in una superficie dello spazio ordinario S_3 .*

Ho fatto un'applicazione alle reti O dell' S_4 , per le quali lungo una qualunque curva della rete è costante la curvatura geodetica; in tal caso l'elemento lineare conforme è della forma

$$(U + V) \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du^2 + dv^2};$$

cercando fra queste, le reti O che ammettono deformazioni di terza specie si perviene all'elemento lineare

$$(\mathfrak{p}u + \mathfrak{p}v) \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du^2 + dv^2},$$

in cui $\mathfrak{p}u$ è la funzione ellittica di WEIERSTRASS costruita con invarianti arbitrari g_2, g_3 e $\mathfrak{p}v$ la funzione analoga costruita cogli invarianti $g_2, -g_3$.

(¹) FUBINI: *Il problema dell'applicabilità negli spazi quadratici*. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; T. LII, anno 1928, pag. 458].

§ 1. - Elemento lineare conforme di una rete O dello spazio S_4 a quattro dimensioni.

1. - Per una rete O dello spazio S_4 a quattro dimensioni adottiamo le notazioni consuete, da me usate in una precedente memoria ⁽²⁾; chiamiamo cioè:

- x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate del punto che descrive la rete;
- u, v i parametri delle curve della rete;
- $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ i coseni direttori della tangente alla linea v ;
- $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ i coseni direttori della tangente alla linea u ;
- $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ } rispettivamente i coseni direttori di due normali ⁽³⁾,
- $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ } ortogonali tra loro.

Si sa che le coordinate x_r e gli elementi del determinante ortogonale

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

soddisfano ad un sistema della forma

$$(2) \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = h\xi_r, \quad \frac{\partial x_r}{\partial v} = l\eta_r$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k\xi_r, & \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} = l_k\eta_r \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial u} = -a_1x_{1r} - a_2x_{2r} - p\eta_r, & \frac{\partial \xi_r}{\partial v} = q\eta_r \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} = p\xi_r, & \frac{\partial \eta_r}{\partial v} = -b_1x_{1r} - b_2x_{2r} - q\xi_r \end{cases}$$

le cui condizioni d'integrabilità sono

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial v} = pl, & \frac{\partial l}{\partial u} = qh \\ \frac{\partial a_r}{\partial v} = pb_r, & \frac{\partial b_r}{\partial u} = qa_r \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \end{cases}$$

È da osservare che *senza deformare la rete* le quantità a_r, b_r sono sostituibili con le altre

$$(5) \quad \begin{cases} a_1' = a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha, & b_1' = b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha \\ a_2' = a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha, & b_2' = b_1 \sin \alpha + b_2 \cos \alpha \end{cases}$$

($\alpha = \cos t$).

⁽²⁾ La formazione delle reti O negli spazi pluridimensionali è dovuta a GUICHARD [*Les Systèmes cycliques et les Systèmes orthogonaux*; « Annales de l'École normale »; 1897, 1898, 1903].

⁽³⁾ Per la definizione di normali ad una rete cfr. GUICHARD, l. c.

Per una rete O si hanno due coppie di curvatures principali, che si calcolano dalle formule

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_2} = \frac{a_1}{h}, & \frac{1}{r_1} = \frac{b_1}{l} \\ \frac{1}{r_2'} = \frac{a_2}{h}, & \frac{1}{r_1'} = \frac{b_2}{l}; \end{cases}$$

esse subiscono con le a_r, b_r la sostituzione ortogonale

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{r_2} - \frac{\sin \alpha}{r_2'}, & \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \alpha}{r_1} - \frac{\sin \alpha}{r_1'} \\ \frac{1}{R_2'} = \frac{\sin \alpha}{r_2} + \frac{\cos \alpha}{r_2'}, & \frac{1}{R_1'} = \frac{\sin \alpha}{r_1} + \frac{\cos \alpha}{r_1'} \end{cases}$$

e si ha

$$(8) \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right)^2.$$

2. - Per formare l'elemento lineare conforme, introduciamo anzitutto le due sfere centrali ⁽⁴⁾ relative alle due normali alla rete; ponendo

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad H' = \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'},$$

e chiamando rispettivamente con (Y_1, \dots, Y_6) e con (Y_1', \dots, Y_6') le coordinate non omogenee delle dette sfere, si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} Y_r = -\frac{H}{2} x_r + x_{1r} & (r=1, 2, 3, 4) \\ Y_5 + iY_6 = \frac{H}{2}; \quad \sum_{s=1}^6 Y_s^2 = 1 & (i = \sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} Y_r' = -\frac{H'}{2} x_r + x_{2r} \\ Y_5' + iY_6' = \frac{H'}{2}; \quad \sum_{s=1}^6 Y_s'^2 = 1; \end{cases}$$

d'altra parte, introducendo per il punto che descrive la rete le coordinate ipersferiche, avremo

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2x_1, & \alpha_2 = -2x_2, & \alpha_3 = -2x_3, & \alpha_4 = -2x_4 \\ \alpha_5 = 1 - \sum_{r=1}^4 x_r^2, & \alpha_6 = -i \left(1 + \sum_{r=1}^4 x_r^2 \right) \end{cases}$$

3. - Ciò premesso deriviamo le precedenti, tenendo conto delle (2); abbiamo

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_r}{\partial u} = -2h\xi_r, & (r=1, 2, 3, 4) \\ \frac{\partial \alpha_5}{\partial u} = -2h \sum_{r=1}^4 x_r \xi_r, & \frac{\partial \alpha_6}{\partial u} = i \frac{\partial \alpha_5}{\partial u} \end{cases}$$

⁽⁴⁾ Qui chiamiamo sfera una varietà a due dimensioni contenuta in una ipersfera.

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_r}{\partial v} = -2l\eta_r, \\ \frac{\partial \alpha_5}{\partial v} = -2l \sum_{r=1}^4 x_r \eta_r, \quad \frac{\partial \alpha_6}{\partial v} = i \frac{\partial \alpha_5}{\partial v}; \end{cases}$$

similmente derivando le (9), osservando le (2), (3) e (6), otteniamo

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y_r}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial u} x_r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) h \xi_r \\ \frac{\partial Y_6}{\partial u} = i \frac{\partial Y_5}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial H}{\partial u} \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y_r}{\partial v} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial v} x_r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) l \eta_r \\ \frac{\partial Y_6}{\partial v} = i \frac{\partial Y_5}{\partial v} - \frac{i}{2} \frac{\partial H}{\partial v}. \end{cases}$$

Dopo di che, *estendendo i sommatori da 1 a 6*, troviamo

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \alpha_r}{\partial u} \frac{\partial Y_r}{\partial u} &= \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) h^2, & \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \alpha_r}{\partial u} \frac{\partial Y_r}{\partial v} &= 0 \\ \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \alpha_r}{\partial v} \frac{\partial Y_r}{\partial u} &= 0, & \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \alpha_r}{\partial v} \frac{\partial Y_r}{\partial v} &= -\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) l^2 \end{aligned}$$

e ne deduciamo la forma fondamentale

$$(16) \quad \Phi = \sum_{r=1}^6 da_r dY_r = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) [h^2 du^2 - l^2 dv^2].$$

Allo stesso modo, se invece di operare sulle Y_r operiamo sulle Y_r' perveniamo ad una forma analoga

$$(17) \quad \Psi = \sum_{r=1}^6 da_r dY_r' = \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right) [h^2 du^2 - l^2 dv^2].$$

4. - Siamo ora in grado di formare l'espressione dell'elemento lineare conforme.

A tale scopo interpretiamo per un momento le quantità α_r come coordinate di KLEIN di una retta dello spazio ordinario; si vede allora che il sistema considerato appartiene al *tipo II* di FUBINI ⁽⁵⁾ e si riconosce col calcolo diretto che le forme c , \bar{c} , g ivi considerate hanno nelle attuali notazioni le espressioni

$$\begin{aligned} c &= \Phi + i\Psi, & \bar{c} &= \Phi - i\Psi \\ g &= 4(h^2 du^2 + l^2 dv^2) \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ FUBINI: *Il problema dell'applicabilità negli spazi quadratici*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. LII, anno 1928, pag. 458.

epperò l'elemento lineare conforme della rete è

$$(18) \quad \frac{c\bar{e}}{g} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right)^2 \right] \frac{(h^2 du^2 - l^2 dv^2)^2}{h^2 du^2 + l^2 dv^2}.$$

§ 2. - Espressione dell'elemento lineare conforme delle reti O dell' S_4 mediante gl'invarianti del gruppo.

5. - Allo scopo di procedere ad ulteriori ricerche occorre formare l'espressione della (18) mediante gli *invarianti del gruppo conforme*.

Facciamo anzitutto l'estensione alle reti O dell' S_4 dei risultati da me stabiliti nella memoria: *Sugli invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio*. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXII, anno 1906].

Se poniamo

$$(19) \quad \begin{cases} l = \theta h, & b_1 = a_1 \theta + \omega_1, & b_2 = a_2 \theta + \omega_2 \\ 2 \frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial \log l}{\partial v} \frac{\partial \log h}{\partial v} + \left(\frac{\partial \log h}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial l}{\partial u} \right)^2 + b_1^2 + b_2^2 = J \end{cases}$$

e seguiamo l'analisi da me usata nella citata memoria, un calcolo diretto che qui non riportiamo mostra che le quantità

$$\theta, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad J$$

sono invarianti del gruppo; e sono *i soli* nel senso del teorema da me stabilito alla fine del § V della memoria citata.

Note che siano le funzioni $\theta, \omega_1, \omega_2, J$ se ne deduce la rete O (ed ogni altra ad essa equivalente nel gruppo conforme) integrando il sistema ⁽⁶⁾

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \log h}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log h}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2\theta^2} \left(\frac{\partial \log h}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{1}{2} a_2^2 + \\ \quad + \frac{1}{2\theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - J}{\theta^2} \\ \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log h}{\partial u} \frac{\partial \log h}{\partial v} + \frac{\partial \log \theta}{\partial u} \frac{\partial \log h}{\partial v} - \frac{1}{\omega_r} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_r}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log h}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta^2 \left(\frac{\partial \log h}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log h}{\partial v} - \theta^2 \frac{\partial \log \theta}{\partial u} \frac{\partial \log h}{\partial u} - \\ \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta^2 (a_1^2 + a_2^2) - \theta (\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2) - \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - J) \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_r}{\partial u} = a_r \frac{\partial \log h}{\partial u} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial u} \\ \frac{\partial a_r}{\partial v} = \left(a_r + \frac{\omega_r}{\theta} \right) \frac{\partial \log h}{\partial v}; \end{cases}$$

da queste si trovano h, a_1, a_2 e poscia dalle (19) si deducono l, b_1, b_2 .

⁽⁶⁾ Cfr. le (28), (29), (30), (22) della mia memoria qui citata.

Le funzioni θ , ω_1 , ω_2 , J non sono del tutto arbitrarie, ma debbono soddisfare alle *condizioni d'integrabilità del sistema* (20), (21); cioè:

$$(22) \quad \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_1}{\partial u} = \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_2}{\partial u}$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \log \theta}{\partial u} \left[2 \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_1}{\partial u} - \frac{2}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[2 \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_1}{\partial u} - \frac{2}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 - \frac{2}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - J}{\theta^2} \right] \\ & \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \left[2 \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_1}{\partial u} - \frac{2}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[2 \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \frac{\partial \log \omega_1}{\partial u} - \frac{2}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right] = - \frac{\partial J}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni sono anche sufficienti; cioè: *Se quattro funzioni* θ , ω_1 , ω_2 , J *soddisfano alle (22) e (23), esistono effettivamente [e si deducono dall'integrazione delle (20) e (21)] infinite reti* O *per ciascuna delle quali gl'invarianti sopra definiti coincidono con* θ , ω_1 , ω_2 , J ; *tali reti* O *formano una classe completa di reti* O *fra loro equivalenti nel gruppo conforme.*

6. - Richiamate così le proprietà fondamentali della teoria degli invarianti del gruppo, formiamo l'elemento lineare conforme.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{b_1}{l} - \frac{a_1}{h} = \frac{\omega_1}{\theta h} \\ \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} &= \frac{b_2}{l} - \frac{a_2}{h} = \frac{\omega_2}{\theta h}, \end{aligned}$$

epperò le forme g , Φ , Ψ hanno ora le espressioni

$$\begin{aligned} g &= 4h^2 (du^2 + \theta^2 dv^2) \\ \Phi &= \frac{\omega_1}{\theta} h (du^2 - \theta^2 dv^2) \\ \Psi &= \frac{\omega_2}{\theta} h (du^2 - \theta^2 dv^2), \end{aligned}$$

donde

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Phi^2}{g} &= \frac{\omega_1^2}{4\theta^2} \frac{(du^2 - \theta^2 dv^2)^2}{du^2 + \theta^2 dv^2} \\ \frac{\Psi^2}{g} &= \frac{\omega_2^2}{4\theta^2} \frac{(du^2 - \theta^2 dv^2)^2}{du^2 + \theta^2 dv^2}, \end{aligned} \right.$$

e per l'elemento lineare conforme otteniamo l'espressione definitiva

$$(25) \quad \frac{\Phi^2 + \Psi^2}{g} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{4\theta^2} \frac{(du^2 - \theta^2 dv^2)^2}{du^2 + \theta^2 dv^2}.$$

§ 3. - Esame dei casi degeneri.

7. - Per procedere ad ulteriori ricerche occorre stabilire le relazioni tra gl'invarianti nel caso in cui la rete O dell' S_4 appartiene ad uno spazio di dimensione inferiore.

Supponiamo che le coordinate ipersferiche del punto soddisfino ad una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$(A) \quad -2 \sum_{r=1}^4 \lambda_r x_r + \lambda_5 \left(1 - \sum_{r=1}^4 x_r^2\right) - i\lambda_6 \left(1 + \sum_{r=1}^4 x_r^2\right) = 0;$$

e deriviamo una volta rispetto ad u ed una volta rispetto a v osservando le relazioni fondamentali (2) e (3); otteniamo

$$(B) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^4 \lambda_r \xi_r + (\lambda_5 + i\lambda_6) \sum_{r=1}^4 x_r \xi_r = 0 \\ \sum_{r=1}^4 \lambda_r \eta_r + (\lambda_5 + i\lambda_6) \sum_{r=1}^4 x_r \eta_r = 0. \end{cases}$$

Se introduciamo le quantità

$$(C) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^4 \lambda_r x_{1r} + (\lambda_5 + i\lambda_6) \sum_{r=1}^4 x_r x_{1r} = \sigma_1 \\ \sum_{r=1}^4 \lambda_r x_{2r} + (\lambda_5 + i\lambda_6) \sum_{r=1}^4 x_r x_{2r} = \sigma_2, \end{cases}$$

vediamo subito che in forza delle (2), (3) e delle precedenti (B) le σ hanno nulle le derivate rispetto ad u e v , e perciò sono costanti. Di più se scriviamo le (B) e (C) sotto la forma

$$\begin{cases} \xi_1[\lambda_1 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_1] + \xi_2[\lambda_2 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_2] + \\ \quad + \xi_3[\lambda_3 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_3] + \xi_4[\lambda_4 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_4] = 0 \\ \eta_1[\lambda_1 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_1] + \dots = 0 \\ x_{11}[\lambda_1 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_1] + \dots = \sigma_1 \\ x_{21}[\lambda_1 + (\lambda_5 + i\lambda_6)x_1] + \dots = \sigma_2, \end{cases}$$

quadriamo e sommiamo (tenendo sempre conto che il determinante (1) è ortogonale), perveniamo subito alla relazione

$$2(\lambda_5 + i\lambda_6) \sum_{r=1}^4 \lambda_r x_r + (\lambda_5 + i\lambda_6)^2 \sum_{r=1}^4 x_r^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Questa, combinata colla (A), dà:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

epperò: *se la relazione lineare omogenea tra le coordinate ipersferiche non è isotropa, le costanti σ_1 e σ_2 non sono entrambe nulle.*

Ciò premesso dalle (B) per derivazione si ricava

$$\begin{cases} \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = (\lambda_5 + i\lambda_6)h \\ \sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2 = (\lambda_5 + i\lambda_6)l \end{cases}$$

donde

$$\sigma_1 \left(b_1 - a_1 \frac{i}{h} \right) + \sigma_2 \left(b_2 - a_2 \frac{i}{h} \right) = 0$$

cioè

$$(D) \quad \sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 = 0;$$

dunque se fra le coordinate ipersferiche del punto che descrive la rete passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, gl'invarianti ω_1, ω_2 sono pure legati da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

Se la relazione (A) è isotropa, si vede con procedimento diretto che σ_1 e σ_2 non sono contemporaneamente nulli, ed il ragionamento superiore dà per gl'invarianti la relazione (*isotropia*)

$$(E) \quad \omega_1 + i\omega_2 = 0 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

In ciò che segue, quando dovremo formare una rete O assegnandone gl'invarianti, *assumeremo sempre ω_1 ed ω_2 linearmente indipendenti*; si avrà in corrispondenza una rete O (*non degenera*) dello spazio a quattro dimensioni.

§ 4. - Il problema della deformazione nella geometria conforme.

8. - Due reti O dello spazio S_4 sono *in applicabilità conforme* se ammettono lo stesso elemento lineare conforme, senza che siano equivalenti nel gruppo; in tali condizioni il passaggio dall'una all'altra rete dicesi una *deformazione conforme*.

Se manteniamo le notazioni superiori per la rete O assegnata, e le medesime notazioni munite di un accento per una sua deformata, le condizioni del problema (*necessarie e sufficienti*) sono

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\Phi'}{\sqrt{g'}} = \cos \alpha \frac{\Phi}{\sqrt{g}} - \sin \alpha \frac{\Psi}{\sqrt{g}} \\ \frac{\Psi'}{\sqrt{g'}} = \sin \alpha \frac{\Phi}{\sqrt{g}} + \cos \alpha \frac{\Psi}{\sqrt{g}}; \end{cases}$$

ne risultano allora due differenti tipi di deformazione:

1°) $\alpha = \text{cost}$; la nuova rete O ammette (a meno di sostituzione ortogonale a coefficienti costanti) gli stessi invarianti ω_1 ed ω_2 ; perciò le due reti differi-

(?) La determinazione di i , data che sia la rete, è perfettamente individuata; per esempio se la relazione (A) è

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

la determinazione di i è quella per cui è soddisfatta la relazione

$$\omega_1 \sum_{r=1}^4 x_r x_{1r} + \omega_2 \sum_{r=1}^4 x_r x_{2r} = 0.$$

scono per il solo invariante J ; in questo caso la deformazione dicesi di prima specie.

2°) α = funzione di u e v ; i nuovi invarianti ω_1', ω_2' si deducono da ω_1, ω_2 per sostituzione ortogonale a coefficienti funzioni; la deformazione dicesi di seconda specie.

Si ha poi un terzo tipo di deformazione, e si presenta quando la forma differenziale (25) è anche elemento lineare conforme di una superficie dello spazio a tre dimensioni; quantunque la rete O di partenza non appartenga ad uno spazio inferiore, nondimeno vi appartiene la sua deformata.

Il problema si comporta diversamente di quanto avviene nello spazio ordinario, giacchè in quest'ultimo esistono soltanto deformazioni di prima specie.

In analogia al teorema di THOMSEN dello spazio ordinario (che porge sotto altro punto di vista la trasformazione C_m , da me data nel 1903) dimostriamo qui che: *Le uniche reti O , che ammettono deformazioni di prima specie sono le reti O isoterme; le dette deformazioni di prima specie dipendono da una costante arbitraria.*

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che se $\theta, \omega_1, \omega_2, J$ è una soluzione delle (22) e (23), le funzioni $\theta, \omega_1', \omega_2', J$, in cui

$$\begin{aligned}\omega_1' &= \omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha \\ \omega_2' &= \omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha\end{aligned}\quad (\alpha = \text{cost})$$

danno ancora una soluzione che non cambia la rete O se non per trasformazione conforme; la deformazione esige perciò che le (23) siano soddisfatte dalle stesse $\theta, \omega_1, \omega_2$ e da due differenti valori di J .

Ed allora, se J_1 è il nuovo valore di J si dovrà avere:

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{J_1 - J}{\theta^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} (J_1 - J) = 0,$$

e per l'integrabilità di questo sistema risulta l'equazione

$$\frac{\partial^2 \log \theta}{\partial u \partial v} = 0.$$

Se ricordiamo il significato di θ , dati dalla prima delle (19), concludiamo che il rapporto $\frac{h}{l}$ è il quoziente di una funzione della sola u e di una funzione della sola v ; la superficie è dunque isoterma, come si era affermato.

Se poi detta condizione è soddisfatta, potremo porre $\theta=1$ e le (27) danno

$$(28) \quad \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial u \partial v}$$

$$(29) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (\omega_1^2 + \omega_2^2); \end{cases}$$

donde eliminando J , si perviene al sistema

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0, \end{cases}$$

che *caratterizza* gl'invarianti ω_1 ed ω_2 delle superficie isoterme.

Dalla forma delle (29) risulta frattanto che per la superficie deformata si avrà

$$J_1 = J + m \quad (m = \text{cost-arbitraria})$$

epperò la deformazione di prima specie coincide con la *trasformazione* C_m delle superficie isoterme data la prima volta da me nel 1903 nella memoria: *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo].

§ 5. - Le reti O a curvatura geodetica costante.

9. - Un caso di particolare interesse si presenta colla considerazione delle reti O a curvatura geodetica costante.

Mantenendo le notazioni superiori, sia k la *prima curvatura* della linea v , e siano a_1, a_2, a_3, a_4 i *coseni direttori della prima normale* a questa linea ⁽⁹⁾. Si avrà

$$ka_r = \frac{\partial \xi_r}{\partial s_v},$$

e per le (3) potremo scrivere

$$(31) \quad ka_r = -\frac{1}{h} (a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + p \eta_r).$$

La curvatura geodetica della linea v si ottiene moltiplicando k per il coseno dell'angolo che la prima normale considerata fa colla tangente alla linea u ; frattanto per la detta curvatura si ha il valore:

$$k \sum a_r \eta_r = -\frac{p}{h} = -\frac{1}{lh} \frac{\partial h}{\partial v}.$$

Le linee v saranno a curvatura geodetica costante imponendo la condizione

$$(32) \quad \frac{1}{hl} \frac{\partial h}{\partial v} = V$$

in cui V è funzione della sola v ; similmente le linee u saranno a curvatura geodetica costante imponendo la condizione

$$(33) \quad \frac{1}{hl} \frac{\partial l}{\partial u} = U$$

essendo U funzione della sola u .

Ne risulta

$$V \frac{\partial l}{\partial u} = U \frac{\partial h}{\partial v}$$

⁽⁹⁾ GUICHARD: *Les courbes de l'espace à n dimensions*. Mémorial des sciences mathématiques; Fascicule XXIX (1928).

ossia

$$\frac{\partial(Vl)}{\partial u} = \frac{\partial(Uh)}{\partial v},$$

epperò esiste una funzione Φ tale che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = Uh, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = Vl.$$

Sostituendo nella (32) e (33) si ottiene per Φ l'unica equazione

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

che s'integra senza difficoltà, e si trova

$$\Phi = -\log [\alpha(u) + \beta(v)].$$

Frattanto l'elemento lineare della rete è

$$ds^2 = \frac{1}{[\alpha(u) + \beta(v)]^2} \left[\frac{\alpha'^2(u)}{U^2} du^2 + \frac{\beta'^2(v)}{V^2} dv^2 \right]$$

e per conveniente cangiamento di parametri si può ritenere sotto la forma

$$(34) \quad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2}.$$

Inversamente una rete O di elemento lineare (34) è a curvatura geodetica costante.

Per le quantità h, l si hanno le espressioni

$$(35) \quad \frac{1}{h} = U + V, \quad \frac{1}{l} = U + V.$$

10. - Dimostriamo anzitutto che *le operazioni del gruppo conforme trasformano una rete O a curvatura geodetica costante in un'altra tale rete.*

Infatti la seconda delle (29) si può scrivere

$$(36) \quad \frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{1}{h} \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u\partial v}$$

e per le (26) risulta

$$(37) \quad \omega_1 = U_1 + V_1;$$

d'altra parte per una nuova rete (necessariamente isoterma) equivalente alla data per trasformazioni conformi, si dovrà avere

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \left(\frac{1}{h'} \right) = \frac{1}{h'} \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u\partial v}$$

e per la (37)

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \left(\frac{1}{h'} \right) = 0$$

ed è stabilita la proposizione.

11. - Ed ora veniamo alla formazione dell'elemento lineare conforme di una tale rete.

Per la prima delle (30) si ha pure

$$\omega_2 = U_2 + V_2$$

e dovendo essere soddisfatta anche la seconda di queste si dovrà avere

$$U_1' V_1' + U_2' V_2' = 0,$$

ossia

$$U_2' = c U_1', \quad V_2' = -\frac{1}{c} V_1' \quad (c = \text{cost})$$

donde

$$U_2 = c U_1 + c_1, \quad V_2 = -\frac{1}{c} V_1 + c_2.$$

Osserviamo ancora che se α è una costante, le funzioni ω_1 ed ω_2 sono sostituibili con

$$(38) \quad \begin{cases} \omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha, \\ \omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha; \end{cases}$$

e prendendo

$$c \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

le espressioni (38) si riducono rispettivamente a funzione della sola u e funzione della sola v . Si conclude che, senza ledere la generalità, si può assumere

$$\omega_1 = U_1, \quad \omega_2 = V_1,$$

e l'elemento lineare conforme ha la forma

$$(39) \quad \frac{\Phi^2 + \Psi^2}{g} = (U_1^2 + V_1^2) \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du^2 + dv^2}.$$

12. - *Una rete O a curvatura geodetica costante ammette infinite deformate di seconda specie (anch'esse a curvatura geodetica costante), e tali deformate dipendono da una costante arbitraria* ⁽¹⁰⁾.

Infatti volendo deformare la rete a curvatura geodetica costante in un'altra tale rete, avremo per i nuovi invarianti $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ espressione della forma

$$\bar{\omega}_1 = \bar{U}_1, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{V}_1;$$

ma per l'applicabilità occorre e basta che sia

$$\bar{U}_1^2 + \bar{V}_1^2 = U_1^2 + V_1^2$$

epperò

$$\bar{U}_1^2 = U_1^2 + c, \quad \bar{V}_1^2 = V_1^2 - c \quad (c = \text{cost}).$$

Se nessuna delle funzioni U_1, V_1 si riduce ad una costante, le quantità $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ non sono deducibili per combinazione lineare a coefficienti costanti di ω_1, ω_2 ; *la deformazione è perciò di seconda specie.*

13. - Dimostriamo infine che *una rete O a curvatura geodetica costante ammette infinite deformate metriche, dipendenti da tre costanti arbitrarie.*

Per dimostrare questo teorema occorre integrare il sistema (4) nel caso in esame.

⁽¹⁰⁾ S'intende che ogni deformata di seconda specie ammette (come rete isoterma) ∞^1 deformate di prima specie; per il che la rete in discorso ammette ∞^2 deformate nella classe.

Avendosi

$$h = \frac{1}{U+V}, \quad l = \frac{1}{U+V}$$

si deduce

$$p = -\frac{V'}{U+V}, \quad q = -\frac{U'}{U+V}.$$

D'altra parte avendosi

$$b_1 - a_1 = U_1, \quad b_2 - a_2 = V_1$$

si ricava

$$\frac{\partial b_1}{\partial v} = p b_1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial u} = q a_2,$$

ed integrando si trova:

$$b_1 = \frac{U_2}{U+V}, \quad a_2 = \frac{V_2}{U+V}.$$

Abbiamo così il sistema di funzioni

$$(40) \quad \begin{cases} h = \frac{1}{U+V}, & l = \frac{1}{U+V} \\ a_1 = \frac{U_2}{U+V} - U_1, & b_1 = \frac{U_2}{U+V} \\ a_2 = \frac{V_2}{U+V}, & b_2 = \frac{V_2}{U+V} + V_1 \end{cases}$$

che soddisfano tutte le (4), prendendo

$$(41) \quad \begin{cases} U_2' = U_1 U', & V_2' = -V_1 V' \\ U'^2 + V'^2 + U_2^2 + V_2^2 + (U+V)[V_1 V_2 - V'' - U_1 U_2 - U''] = 0. \end{cases}$$

Da queste si ricava

$$(42) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} U_2^2 &= cU^2 + 2c'U + c'' - U'^2 \\ V_2^2 &= -cV^2 + 2c'V - c'' - V'^2 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} U_1 U_2 &= cU + c' - U'' \\ V_1 V_2 &= cV - c' + V'' \end{aligned} \right. \end{cases}$$

in cui c, c', c'' sono costanti arbitrarie, e la proposizione è dimostrata.

§ 6. - Reti O (dell' S_4) a curvatura geodetica costante suscettibili di deformazione conforme in una rete O dello spazio a tre dimensioni.

14. - Si è visto [formola (39)] che l'elemento lineare conforme di una rete O dell' S_4 a curvatura geodetica costante ha la forma:

$$(43) \quad (U+V) \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du^2 + dv^2},$$

essendo U funzione della sola u e V funzione della sola v . Qui vogliamo segnalare i casi in cui questo elemento lineare spetta anche ad una rete O dello spazio a tre dimensioni.

Per lo scopo osserviamo che per una superficie isoterma dello spazio S_3 , riferita alle sue linee di curvatura, l'elemento lineare conforme è

$$(44) \quad \omega^2 \cdot \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du^2 + dv^2},$$

in cui ω è una soluzione dell'equazione di quarto ordine (CALAPSO e ROTHE)

$$(45) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2 (\omega^2)}{\partial u \partial v} = 0;$$

il problema è così ridotto a trovare U e V in guisa che la (45) sia soddisfatta per

$$(46) \quad \omega = \sqrt{U + V}.$$

15. - Da questa si ha

$$-\frac{4}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \frac{U' V'}{(U + V)^2}$$

ed esprimendo che la (45) è soddisfatta perveniamo all'equazione

$$(47) \quad \frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} - 6 \frac{U'' + V''}{U + V} + 6 \frac{U'^2 + V'^2}{(U + V)^2} = 0 \quad (44).$$

Osserviamo che ponendo

$$(48) \quad \bar{U} = \frac{\alpha U + \beta}{\gamma U + \delta}, \quad \bar{V} = \frac{\alpha V - \beta}{-\gamma V + \delta}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cost arbitrarie)

si trova:

$$\frac{\bar{U}' \bar{V}'}{(\bar{U} + \bar{V})^2} = \frac{U' V'}{(U + V)^2}$$

epperò le funzioni \bar{U} e \bar{V} soddisfaranno ancora la (47).

16. - Ciò premesso consideriamo le funzioni

$$(49) \quad \Psi = (U + V)^r, \quad \Psi_1 = (U + V)^{r-1},$$

da cui

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = r U' (U + V)^{r-1}, & \frac{\partial \Psi}{\partial v} = r V' (U + V)^{r-1}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} = r(r-1) U' V' (U + V)^{r-2} \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} = (r-1) U' (U + V)^{r-2}, & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} = (r-1) V' (U + V)^{r-2}, \\ \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial u \partial v} = (r-1)(r-2) U' V' (U + V)^{r-3} \end{cases}$$

e poniamo

$$(52) \quad \Phi = (U'' + V'') \Psi - (U'^2 + V'^2) \Psi_1;$$

si ha:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = U''' \Psi + (U'' + V'') \frac{\partial \Psi}{\partial u} - 2U' U'' \Psi_1 - (U'^2 + V'^2) \frac{\partial \Psi_1}{\partial u}.$$

(44) Tralasciamo di discutere la soluzione ovvia in cui una delle funzioni U, V si riduce ad una costante.

Se ora deriviamo questa rispetto a v , osservando le (50) e (51) troviamo

$$\frac{1}{U'V'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = (U+V)^{r-1} \left[r \left(\frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} \right) + (r-1)(r-2) \frac{U''+V''}{U+V} + \right. \\ \left. - (r-1)(r-2) \frac{U'^2+V'^2}{(U+V)^2} \right]$$

e ponendo $r = -2$ sarà [in forza della (47)]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = 0$$

donde

$$6\Phi = U_1 + V_1.$$

Se ora ricordiamo il significato di Φ dato dalla (52) e dalle (49), avremo

$$6 \frac{U''+V''}{(U+V)^2} - 6 \frac{U'^2+V'^2}{(U+V)^3} = U_1 + V_1$$

che combinata colla (47) dà

$$(53) \quad \frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} = (U+V)(U_1 + V_1)$$

ossia

$$(54) \quad \frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} - UU_1 - VV_1 = UV_1 + U_1V.$$

Da qui esprimendo che la derivata mista del secondo membro è nulla troviamo

$$U'V_1' + U_1'V' = 0$$

epperò

$$U_1' = 3cU', \quad V_1' = -3cV' \quad (c = \text{cost})$$

dopo di che la (54) dà le equazioni separate

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{U'''}{U'} = 3cU^2 + 2c'U + c'' \\ \frac{V'''}{V'} = -3cV^2 + 2c'V - c'' \end{cases}$$

Di queste si trova l'integrale primo

$$(56) \quad \begin{cases} U'' = cU^3 + c'U^2 + c''U + c''' \\ V'' = -cV^3 + c'V^2 - c''V + c''' \end{cases}$$

e sostituendo nella (47) si trovano per U'^2 e V'^2 le espressioni

$$(57) \quad \begin{cases} 6U'^2 = 3cU^4 + 4c'U^3 + 6c''U^2 + 6(c''' + c''''')U + 6c^{(V)} \\ 6V'^2 = -3cV^4 + 4c'V^3 - 6c''V^2 + 6(c''' + c''''')V - 6c^{(V)}. \end{cases}$$

Queste, disponendo della sostituzione lineare (48), si riducono alla forma

$$\begin{cases} U'^2 = (1-U^2)(1-k^2U^2) \\ V'^2 = -(1-V^2)(1-k^2V^2) \end{cases} \quad (k = \text{cost}).$$

Frattanto l'equazione (47) s'integra [a meno della sostituzione lineare (48)] colle funzioni ellittiche di JACOBI

$$U = snu, \quad V = \frac{1}{dnv}$$

in cui snu e dnv sono rispettivamente costruite con moduli complementari.

