ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

OSKAR PERRON

Ein Satz über Jacobi-Ketten zweiter Ordnung

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 2 (1935), p. 133-138
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_133_0>

EIN SATZ ÜBER JACOBI-KETTEN ZWEITER ORDNUNG

Von OSKAR PERRON (München).

§ 1. - Einleitung und Resultat der Arbeit.

Über Jacobi-Ketten zweiter Ordnung sind in den letzten Jahren einige Untersuchungen angestellt worden [1]. Während Herr DAUS, dem meine Arbeiten über den Gegenstand [2] unbekannt geblieben waren, die Theorie ab ovo entwickelt, ohne sie wesentlich zu fördern, beweist Herr VÄISÄLÄ ein neues weittragendes Konvergenzkriterium.

Die Arbeiten von Herrn COLEMAN sind lediglich der Beantwortung einer Frage gewidmet, die ich in der Arbeit A noch unentschieden lassen musste, wobei es ihm aber entgangen ist, dass in meiner Arbeit C die Frage gelöst ist, und zwar, wie ich glaube, durch eine einfachere Beweisführung als die des Herrn COLEMAN.

Es sei mir gestattet meinen damaligen Beweis in modifizierter Form hier zu wiederholen, wobei ich das Resultat gleich zu folgendem Satz erweitern kann:

---

(1) P. H. DAUS: *Normal ternary continued fraction expansions for the cube roots of integers*. American Journ. of Math., 44 (1922).

P. H. DAUS: *Normal ternary continued fraction expansions for cubic irrationalities.* American Journ. of Math., 51 (1929).

K. VÄISÄLÄ: *Zur Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus zweiter Ordnung.* Lindelöf-Festschrift, Helsinki 1929.

J. B. COLEMAN: *A test for the type of irrationality represented by a periodic ternary continued fraction.* American Journ. of Math., 52 (1930).

J. B. COLEMAN: *The Jacobian algorithm for periodic continued fractions as defining a cubic irrationality.* American Journ. of Math., 55 (1933).

(2) *A. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus* Math. Annalen, 64 (1906).

B. Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen. Sitzungsber. d. Bayer. Akad., Math.-phys. Klasse 1907.

C. Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes. Sitzungsber. d. Bayer. Akad., Math.-phys. Klasse 1908.

D. Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II. Ebenda 1920.

E. Ein neues Konvergenzkriterium für Jacobi-Ketten zweiter Ordnung. Archiv d. Math. und Phys. 3. Reihe, Bd. 17 (1911).

THEOREM. - *Wenn die Elemente der Jacobi-Kette zweiter Ordnung*

$$\begin{bmatrix} a_0, & a_1, & a_2,\ldots \\ b_0, & b_1, & b_2,\ldots \\ c_0, & c_1, & c_2,\ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} \beta_0 \\ \gamma_0 \end{cases}$$

ganze rationale Zahlen sind und den Ungleichungen

$$c_\nu \geqq a_\nu \geqq 1, \qquad c_\nu \geqq a_\nu + b_\nu - 1, \qquad b_\nu \geqq a_\nu - 1$$

genügen, so ist die Kette konvergent und ihr Wertesystem β_0, γ_0 *ist linear unabhängig, d. h. es besteht keine Relation der Form*

$$Pa_0 + Q\beta_0 + R\gamma_0 = 0$$

mit ganzen rationalen P, Q, R, die nicht sämtlich verschwinden.

Die Arbeit C enthält diesen Satz für $a_\nu = 1$.

§ 2. - Beweis der Konvergenz.

Unter Konvergenz und Wertesystem der Jacobi-Kette ist in Übereinstimmung mit meinen früheren Arbeiten folgendes verstanden: Definiert man die Zahlenfolgen A_ν, B_ν, C_ν durch die Rekursionsformeln

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} A_{\nu+3} = a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} + c_\nu A_{\nu+2}, \\ B_{\nu+3} = a_\nu B_\nu + b_\nu B_{\nu+1} + c_\nu B_{\nu+2}, \\ C_{\nu+3} = a_\nu C_\nu + b_\nu C_{\nu+1} + c_\nu C_{\nu+2} \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit den Anfangswerten

$$\text{(2)} \qquad \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so existieren die Grenzwerte

$$\text{(3)} \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = \frac{\beta_0}{a_0}, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{C_\nu}{A_\nu} = \frac{\gamma_0}{a_0}.$$

Die Konvergenz kann zwar unter den Bedingungen des Theorems aus einer der Arbeiten A, E sofort durch Spezialisierung entnommen werden. Doch will ich hier einen neuen und einfacheren Beweis mitteilen. Für $\nu \geqq 3$ ist offenbar $A_{\nu+1} \geqq A_\nu > 0$. Setzt man daher

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{a_\nu A_\nu}{a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} + c_\nu A_{\nu+2}} = r_\nu, \qquad \dfrac{b_\nu A_{\nu+1}}{a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} + c_\nu A_{\nu+2}} = s_\nu, \\ \dfrac{c_\nu A_{\nu+2}}{a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} + c_\nu A_{\nu+2}} = t_\nu, \end{cases}$$

so dass

$$\text{(5)} \qquad r_\nu \geqq 0, \qquad s_\nu \geqq 0, \qquad t_\nu \geqq 0, \qquad r_\nu + s_\nu + t_\nu = 1$$

ist, so ist für $\nu \geqq 3$ gewiss $t_\nu \geqq r_\nu > 0$, $t_\nu \geqq s_\nu$, also

$$r_\nu \leqq t_\nu, \qquad r_\nu \leqq \frac{1}{2}, \qquad r_\nu + s_\nu \leqq \frac{2}{3}. \tag{6}$$

Ferner folgt aus (1)

$$\frac{B_{\nu+3}}{A_{\nu+3}} = r_\nu \frac{B_\nu}{A_\nu} + s_\nu \frac{B_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} + t_\nu \frac{B_{\nu+2}}{A_{\nu+2}}, \tag{7}$$

$$\frac{C_{\nu+3}}{A_{\nu+3}} = r_\nu \frac{C_\nu}{A_\nu} + s_\nu \frac{C_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} + t_\nu \frac{C_{\nu+2}}{A_{\nu+2}}. \tag{8}$$

Aus (7) ergibt sich:

$$\frac{B_{\nu+3}}{A_{\nu+3}} - \frac{B_{\nu+2}}{A_{\nu+2}} = r_\nu \left(\frac{B_\nu}{A_\nu} - \frac{B_{\nu+2}}{A_{\nu+2}}\right) + s_\nu \left(\frac{B_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} - \frac{B_{\nu+2}}{A_{\nu+2}}\right),$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\frac{B_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} - \frac{B_\nu}{A_\nu} = \Phi_\nu \tag{9}$$

gesetzt wird,

$$\Phi_{\nu+2} = -r_\nu \Phi_\nu - (r_\nu + s_\nu)\Phi_{\nu+1}. \tag{10}$$

Setzt man weiter

$$\text{Max}\,(|\Phi_\nu|, |\Phi_{\nu+1}|) = \Omega_\nu, \tag{11}$$

so folgt aus (10) mit Rücksicht auf (6) und (5)

$$\Omega_{\nu+1} \leqq t_\nu \Omega_\nu + (r_\nu + s_\nu)\Omega_\nu = \Omega_\nu. \tag{12}$$

Wenn nun Φ_ν und $\Phi_{\nu+1}$ einmal nicht gleiches Vorzeichen haben, so folgt aus (10) und (6) weiter

$$|\Phi_{\nu+2}| \leqq \frac{2}{3}\Omega_\nu \leqq \frac{5}{6}\Omega_\nu,$$

und aus (10), wenn man ν durch $\nu+1$ ersetzt,

$$|\Phi_{\nu+3}| \leqq r_{\nu+1}|\Phi_{\nu+1}| + (1 - t_{\nu+1})|\Phi_{\nu+2}| \leqq r_{\nu+1}\Omega_\nu + (1 - r_{\nu+1})\frac{2}{3}\Omega_\nu =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{r_{\nu+1}}{3}\right)\Omega_\nu \leqq \frac{5}{6}\Omega_\nu.$$

Daher ist auch

$$\Omega_{\nu+2} \leqq \frac{5}{6}\Omega_\nu.$$

Wenn dagegen Φ_ν und $\Phi_{\nu+1}$ gleiches Vorzeichen haben, so hat nach (10) gewiss $\Phi_{\nu+2}$ das andere Vorzeichen, und es ergibt sich entsprechend

$$\Omega_{\nu+3} \leqq \frac{5}{6}\Omega_{\nu+1}.$$

Mit Rücksicht auf (12) ist daher in beiden Fällen

$$\Omega_{\nu+3} \leqq \frac{5}{6}\Omega_\nu.$$

Hiernach ist Ω_ν und folglich auch Φ_ν das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe. Nach der in Formel (9) gegebenen Definition von Φ_ν besagt das aber, dass der erste der Grenzwerte (3) existiert. Genau so ergibt sich die Existenz des zweiten, womit die Konvergenz der Jacobi-Kette bewiesen ist.

§ 3. - Beweis der linearen Unabhängigkeit.

Da für jedes ν die Elemente der Kette

$$\begin{bmatrix} a_\nu, & a_{\nu+1}, & a_{\nu+2},\dots \\ b_\nu, & b_{\nu+1}, & b_{\nu+2},\dots \\ c_\nu, & c_{\nu+1}, & c_{\nu+2},\dots \end{bmatrix} \tag{13}$$

die Bedingungen des Theorems erfüllen, ist sie ebenfalls konvergent. Nach den grundlegenden Formeln ([3]) für Jacobi-Ketten ist dann

$$\beta_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}, \qquad \gamma_\nu = c_\nu + \frac{\beta_{\nu+1}}{\gamma_{\nu+1}}, \tag{14}$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{a_\nu B_\nu + \beta_\nu B_{\nu+1} + \gamma_\nu B_{\nu+2}}{a_\nu A_\nu + \beta_\nu A_{\nu+1} + \gamma_\nu A_{\nu+2}}, \qquad \frac{\gamma_0}{\alpha_0} = \frac{a_\nu C_\nu + \beta_\nu C_{\nu+1} + \gamma_\nu C_{\nu+2}}{a_\nu A_\nu + \beta_\nu A_{\nu+1} + \gamma_\nu A_{\nu+2}}. \tag{15}$$

Da nach unseren Voraussetzungen $a_\nu > 0$, $b_\nu \geqq 0$, $c_\nu > 0$ ist, so ist offenbar auch

$$\beta_\nu > b_\nu \geqq 0, \qquad \gamma_\nu > c_\nu \geqq a_\nu > 0, \qquad \beta_\nu < b_\nu + 1. \tag{16}$$

Setzt man

$$\alpha_0 B_\nu - \beta_0 A_\nu = H_\nu, \qquad \alpha_0 C_\nu - \gamma_0 A_\nu = Z_\nu, \tag{17}$$

so folgt aus (15)

$$a_\nu H_\nu + \beta_\nu H_{\nu+1} + \gamma_\nu H_{\nu+2} = 0, \qquad a_\nu Z_\nu + \beta_\nu Z_{\nu+1} + \gamma_\nu Z_{\nu+2} = 0. \tag{18}$$

Ersetzt man hier ν durch $\nu+1$ und eliminiert dann $H_{\nu+2}$ bzw. $Z_{\nu+2}$, so erhält man

$$H_{\nu+3} = \varphi_\nu H_\nu + \psi_\nu H_{\nu+1}, \qquad Z_{\nu+3} = \varphi_\nu Z_\nu + \psi_\nu Z_{\nu+1}, \tag{19}$$

$$\varphi_\nu = \frac{a_\nu \beta_{\nu+1}}{\gamma_\nu \gamma_{\nu+1}}, \qquad \psi_\nu = \frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1} - \gamma_\nu a_{\nu+1}}{\gamma_\nu \gamma_{\nu+1}}. \tag{20}$$

Nach (14) ist aber

$$\gamma_\nu \gamma_{\nu+1} = c_\nu \gamma_{\nu+1} + \beta_{\nu+1},$$
$$\beta_\nu \beta_{\nu+1} - \gamma_\nu a_{\nu+1} = b_\nu \beta_{\nu+1} - c_\nu a_{\nu+1}.$$

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen des Theorems und der Ungleichungen (16) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\varphi_\nu + \psi_\nu &= \frac{a_\nu \beta_{\nu+1} + b_\nu \beta_{\nu+1} - c_\nu a_{\nu+1}}{c_\nu \gamma_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}} \leqq \frac{(1+c_\nu)\beta_{\nu+1} - c_\nu a_{\nu+1}}{c_\nu \gamma_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}} = \frac{\beta_{\nu+1} + c_\nu(\beta_{\nu+1} - a_{\nu+1})}{\beta_{\nu+1} + c_\nu \gamma_{\nu+1}} \\ &< \frac{\beta_{\nu+1} + c_\nu(b_{\nu+1} + 1 - a_{\nu+1})}{\beta_{\nu+1} + c_\nu \gamma_{\nu+1}} \leqq \frac{\beta_{\nu+1} + c_\nu b_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} + c_\nu c_{\nu+1}} \leqq 1,\end{aligned}$$

([3]) Siehe in der Arbeit *B* die Formeln (12) und (15).

und auch

$$\varphi_\nu - \psi_\nu = \frac{a_\nu \beta_{\nu+1} + c_\nu \alpha_{\nu+1} - b_\nu \beta_{\nu+1}}{c_\nu \gamma_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}} \leqq \frac{\beta_{\nu+1} + c_\nu \alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} + c_\nu \gamma_{\nu+1}} < 1.$$

Zusammenfassend erhält man daher die Ungleichung

$$|\varphi_\nu| + |\psi_\nu| < 1. \tag{21}$$

Wenn nun eine Relation

$$P\alpha_0 + Q\beta_0 + R\gamma_0 = 0$$

mit ganzen rationalen P, Q, R besteht, so ergibt sich durch Multiplikation mit A_ν unter Berücksichtigung von (17):

$$P\alpha_0 A_\nu + Q(\alpha_0 B_\nu - H_\nu) + R(\alpha_0 C_\nu - Z_\nu) = 0.$$

Setzt man daher

$$PA_\nu + QB_\nu + RC_\nu = G_\nu, \tag{22}$$

so ist auch

$$\alpha_0 G_\nu = QH_\nu + RZ_\nu,$$

und aus (19) ergibt sich

$$G_{\nu+3} = \varphi_\nu G_\nu + \psi_\nu G_{\nu+1}.$$

Mit Rücksicht auf (21) folgt hieraus:

$$\text{Max}\,(|G_{\nu+3}|, |G_{\nu+4}|, |G_{\nu+5}|) \leqq \text{Max}\,(|G_\nu|, |G_{\nu+1}|, |G_{\nu+2}|),$$

und zwar Gleichheit nur, wenn beide Seiten null sind.
Da aber die G_ν nach (22) ganze Zahlen sind, müssen sie von einem gewissen ν-Wert an verschwinden. Hiernach ist

$$\begin{aligned} PA_\nu + QB_\nu + RC_\nu &= 0, \\ PA_{\nu+1} + QB_{\nu+1} + RC_{\nu+1} &= 0, \\ PA_{\nu+2} + QB_{\nu+2} + RC_{\nu+2} &= 0, \end{aligned}$$

und da die Determinante dieses Systems gleich $a_0 a_1 \dots a_{\nu-1} \neq 0$ ist ([4]), muss $P = Q = R = 0$ sein. Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

§ 4. - Periodizität.

Ist die Jacobi-Kette periodisch, d. h. gibt es eine positive Zahl k derart, dass von einem gewissen ν-Wert an stets

$$a_{\nu+k} = a_\nu, \qquad b_{\nu+k} = b_\nu, \qquad c_{\nu+k} = c_\nu,$$

([4]) Siehe die Arbeit B, Formel (3).

so gehört das Wertesystem β_0, γ_0 einem algebraischen Körper an, der durch eine kubische Gleichung bestimmt ist (5). Ob diese irreduzibel ist, war die spezielle Frage des Herrn COLEMAN (im Fall $a_\nu=1$). Wäre sie reduzibel, so wären β_0, γ_0 rational oder Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers, was mit der linearen Unabhängigkeit im Widerspruch steht; die Gleichung ist also irreduzibel.

---

(5) Vergl. die Arbeit A, in der allerdings $a_\nu=1$ ist; doch verläuft die Rechnung auch im allgemeinen Fall genau so.