

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

TULLIO VIOLA

**Sull'insieme dei punti di convergenza delle serie
trigonometriche generali**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 2
(1935), p. 155-162

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_155_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL'INSIEME DEI PUNTI DI CONVERGENZA DELLE SERIE TRIGONOMETRICHE GENERALI

di TULLIO VIOLA (Torino).

1. - È ben noto che, se per una serie trigonometrica

$$\sum_n (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$$

le condizioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

non sono verificate, l'insieme A dei punti x tali che $0 \leq x < 1$ nei quali la serie converge ha misura nulla ⁽¹⁾.

Il termine generale $a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x$ può scriversi nella forma

$$\varrho_n \cos 2\pi n(x - a_n),$$

con $\varrho_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $a_n = \varrho_n \cos 2\pi n a_n$, $b_n = \varrho_n \sin 2\pi n a_n$, e l'ipotesi può enunciarsi dicendo che ϱ_n non tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

L'insieme A è contenuto nell'insieme E dei punti x dell'intervallo $\overline{01}$ nei quali è

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varrho_n |\cos 2\pi n(x - a_n)| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varrho_n.$$

Senza introdurre ipotesi particolari, le proprietà di quest'insieme sono state studiate da diversi autori, principalmente da A. RAJCHMANN e da N. BARY.

Il presente lavoro si propone di portare un modesto contributo allo studio degli insiemi A dei punti di convergenza delle serie trigonometriche i cui coefficienti non tendono a zero. Tali insiemi A verranno qui studiati sotto ipotesi particolari, seguendo sostanzialmente il metodo usato dal prof. G. RICCI nella sua memoria dal titolo *Sulla convergenza assoluta delle serie trigonometriche* ⁽²⁾,

⁽¹⁾ H. LEBESGUE: *Sur les séries trigonométriques* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. XX, 1903, pp. 453-485), e *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 110.

⁽²⁾ Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. I, fasc. IV, 1932, p. 399.

metodo che consiste nell'applicazione della considerazione che si trova al principio della p. 27 delle *Serie trigonometriche* del prof. L. TONELLI.

Oltre al prof. L. TONELLI stesso, anche i professori B. LEVI e A. DENJOY mi hanno incoraggiato in questo lavoro ed aiutato a semplificare alcune dimostrazioni. Colgo l'occasione per ringraziarli tutti cordialmente.

I.

2. - Torna qui opportuna un'osservazione molto semplice avente carattere generale. La serie

$$\sum_n (a_n \sin 2\pi n x - b_n \cos 2\pi n x),$$

coniugata della serie data, converge anch'essa, in $\overline{01}$, in un insieme B avente misura nulla. È ben noto che, se si pone $c_n = a_n - i b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), le due serie trigonometriche sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria della serie di potenze $\sum_n c_n z^n$ sulla circonferenza $|z|=1$. D'altra

parte il raggio di convergenza è ≤ 1 . Essendo $|c_n| = \rho_n$, questa serie non converge in nessun punto della detta circonferenza. Non è dunque possibile che le due serie trigonometriche convergano in uno stesso punto: *gl'insiemi A, B sono completamente estranei l'uno all'altro*. Così per esempio la serie di seni $\sum_n \sin 2\pi H^n x$ (H intero dispari qualunque > 1) che converge per tutti i

valori razionali della forma $x = \frac{p}{2H^n}$ e che non converge (n.° 4) per nessun altro valore della x , ha per coniugata la serie di coseni $-\sum_n \cos 2\pi H^n x$ che converge

per tutti i valori razionali della forma $x = \frac{2p+1}{4H^n}$ (evidentemente distinti dai precedenti) e che non converge per nessun altro valore della x . La serie $\sum_n \sin 2^t \pi n x$

(t numero intero positivo qualunque) che converge per tutti i valori razionali della forma $x = \frac{p}{2^t}$ e che non converge (n.° 4, osservazione 3^a) per nessun altro valore della x , ha per coniugata la serie $-\sum_n \cos 2^t \pi n x$ che non converge per nessun

valore della x , nè razionale, nè irrazionale. Infatti, se $x = \frac{p}{q}$ fosse un punto razionale di convergenza, si avrebbe, per n sufficientemente elevato, $2^t n \frac{p}{q} = \frac{2k_n + 1}{2}$, essendo k_n un intero crescente con n , dunque la frazione $\frac{2^{t+1} n p}{q}$ dovrebbe essere un numero intero dispari *qualunque sia n* purchè sufficientemente elevato, cosa evidentemente impossibile. Si dimostrerà al n.° 4 che la serie $-\sum_n \cos 2^t \pi n x$ non può convergere per nessun valore irrazionale della x .

Per cominciare a studiare le nostre serie trigonometriche sotto ipotesi particolari, osserviamo che l'ipotesi fondamentale che i coefficienti ρ_n non tendano a zero, equivale a supporre l'esistenza d'un numero positivo ξ tale che sia $\rho_n \geq \xi$,

per un'infinità di valori di n . Siano n_r ($r=1, 2, 3, \dots$), disposti in ordine crescente, questi valori di n . Consideriamo la *serie trigonometrica lacunare*.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r}),$$

nella quale tutti i coefficienti sono $=1$. Se, per un certo valore di x in $\overline{01}$, si dimostrerà che la condizione

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r}) = 0$$

non è verificata, si avrà pure dimostrato che non convergono nè la serie lacunare $\sum_r \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})$ nè la serie trigonometrica data $\sum_n q_n \cos 2\pi n(x - a_n)$.

Nei due esempi precedenti si ha rispettivamente $n_r = H^r$, $n_r = 2^{r-1}$.

3. - Uno dei risultati ai quali giungeremo è che la numerabilità o la non numerabilità dell'insieme A dipendono dalla *rapidità di crescita* della successione $\{n_r\}$. La rapidità di crescita può essere definita in modi diversi, dicendo che una successione $\{a_r\}$ *crece più rapidamente* d'un'altra $\{\beta_r\}$ se, per r sufficientemente elevato, si ha $a_r > \beta_r$ (*crecenza per differenza*), oppure $\frac{a_{r+1}}{a_r} > \frac{\beta_{r+1}}{\beta_r}$ (*crecenza per rapporto*).

La crecenza per differenza non presenta interesse in queste ricerche, cosa ben facilmente prevedibile quando si cominci a studiare una serie lacunare di forma semplice, per esempio *la serie di seni* $\sum_r \sin 2\pi n_r x$, per i valori **razionali** di x . Si può infatti mostrare che una tale serie lacunare *non può convergere in un'infinità di punti razionali, se esistono infinite differenze* $n_{r+1} - n_r$ *limitate nel loro insieme* ⁽³⁾.

Sia infatti $x = \frac{p}{q}$ frazione irriducibile. È $|\sin 2\pi n_r x| < \sin \frac{\pi}{q}$ sempre e solo se $\sin 2\pi n_r x = 0$, cioè se n_r è multiplo di $\frac{q}{2}$. Affinchè la serie $\sum_r \sin 2\pi n_r x$ sia convergente è dunque necessario che, per r sufficientemente elevato, *tutti* gli n_r , e quindi *tutte* le differenze $n_{r+1} - n_r$ siano multiple di $\frac{q}{2}$. Ciò non può aver luogo che per un numero finito di valori di q . Si può dare una dimostrazione analoga per le serie di coseni.

Si può anzi dimostrare che, *assegnate ad arbitrio una serie lacunare di seni della forma* $\sum_r \sin 2\pi n_r x$ *ed una successione* $\{U_r\}$ *soddisfacente alla condizione* $\lim_{r \rightarrow \infty} (U_{r+1} - U_r) = \infty$, *è sempre possibile di costruirne un'altra*

⁽³⁾ Un teorema più generale di questo sarà dimostrato al n.º 4.

$\sum_r \text{sen } 2\pi N_r x$ che converga per gli stessi valori razionali di x e tale che la successione $\{N_r\}$ cresca meno rapidamente (per differenza) della successione $\{U_r\}$.

È evidente che la successione $\{U_r\}$ cresce *più rapidamente* di ogni successione della forma $\{Hr\}$, essendo H un numero positivo qualunque.

Sia r_1 il più piccolo intero positivo tale che sia $U_{r_1} > n_1 r_1$ e $U_{r+1} - U_r \geq n_1$, per ogni $r \geq r_1$. Poniamo $N_r = r$ per ogni $r < r_1$ ed $N_{r_1} = n_1 r_1$. Poi, per $r = r_1 + 1, r_1 + 2, r_1 + 3, \dots$, poniamo $N_r = N_{r-1} + n_1$ e fermiamoci al più piccolo valore r_2 di r tale che $N_{r_2-1} + n_1$ sia multiplo di n_2 e che si abbia $U_{r+1} - U_r \geq n_2$ per ogni $r \geq r_2$. Per $r = r_2 + 1, r_2 + 2, r_2 + 3, \dots$, poniamo $N_r = N_{r-1} + n_2$ e fermiamoci al più piccolo valore r_3 di r tale che $N_{r_3-1} + n_2$ sia multiplo di n_3 e che si abbia $U_{r+1} - U_r \geq n_3$ per ogni $r \geq r_3$. Continuiamo così indefinitamente.

È evidente che la successione $\{N_r\}$ così formata cresce più lentamente della successione $\{U_r\}$. Mostriamo di più che la serie $\sum_r \text{sen } 2\pi N_r x$ converge per gli stessi valori razionali $x = \frac{p}{q}$ (frazione irriducibile) per i quali converge la serie $\sum_r \text{sen } 2\pi n_r x$. Basta osservare che, preso ad arbitrio un valore \bar{r} di r , gl'interi N_r diventano, per r sufficientemente elevato, multipli di qualche n_s con $s > \bar{r}$. Dunque, se gl'interi n_r diventano multipli di $\frac{q}{2}$ per r sufficientemente elevato, anche gl'interi N_r lo diventano. Inversamente, dato un intero n_r , esistono sempre degl'indici s (tanto più elevati quanto più lo è r) tali che $N_{s+1} - N_s = n_r$. Dunque, se gl'interi N_s ($s = 1, 2, 3, \dots$) diventano multipli di $\frac{q}{2}$ per s sufficientemente elevato, anche le differenze $N_{s+1} - N_s$, cioè gl'interi n_r , lo diventano.

Per esempio se si pone $n_r = r!$, si ha la serie $\sum_r \text{sen } 2\pi r! x$, già considerata da RIEMANN⁽⁴⁾, come serie assegnata, e noi sappiamo costruire una serie $\sum_r \text{sen } 2\pi N_r x$ che converge per tutti i valori razionali di x ⁽⁵⁾, e tale che la successione $\{N_r\}$ cresce più lentamente di una successione $\{U_r\}$ arbitrariamente prefissata (con la condizione $\lim_{r \rightarrow \infty} (U_{r+1} - U_r) = \infty$).

È notevole il fatto che una serie lacunare di seni della forma $\sum_r \text{sen } 2\pi n_r x$

⁽⁴⁾ B. RIEMANN: *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (Oeuvres Mathématiques de B. Riemann; traduites par L. L. Laugel (1898); pp. 225-270 e in particolare, p. 270).

⁽⁵⁾ La serie $\sum_r \text{sen } 2\pi r! x$ converge anche per certi valori irrazionali di x . Cfr. A.

GENOCCHI: *Intorno ad alcune serie* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. X, 1874-1875, pp. 985-1016).

può non convergere per nessun valore razionale di x in $\overline{01}$ (fatta eccezione per i valori $x=0, \frac{1}{2}$ per i quali ogni serie di seni è convergente), comunque rapidamente cresca la successione $\{n_r\}$. Ciò infatti ha luogo se la successione $\{n_r\}$ contiene infiniti numeri primi.

II.

4. - In quanto segue si tenga sempre ben presente l'ipotesi fondamentale $\varrho_{n_r} > \xi > 0$ per ogni r .

Se esistono infiniti valori di r per i quali le differenze $n_{r+1} - n_r$ sono limitate nel loro insieme, l'insieme A è finito ⁽⁶⁾.

Se esistono infiniti valori di r per i quali le differenze $n_{r+1} - n_r$ sono limitate nel loro insieme, ne esistono anche infiniti per i quali queste differenze hanno un valore costante D . Siano

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

tali valori di r . Osserviamo anche che, se esiste un $x=x_0$ per cui la serie data $\sum_n \varrho_n \cos 2\pi n(x-a_n)$ è convergente, si può sempre supporre, con una traslazione, $x_0=0$. Scrivendo dunque la serie lacunare corrispondente sotto la forma

$$\sum_r \cos (2\pi n_r x - \beta_r)$$

con $\beta_r = 2\pi n_r a_{n_r}$, è possibile disporre dell'indeterminazione dei numeri a_{n_r} in modo che, per r sufficientemente elevato, β_r sia tanto vicino a $\frac{\pi}{2}$ quanto si vuole. Possiamo dunque ammettere che, assegnato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, esista un indice ϱ_1 tale che sia $\left| \frac{\pi}{2} - \beta_r \right| < \varepsilon$ per ogni $r > \varrho_1$.

Ora, se per un valore di $x=x_1 \neq 0$ anche la serie $\sum_n \varrho_n \cos 2\pi n(x-a_n)$ è convergente, le differenze $2\pi n_r x_1 - \beta_r$, per r sufficientemente elevato, devono essere vicine quanto si vuole a un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$. Esiste dunque un indice ϱ_2 tale che sia $\left| k_r \pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi n_r x_1 + \beta_r \right| < \varepsilon$ per ogni $r > \varrho_2$ (k_r essendo un intero dipendente da r). Allora si ha $|k_r \pi - 2\pi n_r x_1| < 2\varepsilon$ per $r > \max(\varrho_1, \varrho_2)$, e parimenti $|k_{r+1} \pi - 2\pi n_{r+1} x_1| < 2\varepsilon$.

Nella relazione

$$2\pi n_{r+1} x_1 = 2\pi n_r x_1 + 2\pi(n_{r+1} - n_r)x_1,$$

l'ultimo termine, per ogni $r=r_i$, ha un valore fisso, cioè $2\pi D x_1$. Dunque questo termine dev'essere uguale, a meno di 4ε , a un multiplo di π . Ma ε è arbitrario e perciò $x_1 = \frac{p}{2D}$, p essendo un intero $< 2D$.

⁽⁶⁾ Cfr. G. RICCI, loc. cit., p. 403.

Osservazioni:

1°) I punti dell'insieme A , se esistono, distano, l'uno dall'altro, per un multiplo di $\frac{1}{2D}$: essi sono al più in numero di $2D$.

2°) Se, nella serie lacunare $\sum_r \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})$, esistono infinite differenze $n_{r+1} - n_r$ uguali a un intero D , infinite uguali a un altro intero D' , infinite a un altro D'' , ..., infinite a un ultimo $D^{(i)}$, la serie lacunare e la serie data $\sum_n \rho_n \cos 2\pi n(x - a_n)$ convergono al più in $2\mathfrak{D}$ punti, \mathfrak{D} essendo il massimo comun divisore di detti interi. Questi punti distano, l'uno dall'altro, per un multiplo di $\frac{1}{2\mathfrak{D}}$. Per esempio la serie $\sum_r \sin 2\pi n_r x$, con $n_r = \frac{r}{2}(h+k)$ se r è pari, $n_r = n_{r-1} + h$ se r è dispari, h e k essendo due numeri primi fra loro, non converge per nessun valore di x , nè razionale nè irrazionale, fatta naturalmente eccezione dei valori $x=0, \frac{1}{2}$.

3°) Si può dedurre, dal teorema dimostrato, una proposizione già contenuta nel mio lavoro dal titolo: *Sur les ensembles dénombrables avec application aux séries trigonométriques*, lavoro pubblicato nel vol. LXII, fasc. I-II del Bulletin de la Société Mathématique de France. La stessa tesi è colà dimostrata sotto un'ipotesi molto più restrittiva, cioè dell'esistenza, per la successione $\{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\}$, di due numeri positivi ξ, ε e di un'infinità di valori di r per cui il numero d'indici $n \leq r$ tali che $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \xi$ sia $\geq \varepsilon r$. Può esprimersi questo fatto dicendo che *la frequenza superiore (non sinistra) della successione $\{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\}$ in ξ è $\geq \varepsilon$.*

Si vede facilmente che da questa ipotesi si può dedurre l'altra:

a). Esistono infinite coppie d'indici n_1, n_2 tali che

$$0 < n_2 - n_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \sqrt{a_{n_1}^2 + b_{n_1}^2} \geq \xi, \quad \sqrt{a_{n_2}^2 + b_{n_2}^2} \geq \xi,$$

e che essa, a sua volta, è una conseguenza dell'ipotesi:

b). La successione d'interi positivi n tali che $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \xi$, non cresce (per differenza) più rapidamente della successione

$$\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}, \frac{3}{\varepsilon}, \dots \quad (\text{vedi il n.}^\circ 3).$$

5. - In fondo l'idea direttrice della dimostrazione del teorema del numero precedente è quello di esaminare le proprietà dell'insieme dei punti x per i quali il termine generale della serie tende a zero.

Cerchiamo di approfondire questo problema. Assegnati ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$ e un intero $s > 0$, indichiamo con $E(\varepsilon, s)$ l'insieme dei punti x in $\overline{01}$ per i quali si ha

$$|\cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})| \leq \varepsilon,$$

per ogni $r \geq s$. Quest'insieme è chiuso e non denso ed è evidentemente contenuto in ogni insieme $E(\varepsilon, s')$ con $s' > s$. L'insieme $E(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} E(\varepsilon, s)$ è della prima categoria. $E(\varepsilon)$ contiene $E(\varepsilon')$, qualunque sia $\varepsilon' < \varepsilon$. L'insieme $E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(\varepsilon)$ contiene A .

Se, per ogni r , si ha $\frac{n_{r+1}}{n_r} < d'$ un certo numero fisso $H > 1$, l'insieme A è numerabile.

Poniamo $\varepsilon = \text{sen} \frac{\pi}{2(H+1)}$. Scelto ad arbitrio un valore s di r , comunque elevato, i valori di x in $\overline{01}$ tali che $|\cos 2\pi n_s(x - a_{n_s})| \leq \varepsilon$ formano $2n_s$ (o $2n_s + 1$) segmenti (intervalli chiusi) I_s uguali (fatta al più eccezione del primo e dell'ultimo) ed equidistanti l'un dall'altro. Ciascuno di tali segmenti è lungo $\frac{1}{2(H+1)n_s}$ e si trova dagli altri segmenti a una distanza uguale ad $\frac{H}{2(H+1)n_s}$. I valori di x in $\overline{01}$ tali che $|\cos 2\pi n_{s+1}(x - a_{n_{s+1}})| \leq \varepsilon$ formano a loro volta $2n_{s+1}$ (o $2n_{s+1} + 1$) segmenti I_{s+1} . Essendo $\frac{H}{2(H+1)n_{s+1}} > \frac{1}{2(H+1)n_s}$ ciascuno dei segmenti I_s contiene al più un segmento I_{s+1} .

Si ragiona così successivamente per i valori $s+2, s+3, \dots$ di r . Se ne conclude che l'insieme $E(\varepsilon, s)$ è finito, che l'insieme $E(\varepsilon)$ è (al più) numerabile, dunque che anche gl'insiemi E, A sono numerabili.

Per esempio la serie $\sum_r \text{sen } 2\pi H^r x$, con H intero qualunque > 1 , converge per tutti i valori razionali di x della forma $x = \frac{p}{2H^s}$. Essa non converge per nessun altro valore di x : lo si dimostra molto facilmente osservando che, nella dimostrazione data, i centri dei segmenti I_s sono, in questo caso, i punti

$$0, \frac{1}{2H^s}, \frac{2}{2H^s}, \frac{3}{2H^s}, \dots, 1 - \frac{1}{2H^s}, 1,$$

e che $2H^s + 1$ segmenti I_{s+1} sono concentrici agli I_s . Si vede dunque che $E(\varepsilon, s)$ è precisamente formato di questi $2H^s + 1$ punti. Si ha poi $E(\varepsilon) = E(\varepsilon') = E$ per ogni $\varepsilon' < \varepsilon$.

Sarebbe interessante conoscere la struttura dell'insieme A nell'ipotesi che la successione dei rapporti $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ tenda all'infinito. Ma quali limitazioni possono imporsi alla rapidità di crescita di questa successione, perchè si possa affermare che A si mantiene numerabile? Una risposta a tale questione è contenuta nella proposizione del n.º seguente.

6. - Se una serie trigonometrica lacunare

$$\sum_r \varrho_{n_r} \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})$$

soddisfa alle condizioni seguenti:

1°) la serie $\sum_r \frac{n_r}{n_{r+1}}$ converge;

2°) i coefficienti ϱ_{n_r} sono limitati nel loro insieme;

allora la serie trigonometrica converge assolutamente (almeno) su un insieme C della prima categoria, ovunque denso ed avente la potenza del continuo in ognuna delle sue parti.

Si può supporre, per semplificare, che si abbia $\varrho_{n_r} \leq 1$ qualunque sia r . Allora, per r sufficientemente elevato, i punti di $\overline{01}$ per i quali è $|\cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})| \leq \sin 2\pi \frac{n_r}{n_{r+1}}$ formano $2n_r$ (o $2n_r + 1$) segmenti, ciascuno dei quali ha lunghezza $= \frac{2}{n_{r+1}}$ (fatta al più eccezione del primo e dell'ultimo). Ciascuno di tali segmenti deve contenere interamente *almeno tre* segmenti nei quali si ha pure $|\cos 2\pi n_{r+1}(x - a_{n_{r+1}})| \leq \sin 2\pi \frac{n_{r+1}}{n_{r+2}}$. Ciò vale per ogni r , purchè sufficientemente elevato. Dunque, per s sufficientemente elevato, l'insieme C_s dei punti di $\overline{01}$ nei quali è $|\cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})| \leq \sin 2\pi \frac{n_r}{n_{r+1}}$, per ogni $r \geq s$, è perfetto e non denso. La serie

$$\sum_r \varrho_{n_r} \cos 2\pi n_r(x - a_{n_r})$$

converge su questo insieme persino uniformemente (il suo resto d'ordine s è maggiorato dalla serie $2\pi \sum_{r=s}^{\infty} \frac{n_r}{n_{r+1}}$): la sua somma è una funzione continua. L'insieme $C = \sum_{s=1}^{\infty} C_s$ soddisfa alle condizioni enunciate. C. d. d.

Si vede che alla prima condizione dell'enunciato si può sostituire quest'altra, cioè che si abbia, per r sufficientemente elevato,

$$\frac{n_r}{n_{r+1}} \leq \frac{1}{2\pi} \arcsin U_r,$$

$\sum_r U_r$ essendo una serie convergente a termini positivi ed $\arcsin U_r$ essendo compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.