ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SZOLEM MANDELBROJT

Quasi-analycité des séries de Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 3 (1935), p. 225-229

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_3_225_0>

QUASI-ANALYCITÉ DES SÉRIES DE FOURIER

par Szolem Mandelbrojt (Clermond-Ferrand).

1. - Nous traitons dans ce travail le problème suivant:

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut imposer aux nombres $A_1, A_2, \ldots$ pour que toute fonction $f(x)$, indéfiniment dérivable et définie par la série

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

soit identiquement nulle, dès que les conditions suivantes aient lieu:

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$
$$|a_n|<A_n, \qquad |b_n|<A_n.$$

Voici deux théorèmes qui fournissent une réponse a cette question.

I. - *Si la fonction continue et dérivable* $p(t)$ $(t \geqslant 0)$ *est telle que* $tp'(t)$ *tend vers l'infini en croissant avec* t, *et telle que l'intégrale*

$$\int_1^\infty \frac{p(t)}{t^2}\,dt \tag{1}$$

converge; alors on peut former une fonction périodique, de période 2π, *paire, indéfiniment dérivable, non identiquement nulle, vérifiant les conditions*

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

et, enfin, telle qu'en posant

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

on ait

$$|a_n|<e^{-p(n)}, \qquad |b_n|<e^{-p(n)} \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

II. - *Si, par contre, la fonction* $f(x)$ *verifie les conditions*

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

et est développable en série de Fourier:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

les coefficients a_n *et* b_n *vérifiant les inégalités*

$$|a_n|<e^{-p(n)},\qquad |b_n|<e^{-p(n)}\qquad (n=0,1,2,....),\tag{3}$$

où $p(t)$ $(t\geqslant 0)$ *est une fonction continue, derivable, telle que* $tp'(t)$ *croit vers l'infini avec* t, *et telle que l'intégrale*

$$\int_1^{\infty}\frac{p(t)}{t^2}\,dt\tag{4}$$

diverge; alors la fonction $f(x)$ *est identiquement nulle.*

Le théorème II a été démontré par M. DE LA VALLÉE POUSSIN [1] (pour les séries de cosinus) avec des conditions plus restrictives pour la fonction $p(t)$.

M. S. BERNSTEIN [2] a démontré un théorème analogue au théorème II. Il a notamment remplacé la condition (4) par le fait qu'il existe une fonction entière $F(z)$, paire, de genre un et à coefficients positifs, et telle que la série

$$\sum|a_n|\,F(n)$$

converge.

Le théorème de M. BERNSTEIN est aussi plus restrictif que le notre.

L'intérêt de nos conditions nous semble consister en ce fait que les théorèmes I et II fournisement des conditions nécessaires et suffisantes pour que les conditions (2) et (3) puissent être réalisées sans que $f(x)$ soit identiquement nulle, du moins lorsqu'on suppose a priori que $tp'(t)$ tend vers l'infini en croissant vers l'infini avec t.

La méthode que nous employons nous semble nouvelle.

2. - Les remarques que nous allons faire serviront aussi bien pour la demonstration du théorème I, que pour celle du théorème II.

$p(t)$ étant une fonction telle que $tp'(t)$ tend ver l'infini en croissant avec t, désignons par $N(t)$ la partie entière de $tp'(t)$; on a par conséquent

$$tp'(t)=N(t)+\alpha(t),\qquad 0\leqslant\alpha(t)<1\,;$$

et pour $r\geqslant 1$, on a

$$p(1)+\int_1^r\frac{N(t)}{t}\,dt\leqslant p(r)<\int_1^r\frac{N(t)}{t}\,dt+\int_1^r\frac{dt}{t}+p(1)=\int_1^r\frac{N(t)}{t}\,dt+\log r+p(1)\,;\tag{5}$$

---

[1] Société Math. de France, 1924, p. 148.

[2] *Leçons sur les propriétés extremales,* Collection de M. BOREL, Paris, 1926.

on sait d'autre part, qu'on peut former une fonction entière $\Phi(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ à coefficients positifs, et telle, qu'en posant

(6) $$m(r)=\max_{n\geqslant 1} c_n r^n,$$

on ait

(6bis) $$\log m(r)=\int_{1}^{r}\frac{N(t)}{t}\,dt \quad (^3).$$

L'inégalité (5) permet donc d'écrire:

(7) $$\log\left[e^{p(1)}m(r)\right]<p(r)<\log\left[e^{p(1)}rm(r)\right].$$

3. - Passons maintenant à la démonstration du théorème I.

En posant
$$T(r)=\max_{n\geqslant 1} e^{p(1)}c_{n-1}r^n=e^{p(1)}rm(r),$$
on a, en vertu des inégalités (7):

(8) $$e^{p(r)}<T(r).$$

Il résulte aussi de ces mêmes inégalités et de la convergence de l'intégrale (1), que l'intégrale
$$\int_{1}^{\infty}\frac{\log T(r)}{r^2}\,dr=p(1)\int_{1}^{\infty}\frac{dr}{r^2}+\int_{1}^{\infty}\frac{\log r}{r^2}\,dr+\int_{1}^{\infty}\frac{\log m(r)}{r^2}\,dr$$
converge.

En posant alors $m_n=\dfrac{1}{e^{p(1)}c_{n-1}}$, on peut former, en vertu de la théorie des fonctions quasi-analytiques, une fonction $f(x)$, non identiquement nulle, indéfiniment derivable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, et verifiant les conditions suivantes:

(9) $$f^{(n)}(0)=f^{(n)}(2\pi)=0.$$

(10) $$|f^{(n)}(x)|<\frac{m_n}{2} \qquad (n=0, 1, 2,....;\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$
$$f(x)=f(2\pi-x) \quad (^4).$$

Cette fonction prolongée périodiquement, avec la periode 2π, est paire, et l'on peut poser:
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

---

(3) Ceci résulte des considérations de M. VALIRON: *Lectures on the general Theory of Integral Functions,* Toulouse, 1923, p. 34.

(4) Voir CARLEMAN: *Les fonctions quasi-analytiques,* Collection de M. BOREL, 1926. — OSTROWKI: Acta Mathematica, t. 53, 1930, p. 181. — MANDELBROJT: Journal de l'École Polytecnique, 1934 (2e s., n. 32) p. 237.

En tenant compte de (9), on a, par p intégrations par parties:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \pm\frac{1}{\pi n^p}\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)\,\frac{\cos nx}{\sin nx}\,dx\,;$$

et les inégalités (10) donnet immédiatement pour tout entier positif n:

$$|a_n| < \frac{m_p}{n^p} \qquad (p=1, 2, \ldots),$$

ce qui permet d'écrire:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\max\limits_{p\geqslant 1}\frac{n^p}{m_p}} = \frac{1}{T(n)}\,;$$

en tenant, enfin, compte de (8) on a

$$|a_n| < e^{-p(n)} \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Le premier théorème est ainsi démontré.

4. - Passons maintenant à la démonstration du théorème II.

Il résulte des inégalites (3) et (5), et en tenant compte de (6^{bis}):

$$|a_n| < e^{-p(n)} \leqslant e^{-\int_1^n \frac{N(t)}{t}dt}\, e^{-p(1)} = \frac{L}{m(n)}\,; \qquad |b_n| < \frac{L}{m(n)},$$

où L est une constante positive.

Quel que soit l'entier positif p, l'égalité (6) nous permet alors d'écrire:

$$|a_n| < \frac{L}{c_p n^p}, \qquad |b_n| < \frac{L}{c_p n^p}. \tag{11}$$

Comme, quel que soit l'entier positif k, on a:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left\{\pm a_n \frac{\sin nx}{\cos nx} \pm b_n \frac{\cos nx}{\sin nx}\right\},$$

on a:

$$|f^{(k)}(x)| < \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)n^k,$$

et en vertu des inégalités (11), où l'on pose $p=k+2$, on a:

$$|f^{(k)}(x)| < 2L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{c_{k+2}n^{k+2}} = \frac{2L}{c_{k+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{M}{c_{k+2}},$$

où M est une constante.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2)dx_2\,;$$

on a évidemment, en vertu des égalités (2) et des inégalités que nous venons d'établir:

$$\varphi^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0,1,....;\ m_n=\frac{1}{c_n}\text{ lorsque } n\geqslant 3,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$
$$|\varphi^{(n)}(x)|<Mm_n$$

Or de la divergence de l'intégrale (4) résulte celle de

$$\int_1^\infty \frac{\log m(r)}{r^2}\,dr\,;$$

et comme pour r assez grand:

$$m(r)=\max_{n\geqslant 3} c_n r^n=\max_{n\geqslant 3}\frac{r^n}{m_n}=\max_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{m_n},$$

on voit, toujours d'après la théorie des fonctions quasi-analytiques, que la fonction $\varphi(x)$ est identiquement nulle; et notre théorème est ainsi démontré.

5. - On voit ainsi, que si l'on peut poser

$$A=e^{-p(n)}$$

où $p(t)$ est dérivable, $tp'(t)$ tendant vers l'infini en croissant avec t, la condition nécessaire et suffisante pour que des inégalités (3) et des égalités (2) résulte que la fonction $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ est identiquement nulle s'exprime par la divergence de l'intégrale (4) [5].

M. CARLEMAN [6] a donné d'autres conditions nécessaires et suffisantes portant sur les A_n et concernant les séries de cosinus. Ces conditions s'expriment par la possibilité du problème des moments, et sont profondément différentes des nôtres. Remarquons toutefois que du fait seul, que les conditions de M. CARLEMAN sont, comme celles que nous venons de donner, nécessaires et suffisantes, résulte que les conditions de M. CARLEMAN et les notres sont vérifiées simultanement, du moins lorsqu'on suppose que $A_n=e^{-p(n)}$, $p(t)$ étant une fonction telle que $tp'(t)$ tend vers l'infini en croissant.

---

[5] On peut évidemment s'arranger à ce que la fonction $f(x)$, non identiquement nulle, correspondant au théorème I, soit composée uniquement de sinus (on n'exige plus alors que $f(x)$ soit paire!). En partant de $f(x)$ de l'énoncé du théorème I où $p(t)$ est remplacé par $2p(t)$ on a: $f'(x)=-\sum a_n n\sin nx=\sum b_n\sin nx$, avec $|b_n|<ne^{-2p(n)}<Ae^{-p(n)}$; on a alors $\varphi(x)=\frac{f'(x)}{A}=\sum c_n\sin nx$, avec $|c_n|<e^{-p(n)}$ les c_n n'étant pas tous nuls, et $\varphi^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,....)$. On peut donc aussi former une fonction dont la série de FOURIER est composée nécessairement de sinus et de cosinus et correspondant au théorème I.

[6] Voir CARLEMAN, loc. cit., p. 92.