ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BÉLA V. SZ. NAGY

Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 211-224

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_211_0>

BEDINGUNGEN FÜR DIE MULTIPLIKATIONSTABELLE EINES IN SICH ABGESCHLOSSENEN ORTHOGONALEN FUNKTIONEN-SYSTEMS

von BÉLA V. SZ. NAGY in Szeged.

Einleitung.

Es sei $\mathfrak{M}$ ein endliches oder unendliches Intervall auf der s-Achse und es sei auf $\mathfrak{M}$ ein LEBESGUE-STIELTJESsches Maß- und Integralbegriff durch eine monoton wachsende Funktion $\alpha(s)$ erzeugt.

Wir nehmen an, daß die auf $\mathfrak{M}$ definierten endlich, oder unendlich vielen komplexwertigen Funktionen $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$,.... ein inbezug auf diesen Integralbegriff in sich abgeschlossenes System $\{\psi_p(s)\}$ bilden. Darunter verstehen wir, daß jede Funktion $\psi_p(s)$ beschränkt und meßbar ist, daß ihr Absolutwertquadrat integrierbar ist und daß die Produkte

$$\psi_p(s)\psi_q(s), \qquad \psi_p(s)\overline{\psi_q(s)} \qquad\qquad (p, q=1, 2, 3,....)$$

zu jener abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ gehören, welche durch die Funktionen des Systems $\{\psi_p(s)\}$ aufgespannt wird.

Man kann leicht einsehen, daß dann mit zwei zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Funktionen $h_1(s)$ und $h_2(s)$ auch ihr Produkt zu $\mathfrak{L}$ gehört, vorausgesetzt, daß mindestens eine von ihnen beschränkt ist ([1]). Die Gesamtheit $\mathfrak{L}^*$ der zu $\mathfrak{L}$ gehörigen beschränkten Funktionen enthält also mit irgend zwei Funktionen auch das Produkt derselben. $\mathfrak{L}^*$ ist offenbar eine in $\mathfrak{L}$ überall dichte Linearmannigfaltigkeit und enthält alle Funktionen $\psi_p(s)$, $\psi_p(s)\psi_q(s)$, $\psi_p(s)\overline{\psi_q(s)}$ $(p, q=1, 2, 3,....)$.

Nehmen wir außerdem an, daß das Funktionensystem $\{\psi_p(s)\}$ (normiert) orthogonal ist, also daß die Gleichungen

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\overline{\psi_q(s)}\,d\alpha(s)=\delta_{pq} \qquad\qquad (p, q=1, 2, 3,....)$$

gelten.

Da die folgenden Operationen: Addition und Multiplikation der Funktionen

---

([1]) Vgl. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA: *Izomorf függvényrendszerekről*, Matematikai és Természettudományi Értesitő, **54** (1936), S. 712-734, insbesondere S. 730. Dort wird dies nur für reellwertige Funktionen bewiesen, für komplexwertige geht der Beweis analog.

miteinander, sowie Multiplikation mit einer komplexen Zahl nicht über $\mathfrak{L}^*$ hinausführen und da ferner jede Funktion aus $\mathfrak{L}^*$ eindeutig in eine im Mittel gegen sie konvergente Reihe

$$\sum_p a_p \psi_p(s)$$

entwickelbar ist, so kann man $\mathfrak{L}^*$ für ein hyperkomplexes System mit den Einheiten $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$,.... ansehen. Diese algebraische Interpretation erklärt die folgende Benennung: Wir nennen die kubische Matrix $\|c_{pqr}\|$, die durch die Entwicklungskoeffizienten

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,d\alpha(s) \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, ...)$$

der Produkte $\psi_p(s)\psi_q(s)$ inbezug auf das System $\{\psi_p(s)\}$ gebildet ist, die Multiplikationstabelle des Systems $\{\psi_p(s)\}$.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist diejenigen kubischen Matrizen, welche Multiplikationstabellen von in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystemen sind, durch innere Eigenschaften zu charakterisieren.

Mit diesem Problem hat sich schon A. HAAR beschäftigt. Er beschränkte sich aber auf den Spezialfall, wo auch die Funktion 1 zu $\mathfrak{L}$ gehört, also das hyperkomplexe System $\mathfrak{L}^*$ ein Einselement besitzt. (Er hat noch vorausgesetzt, daß die Produkte

$$\overline{\psi_p(s)}\,\overline{\psi_q(s)} \qquad (p, q = 1, 2, 3, ...)$$

zu $\mathfrak{L}$ gehören, diese Voraussetzung hat er aber nicht ausgenutzt). Die Ergebnisse von HAAR lauten für diesen speziellen Fall (in etwas veränderter Ausdrucksweise), wie folgt [2]:

Eine endliche oder unendliche kubische Matrix $\|c_{pqr}\|$ ist die Multiplikationstabelle eines solchen Orthogonalsystems, wenn die quadratischen Matrizen C_p und C_p^* $(p=1, 2, 3, ...)$, definiert durch

$$(C_p)_{qr} = c_{pqr} \quad \text{und} \quad (C_p^*)_{qr} = \overline{c_{prq}} \qquad (q, r = 1, 2, 3, ...),$$

den folgenden Bedingungen genügen:

$\mathfrak{A}$) $$(C_p)_{qr} = (C_q)_{pr},$$

$\mathfrak{B}$) alle Matrizen C_p und C_p^* sind beschränkt (im HILBERTschen Sinne) und miteinander vertauschbar,

$\mathfrak{C}$) es gibt eine Folge e_1, e_2, e_3,.... von komplexen Zahlen mit

$$\sum_p |e_p|^2 < \infty,$$

---

(2) Vgl. A. HAAR: *Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme,* Annali di Pisa, **2** (1933), S. 21-40.

so daß

$$\sum_p e_p (C_p)_{qr} = \delta_{qr}$$

(für $q, r = 1, 2, 3, \ldots$) gilt.

Die Bedingung $\mathfrak{C}$) steht in wesentlicher Verbindung mit der erwähnten Voraussetzung über die Funktion 1. Die Zahlen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sind nämlich die Fourierkoeffizienten dieser Funktion inbezug auf das System $\{\psi_p(s)\}$.

Wir werden nun die allgemeinere Fragestellung untersuchen, ohne irgendwas über die Funktion 1 vorauszusetzen.

§ 1. - Notwendige Bedingungen.

Die auf $\mathfrak{M}$ definierten N, oder unendlich vielen komplexwertigen Funktionen

$$\psi_1(s), \quad \psi_2(s), \quad \psi_3(s), \ldots, \quad \psi_p(s), \ldots$$

sollen inbezug auf einen LEBESGUE-STIELTJESschen Integralbegriff ein in sich abgeschlossenes orthogonales Funktionensystem $\{\psi_p(s)\}$ bilden. Die Funktionen $\psi_p(s)$ sind also beschränkt und meßbar, ihre absoluten Beträge sind quadratisch integrierbar und es gehören endlich die Produkte

$$\psi_p(s)\psi_q(s), \qquad \psi_p(s)\overline{\psi_q(s)} \qquad\qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

zur abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ derjenigen Funktionen, welche durch Linearausdrücke der $\psi_p(s)$ im Integralmittel des Absolutwertquadrats beliebig genau approximierbar sind.

Die Multiplikationstabelle $\|c_{pqr}\|$ dieses Funktionensystems hat notwendig die folgenden Eigenschaften:

Für die aus den c_{pqr} mittels der Gleichungen

$$(C_p)_{qr} = c_{pqr}, \qquad (C_p^*)_{qr} = \overline{c_{prq}} \qquad\qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$$

gebildeten quadratischen Matrizen C_p und C_p^* ($p = 1, 2, 3, \ldots$) gelten die Bedingungen:

I). *Alle Matrizen C_p und C_q^* sind beschränkt (im Hilbertschen Sinne) und miteinander vertauschbar;*

II). *Es gilt $(C_p)_{qr} = (C_q)_{pr}$, $(C_p C_p^*)_{qr} = (C_q C_p^*)_{pr}$ für $p, q, r = 1, 2, 3, \ldots$;*

III). *Die Matrizen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sind linear unabhängig. Besteht also die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots$ von N bzw. unendlich vielen komplexen Zahlen mit endichem $\sum_p |a_p|^2$ nicht aus lauter Nullen, so können die Gleichungen*

$$\sum_p a_p (C_p)_{qr} = 0$$

nicht für beliebige q und r statthaben.

Beweis. - Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ und $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p, \ldots$ zwei Folgen von N bzw. unendlich vielen komplexen Zahlen, so daß

$$\sum_p |x_p|^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_p |y_p|^2 < \infty$$

gelten.

Die Limites im Mittel der Reihen

$$\sum_p x_p \psi_p(s) \quad \text{und} \quad \sum_p y_p \psi_p(s)$$

seien mit $f(s)$ bzw. mit $g(s)$ bezeichnet. Da mit $f(s)$ auch das Produkt $f(s)\psi_p(s)$ (für jedes p) zu $\mathfrak{L}$ gehört (vgl. a. a. O. ([1])), können wir die Parsevalsche Formel auch für diese Funktion anwenden. So gewinnen wir:

$$\sum_q (C_p)_{qr} x_q = \sum_q \int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s) \cdot \int_{\mathfrak{M}} f(s)\overline{\psi_q(s)}\,da(s) = \int_{\mathfrak{M}} f(s)\,\psi_p(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s),$$

$$\Big|\sum_r \Big(\sum_q (C_p)_{qr} x_q\Big)\bar{y}_r\Big| = \Big|\sum_r \int_{\mathfrak{M}} f(s)\,\psi_p(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s) \cdot \int_{\mathfrak{M}} \overline{g(s)}\psi_r(s)\,da(s)\Big| =$$

$$= \Big|\int_{\mathfrak{M}} f(s)\psi_p(s)\overline{g(s)}\,da(s)\Big| \leqq \operatorname{Max} |\psi_p(s)| \Big[\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^2 da(s) \cdot \int_{\mathfrak{M}} |g(s)|^2 da(s)\Big]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{Max} |\psi_p(s)| \cdot \Big(\sum_q |x_q|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_r |y_r|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Matrizen C_p und folglich auch ihre Adjungierten C_p^* sind also beschränkt.

Betrachten wir nun die Matrizenprodukte. Es gilt

$$(C_a C_b)_{qr} = \sum_k (C_a)_{qk}(C_b)_{kr} = \sum_k \int_{\mathfrak{M}} \psi_a(s)\,\psi_q(s)\overline{\psi_k(s)}\,da(s) \cdot \int \psi_b(s)\psi_k(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s) =$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} \psi_a(s)\psi_b(s)\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s),$$

woraus die Vertauschbarkeit von C_a und C_b folgt. Ebenso kann man die Gleichungen

$$(C_a C_b^*)_{qr} = \int_{\mathfrak{M}} \psi_a(s)\overline{\psi_b(s)}\,\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s) = (C_b^* C_a)_{qr}$$

und

$$(C_a^* C_b^*)_{qr} = \int_{\mathfrak{M}} \overline{\psi_a(s)}\ \overline{\psi_b(s)}\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,da(s)$$

und somit die Vertauschbarkeit von C_a und C_b^*, bzw. die von C_a^* und C_b^*

rechtfertigen. Es folgt aus diesen Gleichungen auch die Gültigkeit der Beziehungen $(C_pC_p^*)_{qr}=(C_qC_p^*)_{pr}$ für $p, q, r=1, 2, 3,\ldots$ Die Beziehung $(C_p)_{qr}=(C_q)_{pr}$ folgt unmittelbar aus der Definition.

Wir haben noch die Gültigkeit der dritten Bedingung zu beweisen. Sei x_1, x_2, $x_3,\ldots, x_p,\ldots$ eine Folge von N bzw. unendlich vielen komplexen Zahlen mit

$$\sum_p |x_p|^2=1$$

und es sei der Limes im Mittel der Reihe $\sum\limits_p x_p\psi_p(s)$ mit $f(s)$ bezeichnet. Dann ist aber

$$\sum_p x_p(C_p)_{qr}=\sum_p x_p(C_q)_{pr}=\int\limits_{\mathfrak{M}} f(s)\,\psi_q(s)\overline{\psi_r(s)}\,d\alpha(s).$$

Wäre dieser Ausdruck für jede q und r gleich 0, so wären die Produkte $f(s)\psi_1(s)$, $f(s)\psi_2(s)$, $f(s)\psi_3(s),\ldots$ auf alle Funktionen des Systems $\{\psi_p(s)\}$, also auch auf $\mathfrak{L}$ orthogonal. Da sie selbst zu $\mathfrak{L}$ gehören, müßten sie und mit ihnen auch die Funktionen $f(s)\overline{\psi_1(s)}$, $f(s)\overline{\psi_2(s)}$, $f(s)\overline{\psi_3(s)},\ldots$ alle verschwinden, was aber wegen

$$\sum_p \left|\int\limits_{\mathfrak{M}} f(s)\overline{\psi_p(s)}\,d\alpha(s)\right|^2=\sum_p |x_p|^2=1$$

unmöglich ist.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir nur solche Eigenschaften der Grundmenge $\mathfrak{M}$ bzw. des auf ihr eingeführten LEBESGUE-STIELTJESschen Maß- und Integralbegriffs ausgenutzt, welche auch im allgemeinsten Falle des auf einer *abstrakten Menge definierten Maß- und Integralbegriffs* bestehen. Die Begriffe der Abgeschlossenheit in sich und der Multiplikationstabelle sind offenbar auch in diesem abstrakten Falle erklärbar, *die notwendigen Bedingungen I-III bleiben also auch dann bestehen.*

§ 2. - Ein Hilfssatz.

Nehmen wir an, daß die aus einer gegebenen endlichen, bzw. unendlichen kubischen Matrix $\|c_{pqr}\|$ gebildeten quadratischen Matrizen C_1, C_2, $C_3,\ldots$ den Bedingungen I-III genügen. Wir werden beweisen, daß dann $\|c_{pqr}\|$ die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems ist. Die Ergebnisse der ersten Hälfte des Beweises werden wir in einem Hilfssatze zusammenstellen. (Von nun an soll die folgende Vereinbarung gelten: lateinische Indizes laufen die ersten N, bzw. alle positive ganze Zahlen hindurch, je nachdem $\|c_{pqr}\|$ N^3, bzw. unendlich viele Elemente hat.)

Die Matrix $C_pC_p^*$ ist offenbar positiv definit und Hermitesch, ihre obere

Schranke sei mit M_p bezeichnet. Es ist wohlbekannt ([3]), daß man zu gewissen auf dem Intervall $[0, M_p]$ definierten beschränkten reellwertigen Funktionen gewisse beschränkte Hermitesche Matrizen eindeutig zuordnen kann, so daß diese Zuordnung linear und multiplikativ ist und der Funktion x_p die Matrix $C_p C_p^*$ zuordnet. Eine solche zugeordnete Matrix ist mit allen mit $C_p C_p^*$ vertauschbaren Matrizen vertauschbar. Diese Zuordnung ist z. B. für alle auf $[0, M_p]$ von unten halbstetige beschränkte Funktionen und für aus solchen gebildeten Differenzen definiert. Solche Funktionen sind z. B. die folgenden:

$$f(x_p;\, n) = \begin{cases} 1, & \text{für } |x_p| > \frac{1}{n} \\ 0, & \text{für } |x_p| \leqq \frac{1}{n} \end{cases}$$

und

$$g(x_p;\, n) = \begin{cases} \dfrac{f(x_p;\, n)}{x_p^2}, & \text{für } x_p \neq 0 \\ 0, & \text{für } x_p = 0 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die zugeordneten Matrizen seien mit $f(C_p C_p^*;\, n)$ und $g(C_p C_p^*;\, n)$ bezeichnet. Es gelten dann offenbar die folgenden Matrixrelationen:

$$(f(C_p C_p^*;\, n))^2 = f(C_p C_p^*;\, n)$$

und

$$f(C_p C_p^*;\, n) = (C_p C_p^*)^2 \cdot g(C_p C_p^*;\, n).$$

Die Matrix $f(C_p C_p^*;\, n)$ ist also eine sogenannte Einzelmatrix. Wir ordnen nun die zu allen $C_p C_p^*$ und zu allen positiven ganzen Zahlen n gehörigen Einzelmatrizen $f(C_p C_p^*;\, n)$ in eine Folge

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_\nu, \ldots$$

Da die Matrizen $C_p C_p^*$ laut Bedingung I vertauschbar sind, so sind es auch die P_ν. Man kann daraus leicht erkennen, daß die Matrizen

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \ldots, \quad R_\nu, \ldots,$$

die durch die rekursiven Gleichungen

$$R_1 = P_1, \qquad R_\varkappa = P_\varkappa - P_\varkappa \cdot \sum_{\mu=1}^{\varkappa-1} R_\mu \qquad (\varkappa \geqq 2)$$

definiert sind, ebenfalls Einzelmatrizen und paarweise orthogonal sind. (Es gilt also $R_\varkappa \cdot R_\mu = 0$ für $\varkappa \neq \mu$.)

([3]) Vgl. F. Riesz: *Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes,* Acta Szeged, **5** (1930), S. 23-54., insbesondere S. 31-36.

Die Differenz

$$E-\sum_{\mu=1}^{\nu-1} R_\mu,$$

wo E die Einheitsmatrix bedeutet, ist auch eine Einzelmatrix, wir bezeichnen sie mit Q_ν. Es gelten also die Matrixrelationen ([4]):

$$R_\nu = P_\nu Q_\nu = f(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)\cdot Q_\nu = (C_{p_\nu} C^*_{p_\nu})^2 \cdot g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)\cdot Q_\nu$$

und

$$R_\nu (C_{p_\nu} C^*_{p_\nu}) g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)\cdot Q_\nu = (C_{p_\nu} C^*_{p_\nu})^3 \cdot (g(C_{p_\nu} C_{p_\nu};\, n_\nu))^2 \cdot Q^2_\nu .$$

Die rechte Seite der letzteren Gleichung ist aber gleich

$$C_{p_\nu} C^*_{p_\nu} \cdot g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)\cdot Q_\nu .$$

Es ist nämlich erstens Q_ν gleich ihrem Quadrat; die Gleichung

$$(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu})^3 \cdot (g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu))^2 = C_{p_\nu} C^*_{p_\nu} \cdot g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)$$

aber folgt daraus, dass diese Matrizen den Funktionen

$$x^3_{p_\nu}\cdot (g(x_{p_\nu};\, n_\nu))^2 \quad \text{bzw.} \quad x_{p_\nu}\cdot g(x_{p_\nu};\, n_\nu)$$

zugeordnet, und diese Funktionen offenbar einander gleich sind.

Wenn wir die Matrix $C_{p_\nu} C^*_{p_\nu} \cdot g(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)\cdot Q_\nu$ kurz mit G_ν bezeichnen, dann lauten die oben bewiesenen Matrixrelationen:

$$R_\nu = C_{p_\nu} C^*_{p_\nu} G_\nu \quad \text{und} \quad R_\nu G_\nu = G_\nu .$$

Die so gewonnenen Matrizen R_ν und G_ν sind offenbar mit jeder Matrix C_p und $C_p{}^*$ vertauschbar, da diese mit $C_{p_\nu} C^*_{p_\nu}$ vertauschbar sind.

Aus der Gleichung $R_\nu = C_{p_\nu} C^*_{p_\nu} G_\nu$ folgt mit Berücksichtigung der Bedingung II, daß

$$\begin{aligned}(R_\nu)_{qr} &= \sum_k (C_{p_\nu} C^*_{p_\nu})_{qk} (G_\nu)_{kr} = \sum_k (C_q C^*_{p_\nu})_{p_\nu k} (G_\nu)_{kr} = (C_q C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu r} = \\ &= (C^*_{p_\nu} G_\nu C_q)_{p_\nu r} = \sum_k (C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu k} (C_q)_{kr} = \sum_k (C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu k} (C_k)_{qr}\end{aligned}$$

gilt.

Aus der beiderseits mit $C^*_{p_\nu}$ multiplizierten Gleichung $R_\nu G_\nu = G_\nu$ folgt

$$\sum_q (R_\nu)_{qr} (C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu q} = (C^*_{p_\nu} G_\nu R_\nu)_{p_\nu r} = (C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu r} .$$

([4]) Wir bezeichnen mit p_ν und n_ν diejenigen Indizes, für welche $P_\nu = f(C_{p_\nu} C^*_{p_\nu};\, n_\nu)$.

Mit der Einführung der Bezeichnung

$$(C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu q} = e^{(\nu)}_q$$

nehmen die jetzt gewonnenen Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$(R_\nu)_{qr} = \sum_k e^{(\nu)}_k (C_k)_{qr}$$

und

$$\sum_q (R_\nu)_{qr} e^{(\nu)}_q = e^{(\nu)}_r.$$

Die Reihen

$$\sum_q |(C^*_{p_\nu} G_\nu)_{p_\nu q}|^2 = \sum_q |e^{(\nu)}_q|^2$$

sind wegen der Beschränktheit der Matrizen $C^*_{p_\nu} G_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) offenbar konvergent.

Wir behaupten noch, daß die Summe der Einzelmatrizen $R_1, R_2, R_3, \ldots$ gleich der Einheitsmatrix ist. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von komplexen Zahlen mit

$$\sum_p |a_p|^2 = 1,$$

so daß für jede r und ν

$$\sum_p (R_\nu)_{pr} a_p = 0$$

wäre.

Es folgte daraus für jede r und ν die Gleichung

$$\sum_p (P_\nu)_{pr} a_p = 0,$$

woraus sich für jede q und r

$$\sum_p (C_q C_q{}^*)_{pr} a_p = 0$$

oder auch

$$\sum_p (C_q)_{pr} a_p = \sum a_p (C_p)_{qr} = 0$$

ergäbe, entgegen der Bedingung III.

Wir haben also den folgenden *Hilfssatz* bewiesen:

Genügen die quadratischen Matrizen C_p und $C_p{}^*$ den Bedingungen I-III, so gibt es eine solche Folge von paarweise orthogonalen Einzelmatrizen R_1,

$R_2, R_3, \ldots, R_\nu, \ldots$ *und solche komplexen Zahlen* $e_k^{(\nu)}$, *für welche die Relationen*

a) $\sum_k |e_k^{(\nu)}|^2 < \infty$

b) $\sum_\nu (R_\nu)_{qr} = \delta_{qr}$

c) $(R_\nu)_{qr} = \sum_k e_k^{(\nu)} (C_k)_{qr}$ *und*

d) $\sum_q (R_\nu)_{qr} e_q^{(\nu)} = e_r^{(\nu)}$ *gelten.*

§ 3. - Die Bedingungen sind auch hinreichend.

Betrachten wir die Matrizen C_p, C_p^* und R_ν als Operatoren des komplexen N-dimensionalen, bzw. HILBERTschen Vektorraumes (je nachdem die Zahl ihrer Elementen gleich N^2, oder ∞ ist). Da die Absolutwertquadratsumme der im Hilfssatze auftretenden Folge $e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, e_3^{(\nu)}, \ldots$ konvergiert, so können wir $e_k^{(\nu)}$ für die k-te Komponente eines Vektors $\mathfrak{e}^{(\nu)}$ ansehen. Die k-te Komponente eines Vektors $\mathfrak{v}$ wird mit $(\mathfrak{v})_k$, das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ wird mit der üblichen Einklammerung $(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)$ bezeichnet werden.

Aus der Bedingung II und aus dem Punkte *c*) des Hilfssatzes erhält man

$$(C_p \mathfrak{e}^{(\nu)})_k = \sum_l (C_p)_{lk} e_l^{(\nu)} = \sum_l (C_l)_{pk} e_l^{(\nu)} = (R_\nu)_{pk}$$

und daraus

$$(C_p C_q \mathfrak{e}^{(\nu)})_k = \sum_l (C_p)_{lk} \cdot (C_q \mathfrak{e}^{(\nu)})_l = \sum_l (C_p)_{lk} \cdot (R_\nu)_{ql} = (R_\nu C_p)_{qk}.$$

Man bekommt so die Gleichungen

$$(1) \qquad (C_p C_q^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (C_p \mathfrak{e}^{(\nu)}, C_q \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \\ = \sum_k (R_\nu)_{pk} \overline{(R_\nu)_{qk}} = \sum_k (R_\nu)_{pk} (R_\nu)_{kq} = (R_\nu^2)_{pq} = (R_\nu)_{pq}$$

und

$$(2) \qquad (C_p C_q C_r^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (C_p C_q \mathfrak{e}^{(\nu)}, C_r \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \\ = \sum_k (R_\nu C_p)_{qk} \overline{(R_\nu)_{rk}} = \sum_k (R_\nu C_p)_{qk} (R_\nu)_{kr} = \\ = (R_\nu^2 C_p)_{qr} = (C_p R_\nu)_{qr} = \sum_k c_{pqk} (R_\nu)_{kr}.$$

Mit Berücksichtigung des Punktes *b*) des Hilfssatzes bekommt man aus (1) bzw. (2) die folgenden Beziehungen:

$$(3) \qquad \sum_\nu (C_p C_q^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \delta_{pq}$$

und

(4)
$$\sum_{\nu} (C_p C_q C_r^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = c_{pqr}.$$

Bedeute nun A eine mit jeder Matrix C_p und C_p^* vertauschbare beschränkte Hermitesche Matrix. Sie ist dann auch mit jeder Matrix R_ν vertauschbar und es gilt

$$\begin{aligned}(A^2 R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}, R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}) &= (A R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}, A R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \sum_k |(A R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)})_k|^2 = \\ &= \sum_k |(R_\nu A \mathfrak{e}^{(\nu)})_k|^2 = \sum_k \Big| \sum_l (R_\nu)_{lk} (A\mathfrak{e}^{(\nu)})_l \Big|^2 = \\ &= \sum_k \Big| \sum_l \overline{(R_\nu)_{kl}} (A\mathfrak{e}^{(\nu)})_l \Big|^2 = \sum_k \Big| \sum_l \overline{(C_k \mathfrak{e}^{(\nu)})_l} (A\mathfrak{e}^{(\nu)})_l \Big|^2 = \\ &= \sum_k |(A\mathfrak{e}^{(\nu)}, C_k \mathfrak{e}^{(\nu)})|^2 = \sum_k |(A C_k^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)})|^2.\end{aligned}$$

Da aber nach dem Punkte d) des Hilfssatzes $R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)} = \mathfrak{e}^{(\nu)}$ gilt, haben wir die Gleichung

(5)
$$(A^2 \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (A^2 R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}, R_\nu \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \sum_p |(A C_p^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)})|^2.$$

Die Hermiteschen Matrizen

$$\frac{1}{2}(C_p + C_p^*) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2i}(C_p - C_p^*) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

seien bzw. mit C_{p1} und C_{p2} bezeichnet.

Bedeute $\mathfrak{R}$ die Menge aller solchen (aus $2N$ bzw. ∞ Glieder bestehenden) reellen Zahlenfolgen

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{p1}, x_{p2}, \ldots),$$

welche den Ungleichungen

$$m_{p\varkappa} \leqq x_{p\varkappa} \leqq M_{p\varkappa} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots;\ \varkappa = 1, 2)$$

genügen. Dabei ist unter $m_{p\varkappa}$ die untere, unter $M_{p\varkappa}$ die obere Schranke von $C_{p\varkappa}$ verstanden.

Unter einem Intervall $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{R}$ wird die Menge aller solchen Folgen verstanden, welche den Bedingungen

$$x_{p\varkappa} \,\varepsilon\, i_{p\varkappa} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots;\ \varkappa = 1, 2)$$

genügen, wo $i_{p\varkappa}$ für endlich viele Indizes p je ein abgeschlossenes, halbabgeschlossenes, oder offenes Teilintervall des linearen Intervalles $[m_{p\varkappa}, M_{p\varkappa}]$, für die übrigen Indizes p aber das ganze Intervall $[m_{p\varkappa}, M_{p\varkappa}]$ bedeutet.

Ist $f(x_{p\varkappa}; i_{p\varkappa})$ die charakteristische Funktion des linearen Intervalles $i_{p\varkappa}$, so wird das Intervall $\mathfrak{I}$ die charakteristische Funktion

$$\prod_{p,\varkappa} f(x_{p\varkappa}; i_{p\varkappa})$$

besitzen.

Wir werden unendlich viele Exemplare

$$\mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{K}_2, \quad \mathfrak{K}_3, \dots, \quad \mathfrak{K}_\nu, \dots$$

von $\mathfrak{K}$ nehmen und ihre Vereinigungsmenge mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

Auf $\mathfrak{K}_\nu$ werden wir folgenderweise einen Maßbegriff einführen:

Es sei dem Intervall $\mathfrak{I}$, als Teilmenge von $\mathfrak{K}_\nu$ betrachtet, das Maß

$$(\prod_{p,\varkappa} f(C_{p\varkappa};\, i_{p\varkappa})\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (\prod_{p,\varkappa} f(C_{p\varkappa};\, i_{p\varkappa})\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \prod_{p,\varkappa} f(C_{p\varkappa};\, i_{p\varkappa})\mathfrak{e}^{(\nu)})$$

zugeschrieben.

Es ist leicht einzusehen, daß, von dieser Vereinbarung ausgehend, ein äußeres Maß auf $\mathfrak{K}_\nu$ in der üblichen Weise eingeführt werden kann; mittels dessen läßt sich dann auch ein Maß- und Integralbegriff auf $\mathfrak{K}_\nu$ definieren. Die auf den einzelnen $\mathfrak{K}_\nu$ so eingeführten Integralbegriffe induzieren dann auch auf $\mathfrak{R}$ einen Integralbegriff.

Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p, \dots$ seien auf $\mathfrak{R}$ folgenderweise definiert: In einem « Punkte » $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{p1}, x_{p2}, \dots)$ von $\mathfrak{K}_\nu$ sei φ_p gleich $x_{p1} + i \cdot x_{p2}$. Die Funktion φ_p ist offenbar beschränkt und meßbar. Das auf $\mathfrak{K}_\nu$ genommene Quadratintegral ihres absoluten Betrages ergibt sich leicht als

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{K}_\nu} |\varphi_p|^2 &= \int_{m_{p1}}^{M_{p1}} x_{p1}^2 d_{x_{p1}}(f(C_{p1};\, [m_{p1}, x_{p1}])\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + \\ &\quad + \int_{m_{p2}}^{M_{p2}} x_{p2}^2 d_{x_{p2}}(f(C_{p2};\, [m_{p2}, x_{p2}])\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \\ &= (C_{p1}^2\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + (C_{p2}^2\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (C_p C_p^*\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}).\end{aligned}$$

Aus (3) folgt dann

$$\int_{\mathfrak{R}} |\varphi_p|^2 = \sum_\nu \int_{\mathfrak{K}_\nu} |\varphi_p|^2 = \sum_\nu (C_p C_p^*\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) = 1.$$

Da also die $|\varphi_p|^2$ integrierbar sind, sind es auch die Produkte $\varphi_p\overline{\varphi}_q$ und $\varphi_p\varphi_q\overline{\varphi}_r$. Wir bekommen für ihre Integrale:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}} \varphi_p\overline{\varphi}_q &= \sum_\nu \int_{\mathfrak{K}_\nu} \varphi_p\overline{\varphi}_q = \\ &= \sum_\nu \int_{m_{p1}}^{M_{p1}} \int_{m_{q1}}^{M_{q1}} x_{p1}x_{q1} d_{x_{p1}} d_{x_{q1}}(f(C_{p1};\, [m_{p1}, x_{p1}]) \cdot f(C_{q1};\, [m_{q1}, x_{q1}])\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + \\ &+ \sum_\nu \int_{m_{p2}}^{M_{p2}} \int_{m_{q2}}^{M_{q2}} x_{p2}x_{q2} d_{x_{p2}} d_{x_{q2}}(f(C_{p2};\, [m_{p2}, x_{p2}]) \cdot f(C_{q2};\, [m_{q2}, x_{q2}])\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + i \cdot \{\dots\} = \\ &= \sum_\nu [(C_{p1}C_{q1}\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + (C_{p2}C_{q2}\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) + i(C_{p2}C_{q1}\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)}) - i(C_{p1}C_{q2}\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)})] = \\ &= \sum_\nu (C_p C_q^*\mathfrak{e}^{(\nu)},\ \mathfrak{e}^{(\nu)})\end{aligned}$$

und ebenso

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \varphi_p \varphi_q \bar{\varphi}_r = \sum_{\nu} (C_p C_q C_r^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}).$$

Vergleichend diese Ergebnisse mit (3) und (4), bekommen wir endlich die Gleichungen

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \varphi_p \bar{\varphi}_q = \delta_{pq}$$

und

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \varphi_p \varphi_q \bar{\varphi}_r = c_{pqr} \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir haben also ein solches aus beschränkten Funktionen bestehendes orthogonales Funktionensystem $\{\varphi_p\}$ gefunden, welches die Multiplikationstabelle $\| c_{pqr} \|$ besitzt. Wir werden noch beweisen können, daß $\{\varphi_p\}$ ein vollständiges System auf $\mathfrak{R}$ ist. Zu diesem Zwecke genügt es offenbar zu zeigen, daß für die charakteristische Funktion χ eines beliebigen Intervalles $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{R}_\nu$ die Parsevalsche Formel

$$(6) \qquad \int\limits_{\mathfrak{R}} |\chi|^2 = \sum_p \left| \int\limits_{\mathfrak{R}} \chi \bar{\varphi}_p \right|^2$$

gilt.

Ist $\mathfrak{I}$ durch die linearen Intervalle $i_{p\varkappa}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots; \varkappa = 1, 2)$ bestimmt, so bedeute A die Matrix

$$\prod_{p, \varkappa} f(C_{p\varkappa}; i_{p\varkappa}).$$

A ist offenbar eine mit jeder Matrix C_p und C_p^* vertauschbare Einzelmatrix, so daß wir (5) für sie anwenden können.

Das Integral von $|\chi|^2 = \chi$ auf $\mathfrak{R}$ ist gleich dem Maße von $\mathfrak{I}$, also gleich

$$(A\mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (A^2\mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}).$$

Es ist ferner leicht einzusehen, daß

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{R}} \chi \bar{\varphi}_p = \int\limits_{\mathfrak{I}} \bar{\varphi}_p = \int\limits_{m_{p1}}^{M_{p1}} x_{p1} d_{x_{p1}} (A \cdot f(C_{p1}; [m_{p1}, x_{p1}])\mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) - \\ - i \cdot \int\limits_{m_{p2}}^{M_{p2}} x_{p2} d_{x_{p2}} (A \cdot f(C_{p2}; [m_{p2}, x_{p2}])\mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = \\ = (A C_{p1} \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) - i (A C_{p2} \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)}) = (A C_p^* \mathfrak{e}^{(\nu)}, \mathfrak{e}^{(\nu)})\end{aligned}$$

gilt.

Aus (5) folgt also die behauptete Gleichung (6).

Sind also für die aus einer gegebenen kubischen Matrix $\| c_{pqr} \|$ gebildeten quadratischen Matrizen die Bedingungen I-III erfüllt, so gibt es ein aus beschränkten

Funktionen bestehendes vollständiges (also a fortiori in sich abgeschlossenes) orthogonales Funktionensystem, dessen Multiplikationstabelle gleich $\| c_{pqr} \|$ ist.

Dieses auf der abstrakten Menge $\mathfrak{K}$ definierte Funktionensystem können wir auch mit einem auf der Geraden definierten Funktionensystem $\{ \psi_p(s) \}$ ersetzen, welches inbezug auf einen LEBESGUE-STIELTJESschen Integralbegriff orthogonal und vollständig ist und ebenfalls die Multiplikationstabelle $\| c_{pqr} \|$ hat.

Zu diesem Zwecke bilden wir $\mathfrak{K}$ und das lineare Intervall $\mathfrak{T} = [0, 1]$ aufeinander ab. Diese Abbildung soll durch je ein entsprechend aufgebautes Netzwerk (5) von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}$ erzeugt werden. Bei der Zuordnung der Intervalle dieser beiden Netzwerke soll noch darauf beachtet werden, daß zu zwei Intervallen von $\mathfrak{T}$ mit einem gemeinsamen Endpunkte zwei solche Intervalle von $\mathfrak{K}$ zugeordnet seien, die eine gemeinsame « Seitenebene » besitzen. Diese entsprechenden Netzwerke erzeugen dann eine eindeutige stetige Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{K}$; dem Punkte t von $\mathfrak{T}$ wird der Punkt

$$(\vartheta_{11}(t), \vartheta_{12}(t), \vartheta_{21}(t), \ldots, \vartheta_{p1}(t), \vartheta_{p2}(t), \ldots)$$

von $\mathfrak{K}$ zugeordnet, die $\vartheta_{p\varkappa}(t)$ sind dabei in t stetig. Die Umkehrung dieser Abbildung ist auch eindeutig, mit der Ausnahme der Punkte der inneren Netzebenen von $\mathfrak{K}$, wo sie mehrdeutig sein kann. Die Funktion $g(x_{11}, x_{12}, x_{21}, \ldots)$, welche die Abbildung $\mathfrak{K} \to \mathfrak{T}$ erzeugt, ist also auf $\mathfrak{K}$ überall mit der Ausnahme von auf die inneren Netzebenen fallenden Punkten eindeutig definiert.

Wir nehmen nun nachträglich an, daß die inneren Netzebenen von $\mathfrak{K}$ so gewählt sind, daß sie nicht durch Punkte aus den Punktspektren der einzelnen $C_{p\varkappa}$ gehen. Darunter soll es verstanden werden, daß wenn $x_{p\varkappa} = \xi$ $(m_{p\varkappa} < \xi < M_{p\varkappa})$ die « Gleichung » einer inneren Netzebene ist, dann ξ kein Eigenwert von $C_{p\varkappa}$ sein darf. Dies ist ja immer erreichbar. Eine solche Ebene hat dann, als Teilmenge eines beliebigen $\mathfrak{K}$-Exemplars $\mathfrak{K}_\nu$ betrachtet, offenbar das Maß Null. Da es nur abzählbar unendlich viele innere Netzebenen in den einzelnen $\mathfrak{K}_\nu$ gibt, ist ihre Vereinigungsmenge ebenfalls vom Maße Null.

Die Funktion $g(x_{11}, x_{12}, x_{21}, \ldots)$ ist also auf $\mathfrak{K}_\nu$ fast überall eindeutig definiert, sie ist dort offenbar auch meßbar und es gilt auf $\mathfrak{K}_\nu$ fast überall die Gleichung

$$\vartheta_{p\varkappa}(g(x_{11}, x_{12}, x_{21}, \ldots)) = x_{p\varkappa}.$$

Die monoton wachsende Funktion $\alpha(s)$ sei folgenderweise auf der Halbgeraden $s \geqq 0$ definiert: Für $2(\nu-1) \leqq s < 2\nu - 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ sei $\alpha(s)$ gleich $\sum\limits_{\mu<\nu} (\mathfrak{e}^{(\mu)}, \mathfrak{e}^{(\mu)})$ (d. h. der Summe der Maße derjenigen $\mathfrak{K}_\mu$, für welche $\mu < \nu$), addiert noch dazu

(5) Für die Topologie von $\mathfrak{K}$ und für den Begriff der entsprechenden Netzwerke von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}$ siehe z. B.: B. JESSEN: *The Theory of Integration in a Space of an Infinite Number of Dimensions*, Acta Mathematica, **63** (1934), S. 249-323, sowie die dort zitierte weitere diesbezügliche Literatur.