ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Sulle serie doppie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 315-326
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_315_0>

SULLE SERIE DOPPIE DI FOURIER

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

In una Memoria « *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier* » ([1]) e (successivamente) nel mio libro « *Serie trigonometriche* » ([2]) diedi un teorema generale di convergenza (nel senso di STOLZ e PRINGSHEIM ([3])) per la serie doppia di FOURIER di una funzione di due variabili, quasi-continua ed a *variazione limitata* (secondo la definizione da me posta ([4])), dal quale ricavai numerosi criteri di convergenza che, in particolare, comprendono tutti quelli di un qualche valore pratico fino ad ora noti. Di questo teorema generale, L. CESARI ([5]) ha dato recentemente un'estensione ([6]), da cui ha poi dedotto che la serie doppia di FOURIER di una funzione quasi-continua ed a variazione limitata converge quasi dappertutto verso il valore della funzione stessa. Del medesimo teorema generale mi propongo di dare qui un'altra estensione la quale, mentre ha un enunciato molto più semplice di quella del CESARI, comprende quest'ultima come caso particolare. E la dimostrazione della nuova proposizione che così ottengo riproduce, con alcuni necessari complementi, quella già da me data, nei luoghi indicati, per il teorema che qui viene generalizzato.

Mostrerò poi come dalla mia nuova proposizione discenda facilmente il risultato del CESARI sulla convergenza (per rettangoli), quasi dappertutto, della serie doppia di FOURIER verso la funzione generatrice, supposta quasi-continua ed a variazione limitata; e pure mostrerò come sotto le medesime ipotesi, da un'osservazione che si trova nel mio libro già citato si possa immediatamente dedurre ed anche precisare un altro risultato del CESARI, quello della convergenza per righe e per colonne, quasi dappertutto, della stessa serie di FOURIER verso la funzione generatrice.

Il CESARI ha enunciato e dimostrato le proposizioni alle quali ho accennato non soltanto per le funzioni a variazione limitata, ma anche per quelle un po'

([1]) Annali di Matematica, S. IV, t. IV (1927), pp. 29-72.

([2]) Bologna, N. Zanichelli, 1928.

([3]) Questa convergenza è detta anche *ordinaria* o *per rettangoli*.

([4]) Vedi per esempio loc. cit. in ([2]), pp. 443-444.

([5]) *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonelli e sulla convergenza delle relative serie doppie di Fourier*. (Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, 1937).

([6]) Loc. cit. in ([5]), n.° 5.

più generali da Lui considerate nella Memoria: *Sulle funzioni a variazione limitata* (7) e che io ho chiamate (8) *funzioni generalmente a variazione limitata.* Anche le proposizioni ed i ragionamenti del presente lavoro saranno dati per questa categoria più generale di funzioni.

1. - Data in tutto il piano (x, y) una funzione $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, quasi-continua e generalmente a variazione limitata nel quadrato Q, del piano detto, avente per vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\pi, 2\pi)$, esiste (9) in Q un insieme E di misura superficiale nulla tale che, per ogni $\bar{x}$ ed ogni $\bar{y}$, ambedue $\geqslant 0$ e $\leqslant 2\pi$, le variazioni totali $V_{(x)}(\bar{x}, y)$ e $V_{(y)}(x, \bar{y})$ della $f(x, y)$, considerata, rispettivamente, come funzione della sola x nell'intervallo $(0, \bar{x})$ e della sola y nell'intervallo $(0, \bar{y})$ — *variazioni calcolate trascurando completamente i valori della $f(x, y)$ nei punti di E* — risultino, come funzioni rispettivamente della y e della x, quasi-ovunque finite, quasi-continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE) in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$.

Nel seguito supporremo che le funzioni $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ siano definite in tutto il piano (x, y) mediante la periodicità, di periodo 2π, sia rispetto ad x che ad y, e sostituiremo a $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ lo 0.

2. - **Teorema.**

Sia $f(x, y)$ una funzione data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, quasi-continua e generalmente a variazione limitata nel quadrato Q; e sia E l'insieme ad essa relativo di cui si è detto nel n.º 1.

Il punto (x_0, y_0) sia tale che, preso un $\sigma > 0$, ad arbitrio, si possa sempre determinare un $\lambda_0 > 0$ in modo che, per ogni δ maggiore di zero e $\leqslant \lambda_0$, risulti

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} |V_{(x)}(x_0+\lambda_0, y) - V_{(x)}(x_0+0, y)|\, dy < \sigma, \\ &\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} |V_{(x)}(x_0-\lambda_0, y) - V_{(x)}(x_0-0, y)|\, dy < \sigma, \\ &\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |V_{(y)}(x, y_0+\lambda_0) - V_{(y)}(x, y_0+0)|\, dx < \sigma, \\ &\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |V_{(y)}(x, y_0-\lambda_0) - V_{(y)}(x, y_0-0)|\, dx < \sigma. \end{aligned} \right.$$

(7) Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. V (1936), pp. 299-313.

(8) *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata.* Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. V (1936), pp. 315-320.

(9) Vedi loc. cit. in (7), n.º 4.

Allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge (nel senso di Stolz e Pringsheim) in (x_0, y_0) verso un determinato valore, finito, $\Phi(x_0, y_0)$. Questo valore coincide con

$$\frac{1}{4}\{f(x_0+0,\, y_0+0)+f(x_0-0,\, y_0+0)+f(x_0-0,\, y_0-0)+f(x_0+0,\, y_0-0)\}$$

se i quattro limiti qui indicati ([10]) *esistono finiti.*

a) Definiamo, in primo luogo, il valore $\Phi(x_0, y_0)$; e per semplicità di scrittura supponiamo $x_0=0$, $y_0=0$.

Intendendo sempre, nei passaggi al limite fatti sulla $f(x, y)$, di non tener alcun conto dei valori di questa funzione nei punti dell'insieme E, dall'ipotesi che la $f(x, y)$ sia generalmente a variazione limitata segue che, per quasi tutti gli x, esiste finito il limite

$$\lim_{y\to+0} f(x, y)=\bar{f}(x, +0).$$

Dalla prima delle (1) segue poi, per δ positivo e $\leqslant\lambda_0$,

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta |V_{(x)}(\lambda_0, y)-V_{(x)}(+0, y)|\,dy<2\sigma;$$

e quindi nell'intervallo $(0, \delta)$ — per qualunque δ tale che $0<\delta\leqslant\lambda_0$ — vi è sempre un insieme di punti y di misura $>2\delta/3$ in cui è

$$V_{(x)}(\lambda_0, y)-V_{(x)}(+0, y)\leqslant 6\sigma. \tag{2}$$

E siccome δ può essere scelto comunque piccolo, ne viene che la variazione totale di $\bar{f}(x, +0)$, considerata (questa funzione) soltanto nei punti x, maggiori di 0, dell'intervallo $(0, \lambda_0)$ in cui esiste finita e tali che la retta parallela all'asse y di ascissa x contenga dei punti di E al più un insieme di misura (lineare) nulla, è $\leqslant 6\sigma$ ([11]).

([10]) Per la definizione di tali limiti, vedi loc. cit. in ([2]), p. 450.

([11]) Infatti, in caso contrario, fra i punti x ora indicati se ne potrebbero scegliere alcuni, in numero finito, $(0<)x_1<x_2<\ldots<x_n(\leqslant\lambda_0)$ in modo da avere

$$|\bar{f}(x_2, +0)-\bar{f}(x_1, +0)|+|\bar{f}(x_3, +0)-\bar{f}(x_2, +0)|+\ldots+|\bar{f}(x_n, +0)-\bar{f}(x_{n-1}, +0)|>6\sigma.$$

E siccome per quasi tutti gli $\bar{y}>0$ la retta $y=\bar{y}$ interseca le rette $x=x_r$ $(r=1, 2,\ldots, n)$ in punti non appartenenti ad E, ne viene che, se δ è sufficientemente piccolo, è, per quasi tutti gli y di $(0, \delta)$,

$$|f(x_2, y)-f(x_1, y)|+\ldots+|f(x_n, y)-f(x_{n-1}, y)|>6\sigma$$

e perciò

$$V_{(x)}(\lambda_0, y)-V_{(x)}(+0, y)>6\sigma,$$

contro la (2), che deve essere verificata per gli y di $(0, \delta)$ costituenti un insieme di misura $>2\delta/3$.

Dunque, esclusi i valori di x di un insieme di misura nulla, la $\bar{f}(x, +0)$, considerata soltanto sugli x rimanenti, risulta in $(0, \lambda_0)$ a variazione limitata, ed esiste perciò finito il limite

$$l_1 = \lim_{x \to +0} \bar{f}(x, +0) [= \lim_{x \to +0} \lim_{y \to +0} f(x, y)],$$

intendendo anche qui di non tener alcun conto, nel passaggio al limite, dei valori della $\bar{f}(x, +0)$ nei punti x dell'insieme di misura nullo escluso.

Analogamente esiste finito il limite

$$l_1' = \lim_{y \to +0} \lim_{x \to +0} f(x, y),$$

inteso in modo corrispondente al precedente.

Dimostriamo che è $l_1 = l_1'$. Sia, perciò, $\bar{x}$ uno dei punti x di $(0, \lambda_0)$ non esclusi nella definizione di l_1 e tale che sia

$$| l_1 - \bar{f}(\bar{x}, +0) | < \sigma.$$

Scegliamo poi in $(0, \lambda_0)$ un $\bar{y}$ fra i punti y non esclusi nella definizione di l_1' e tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ non appartenga ad E, e tale pure che sia

$$| l_1' - \bar{f}(+0, \bar{y}) | < \sigma, \qquad | \bar{f}(\bar{x}, +0) - f(\bar{x}, \bar{y}) | < \sigma,$$
$$V_{(x)}(\bar{x}, \bar{y}) - V_{(x)}(+0, \bar{y}) \leq 6\sigma.$$

Allora è

$$| f(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{f}(+0, \bar{y}) | \leq 6\sigma,$$

ed anche

$$| l_1 - l_1' | < 9\sigma.$$

Siccome σ è arbitrario, ne viene $l_1 = l_1'$.

Analogamente si dimostra che esistono finiti i limiti

$$l_2 = \lim_{x \to -0} \lim_{y \to +0} f(x, y), \qquad l_2' = \lim_{y \to +0} \lim_{x \to -0} f(x, y),$$
$$l_3 = \lim_{x \to -0} \lim_{y \to -0} f(x, y), \qquad l_3' = \lim_{y \to -0} \lim_{x \to -0} f(x, y),$$
$$l_4 = \lim_{x \to +0} \lim_{y \to -0} f(x, y), \qquad l_4' = \lim_{y \to -0} \lim_{x \to +0} f(x, y),$$

intesi in modo corrispondente a l_1 e l_1', e che è

$$l_2 = l_2', \qquad l_3 = l_3', \qquad l_4 = l_4'.$$

Dopo di ciò porremo

$$\Phi(x_0, y_0) \equiv \Phi(0, 0) = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4). \tag{3}$$

b) Per le stesse ragioni indicate alla fine della pag. 455 di loc. cit. in (²), il nostro teorema risulterà provato se dimostreremo che ad ogni $\varepsilon > 0$ è possibile coordinare un $\lambda > 0$ in modo che si abbia

$$\left| \int_0^\lambda \int_0^\lambda \{ f(2u, 2v) - l_1 \} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} du dv \right| < \varepsilon, \tag{4}$$

contemporaneamente per tutti gli h e k interi e positivi.

Fissato ad arbitrio un $\sigma > 0$ e determinato il numero λ_0 che gli corrisponde secondo l'enunciato del teorema, sia λ un numero maggiore di zero, minore di $\lambda_0/8$ e tale che risulti

$$| l_1 - \bar{f}(x, +0) | < \sigma, \qquad | l_1 - \bar{f}(+0, y) | < \sigma, \tag{5}$$

per tutti gli x e y maggiori di zero, $\leqslant 8\lambda$, e non appartenenti ai valori esclusi per x nella definizione di l_1, e per y in quella di l_1'.

Posto

$$I_{r,s} = \int_{r\pi : h}^{(r+1)\pi : h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_{s\pi : k}^{(s+1)\pi : k} \{ f(2u, 2v) - l_1 \} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv$$

e detti p e q i massimi numeri interi tali che risulti $p\pi : h < \lambda$, $q\pi : k < \lambda$, l'integrale che figura nella (4) si scrive

$$\sum_{r=0}^{p} \sum_{s=r}^{q} I_{r,s} + \sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}, \tag{6}$$

intendendo che, negli integrali $I_{p,s}$ $(s = 0, 1, \ldots, q)$ e $I_{r,q}$ $(r = 0, 1, \ldots, p)$, il campo di integrazione sia limitato a quella parte che si trova nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e (λ, λ).

Esaminiamo per primo la somma $\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}$.

Fissiamo un λ', tale che $2\lambda \leqslant \lambda' \leqslant 8\lambda$, in modo che su ciascuna delle rette $x = \lambda'$ e $y = \lambda'$ i punti di E formino al più un insieme di misura lineare nulla, e in modo anche che risulti

$$V_{(x)}(\lambda_0, \lambda') - V_{(x)}(+0, \lambda') \leqslant 6\sigma, \qquad V_{(y)}(\lambda', \lambda_0) - V_{(y)}(\lambda', +0) \leqslant 6\sigma:$$

ciò è possibile in virtù di quanto si è detto relativamente alla (2) per essere $8\lambda < \lambda_0$ e potendo quindi scegliersi $\delta = 8\lambda$. È allora

$$| f(x, \lambda') - \bar{f}(+0, \lambda') | \leqslant 6\sigma, \qquad | f(\lambda', y) - \bar{f}(\lambda', +0) | \leqslant 6\sigma,$$

per quasi tutti gli x e y di $(0, \lambda_0)$, ed anche, per gli stessi x e y, tenendo conto delle (5),

$$|f(x, \lambda') - l_1| < 7\sigma, \qquad |f(\lambda', y) - l_1| < 7\sigma. \tag{7}$$

Se ora indichiamo, per ogni punto (x, y) del quadrato $Q_{\lambda'}$ di vertici opposti $(0, 0)$, (λ', λ'), con $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$ le *variazioni positiva* e *negativa*, nell'intervallo (y, λ'), della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y — *e intendendo che tali variazioni siano calcolate trascurando completamente i valori della* $f(x, y)$ *nei punti di* E — abbiamo, per quasi tutti i punti (x, y) del quadrato $Q_{\lambda'}$,

$$\begin{gathered} f(x, y) = f(x, \lambda') - P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y), \\ P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y) = V_{(y)}(x, \lambda') - V_{(y)}(x, y)\,; \end{gathered} \tag{8}$$

e $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$, pur considerate soltanto in quasi tutto $Q_{\lambda'}$, sono funzioni non negative e non crescenti di y. In quasi tutto $Q_{\lambda'}$, è, pertanto,

$$f(x, y) - l_1 = \{ f(x, \lambda') - l_1 \} - P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y). \tag{9}$$

Indichiamo con $I'_{r,s}$, $I''_{r,s}$ e $I'''_{r,s}$ gli integrali che si ottengono sostituendo a $f(2u, 2v) - l_1$, nell'espressione di $I_{r,s}$, rispettivamente $f(2u, \lambda') - l_1$, $P_{(y)}(2u, 2v)$ $N_{(y)}(2u, 2v)$. Allora, in virtù della (9), otteniamo

$$I_{r,s} = I'_{r,s} - I''_{r,s} + I'''_{r,s},$$

donde

$$\sum_{s=r}^{q} I_{r,s} = \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} - \sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} + \sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}.$$

Per la prima somma del secondo membro di questa uguaglianza è

$$\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} = \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \{ f(2u, \lambda') - l_1 \} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \sum_{s=r}^{q} \int_{s\pi:k}^{(s+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv\,;$$

e in virtù della prima delle (7) e del fatto che i termini dell'ultima somma scritta sono a segni alternati ed in valore assoluto decrescente (donde il valore assoluto della somma non supera quello del suo primo termine) è pure

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < 7\sigma \left| \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \right| \left| \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv \right|.$$

Perciò, per $r = 0$, si ha

$$\left| \sum_{s=0}^{q} I'_{0,s} \right| < 7\sigma \frac{\pi^4}{4},$$

mentre per $r>0$ è

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s}\right| < 7\sigma\,\frac{\pi^2}{4r^2} \quad (^{12}).$$

Per la somma $\sum I''_{r,s}$, si ha

$$\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} = \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \left\{ \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \sum_{s=r}^{q} \int_{s\pi:k}^{(s+1)\pi:k} P_{(y)}(2u,\,2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv \right\};$$

e poichè $P_{(y)}(2u,\,2v):\operatorname{sen} v$ è funzione di v non negativa e non crescente, i termini dell'ultima somma scritta sono anch'essi a segni alternati e in valore assoluto non crescenti e si ha

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} P_{(y)}(2u,\,2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv \leq$$

$$\leq \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} P_{(y)}(2u,\,+0)\, \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

onde

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I''_{0,s}\right| < \frac{\pi^3}{4}\, h \int_{0}^{\pi:h} P_{(y)}(2u,\,+0)\, du,$$

e, per $r>0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \frac{\pi}{2r}\, \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{r\pi}{h}} \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} P_{(y)}(2u,\,+0)\, du < \frac{\pi h}{4r^2} \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} P_{(y)}(2u,\,+0)\, du.$$

È analogamente

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I'''_{0,s}\right| < \frac{\pi^3}{4}\, h \int_{0}^{\pi:h} N_{(y)}(2u,\,+0)\, du,$$

e per $r>0$

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I'''_{r,s}\right| < \frac{\pi h}{4r^2} \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} N_{(y)}(2u,\,+0)\, du.$$

---

(12) Perchè, per $r>0$, è

$$\left|\int_{\pi r:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| < \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{r\pi}{h}} \int_{\pi r:h}^{(r+1)\pi:h} du < \frac{\pi}{2r}.$$

Dalle disuguaglianze ottenute segue, tenendo conto della (8),

$$\Big|\sum_{s=0}^{q} I_{0,s}\Big| < 7\sigma\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^3}{4}h\int_0^{\pi:h}\{P_{(y)}(2u, +0) + N_{(y)}(2u, +0)\}\,du <$$
$$< 7\sigma\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^3}{4}h\int_0^{\pi:h}\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du$$

e, per $r > 0$,

$$\Big|\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < 7\sigma\frac{\pi^2}{4r^2} + \frac{\pi h}{4r^2}\int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h}\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du,$$

e perciò

$$\Big|\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < 7\sigma\frac{\pi^4}{4}\Big(1 + \sum_1^p\frac{1}{r^2}\Big) +$$
$$+ \frac{\pi^3}{4}h\Big[\int_0^{\pi:h}\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du + \sum_{r=1}^{p}\frac{1}{r^2}\int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h}\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du\Big].$$

Ora, posto

$$\varphi(z) = \int_0^z\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du,$$

abbiamo

$$\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{r^2}\int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h}\{V_{(y)}(2u, \lambda') - V_{(y)}(2u, +0)\}\,du = \sum_{r=1}^{p}\frac{1}{r^2}\Big[\varphi\Big(\frac{(r+1)\pi}{h}\Big) - \varphi\Big(\frac{r\pi}{h}\Big)\Big] =$$
$$= -\varphi\Big(\frac{\pi}{h}\Big) + \sum_{r=1}^{p-1}\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\Big)\varphi\Big(\frac{(r+1)\pi}{h}\Big) + \frac{1}{p^2}\varphi\Big(\frac{(p+1)\pi}{h}\Big);$$

ed essendo

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2} = \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2} < \frac{2}{r^3},$$

viene

$$\Big|\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < 2\sigma\pi^4\Big(1 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{r^2}\Big) + \frac{\pi^3}{4}h\Big[2\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1}{r^3}\varphi\Big(\frac{(r+1)\pi}{h}\Big) + \frac{1}{p^2}\varphi\Big(\frac{(p+1)\pi}{h}\Big)\Big]$$

ed anche, tenendo conto della terza delle (1),

$$\Big|\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < 2\sigma\pi^4\Big(1 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{r^2}\Big) + \frac{\pi^3}{4}h\Big[4\pi\sigma\sum_{r=1}^{p-1}\frac{(r+1)}{hr^3} + 2\pi\sigma\frac{p+1}{hp^2}\Big] <$$
$$< 2\sigma\pi^4\Big(1 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{r^2}\Big) + \sigma\pi^4\Big(2\sum_1^{\infty}\frac{1}{r^2} + 1\Big) < 4\sigma\pi^4\Big(1 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{r^2}\Big).$$

In modo analogo si ottiene

$$\left|\sum_{s=0}^{q}\sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}\right| < 4\sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right),$$

e se ne conclude

$$\left|\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda}\{f(2u,2v)-l_1\}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,du\,dv\right| < 8\sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right);$$

e siccome σ può scegliersi arbitrariamente, la (4) risulta provata, e con ciò il teorema enunciato resta dimostrato.

3. - *Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è quasi-continua e generalmente a variazione limitata in Q, le disuguaglianze* (1) *sono verificate in quasi tutto Q.*

Limitiamoci a provare ciò per la prima delle (1), e indichiamo con E' l'insieme di tutti i punti di Q che si trovano su quelle rette $y=c$ su ciascuna delle quali i punti di E formano un insieme lineare non misurabile o di misura non nulla, oppure su ciascuna delle quali $V_{(x)}(x, c)$ non resta limitata. L'insieme E' è di misura superficiale nulla; e l'insieme dei valori c è di misura lineare nulla.

Poniamo, nei punti di Q non appartenenti ad E', e per ogni intero positivo n

$$\varphi_n(x, y) = V_{(x)}\left(x+\frac{1}{n}, y\right) - V_{(x)}(x+0, y),$$

e nei punti di E'

$$\varphi_n(x, y) = 0.$$

In *tutto* Q è, per $n \to \infty$, $\varphi_n(x, y) \to 0$.

Detto E_n l'insieme dei punti di Q in cui $\varphi_n(x, y)$ non è la derivata rispetto ad y di $\int_0^y \varphi_n(x, y)dy$, risulta $m(E_n)=0$, $m(E_n)$ essendo la misura superficiale di E_n.

Preso un $\sigma > 0$, sia Ω_n l'insieme dei punti di Q in cui è $\varphi_n(x, y) < \sigma$. È $m(\Omega_n) \to 4\pi^2$, per $n \to \infty$; e se Ω_n' è l'insieme dei punti di Ω_n non appartenenti nè a E' nè a E_n, è pure $m(\Omega_n') \to 4\pi^2$.

Posto $\Omega = \Sigma\Omega_n'$, è $m(\Omega) = 4\pi^2$.

Sia ora (x_0, y_0) un punto di Ω. Esso appartiene ad almeno un Ω_n'; e sia Ω'_{n_0} uno di questi insiemi che lo contiene. Si ha

$$\lim_{\delta \to 0}\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\varphi_{n_0}(x_0, y)dy = \varphi_{n_0}(x_0, y_0) < \sigma,$$

ed esiste perciò un $\bar{\delta}>0$ tale che, per ogni δ soddisfacente alla $0<\delta\leq\bar{\delta}$, risulta

$$\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\varphi_{n_0}(x_0, y)dy<\sigma$$

ossia

$$\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left\{V_{(x)}\left(x_0+\frac{1}{n_0}, y\right)-V_{(x)}(x_0+0, y)\right\}dy<\sigma.$$

Se dunque indichiamo con λ_0 il minore dei due numeri $\bar{\delta}$ e $1:n_0$, abbiamo, per ogni δ maggiore di zero e $\leq\lambda_0$,

$$\frac{1}{2\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\{V_{(x)}(x_0+\lambda_0, y)-V_{(x)}(x_0+0, y)\}dy<\sigma,$$

e così la prima delle (1) è provata nel punto (x_0, y_0), e cioè in ogni punto di Ω, vale a dire in quasi tutto Q.

4. - Nelle stesse ipotesi fatte sulla $f(x, y)$ nel n.° 3, è, *quasi dappertutto in* Q,

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{f}(x-0, y)=f(x, y)=\bar{f}(x+0, y),\\ \bar{f}(x, y-0)=f(x, y)=\bar{f}(x, y+0),\end{array}\right. \tag{10}$$

dove, per esempio, $\bar{f}(x-0, y)$ indica il limite di $f(x', y)$ per $x'\to x$ in modo che sia $x'<x$ e che il punto (x', y) *non* appartenga all'insieme E (n.° 1).

Limitiamoci a dimostrare la prima delle (10). A tale scopo, poniamo, nei punti (x, y) di Q non appartenenti all'insieme E' (n.° 3),

$$\psi(x, y)=\int_0^x f(x', y)dx'.$$

Esclusi i punti di un insieme E'' di misura superficiale nulla, comprendente E', in tutti gli altri punti di Q è

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}=f(x, y);$$

e poichè negli stessi punti esistono $\bar{f}(x-0, y)$ e $\bar{f}(x+0, y)$, ed è perciò

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}=\bar{f}(x-0, y)=\bar{f}(x+0, y),$$

la prima delle (10) è provata.

5. - Sempre nelle ipotesi fatte sulla $f(x, y)$ nel n.° 3, *è, quasi dappertutto in Q,*

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = f(x, y), \tag{11}$$

essendo l_1, l_2, l_3, l_4 i numeri definiti in n.° 2, *a*).

Indichiamo con E''' l'insieme costituito dai punti di Q nei quali non vale una almeno delle (1) e delle (10) e da quelli che appartengono alle rette $y=c$ su ciascuna delle quali i punti ora indicati formano un insieme lineare non misurabile o di misura non nulla. L'insieme E''' è di misura superficiale nulla.

Fissiamo un qualunque punto (x_0, y_0) di Q non appartenente ad E'''. Allora, per quasi tutti gli x è $\bar{f}(x, y_0+0) = f(x, y_0)$, e per quanto si è detto in n.° 2, *a*), esiste finito il limite

$$l_1 = \lim_{x \to x_0+0} \bar{f}(x, y_0+0);$$

e siccome in (x_0, y_0) vale la prima delle (10), ne viene

$$l_1 = f(x_0, y_0).$$

In modo analogo si provano tutte le (11).

6. - Dai n.i 2, 3 e 5 segue immediatamente il risultato del CESARI:

Se $f(x, y)$ è periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, quasi-continua e generalmente a variazione limitata in Q, la sua serie doppia di Fourier converge (nel senso di Stolz e Pringsheim) verso $f(x, y)$, quasi dappertutto.

7. - Per un'osservazione contenuta in loc. cit. ([2]), n.° 181, *a*), si ha che, se $f(x, y)$ soddisfa alle condizioni poste qui nel n.° 3, e se l'espressione $\frac{1}{2}\{\bar{f}(x_0+0, y) + \bar{f}(x_0-0, y)\}$ coincide, per quasi tutti gli y di $(0, 2\pi)$, con una funzione $g(y)$ a variazione limitata, allora la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ è, nel punto (x_0, y_0) sommabile per linee, con somma data da $\frac{1}{2}\{g(y_0+0) + g(y_0-0)\}$. Se perciò indichiamo con X l'insieme dei punti x' di $(0, 2\pi)$ tali che su ogni retta $x=x'$ i punti di E e quelli in cui non vale la prima delle (10) costituiscano un insieme lineare non misurabile o di misura non nulla, oppure tali che sulla retta $x=x'$ la $V_{(y)}(x', y)$ non risulti limitata, abbiamo che, per ogni x_0 di $(0, 2\pi)$ e non appartenente a X, la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ è sommabile per linee su tutta la retta $x=x_0$, con somma data da $\frac{1}{2}\{\bar{f}(x_0, y+0) + \bar{f}(x_0, y-0)\}$, ossia, per quasi tutti gli y, da $f(x_0, y)$. Dunque:

Se la $f(x, y)$, *periodica, di periodo* 2π, *rispetto ad* x *e ad* y, *è quasi-continua e generalmente a variazione limitata in* Q, *la sua serie doppia di Fourier è, per quasi tutti gli* x_0, *sommabile per linee su tutta la retta* $x = x_0$, *con somma* $\frac{1}{2}\{\bar{f}(x_0, y+0) + \bar{f}(x_0, y-0)\}$, *ed è, per quasi tutti i punti* (x_0, y_0), *pure sommabile per linee, con somma* $f(x_0, y_0)$ (13).

Analogo risultato vale per la sommabilità per colonne.

---

(13) Cfr. L. CESARI, loc. cit. in (5), n.° 2.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 26 agosto 1937 - XV