

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

RENATO CACCIOPPOLI

Sui teoremi d'esistenza di Riemann

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 7, n° 2
(1938), p. 177-187

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_2_177_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI TEOREMI D'ESISTENZA DI RIEMANN

di RENATO CACCIOPOLI (Napoli).

In questo lavoro approfondisco lo studio di un nuovo metodo, da me recentemente proposto ⁽¹⁾, per la dimostrazione dei teoremi d'esistenza di RIEMANN. Mi sembra che tale metodo meriti di essere presentato con qualche dettaglio, e la tecnica delle dimostrazioni analizzata su alcune varianti, sia per l'interesse intrinseco di queste, non prive di eleganza, che per la chiara luce in cui ne viene posto il semplice principio informatore.

Questo principio, a prescindere da altre possibili applicazioni, si presenta come il più semplice e naturale per la trattazione di tutta una classe di problemi generalizzati di DIRICHLET: quelli relativi a varietà chiuse, per cui mancano quindi condizioni al contorno ⁽²⁾. Limitatamente poi ai teoremi di RIEMANN, spetta indubbiamente al metodo che qui sviluppo di porgere una semplice applicazione dei concetti moderni della teoria delle funzioni di variabili reali ad una questione classica dell'Analisi. E questa considerazione mi induce ad esplicitare in fine una conseguenza quasi ovvia del mio procedimento: la rappresentazione conforme di un campo semplicemente connesso sul cerchio, dedotta dalla rappresentazione conforme di una riemanniana chiusa semplicemente connessa sulla sfera.

1. - Sia S una superficie di RIEMANN chiusa: cioè una superficie chiusa astratta, topologicamente definita e tale che di ogni sua porzione s sufficientemente ristretta siano assegnate delle rappresentazioni *conformi* (per definizione) su un piano xy , mediante delle funzioni complesse $x+iy$, dette variabili complesse o *uniformizzanti* locali; tutte queste rappresentazioni conformi essendo naturalmente tenute a risultare coerenti fra di loro ⁽³⁾. Come è noto, si introducono senz'altro sulla superficie di RIEMANN così definita le nozioni di funzione continua, funzione differenziabile una o più volte con continuità, curva regolare, ecc.

⁽¹⁾ Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli (4^a), Vol. IV (1934).

⁽²⁾ Vedi in questi Annali la Memoria di CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*. Vol. VII, 1938, pp. 73-96.

⁽³⁾ Cfr. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. (Leipzig, Teubner, 1923).

Il problema che ci proponiamo di studiare, e al quale facilmente si riconducono, come d'altronde preciseremo in seguito, i problemi di esistenza degli integrali abeliani su S , è quello dell'*integrazione su S dell'equazione di POISSON*: cioè della determinazione di una funzione u dei punti di S che attraverso una qualunque rappresentazione conforme parziale di S si muti in una funzione $u(x, y)$ avente un assegnato Δ_2 . Questo Δ_2 non è peraltro una funzione invariante su S , cioè dipende oltre che dal punto considerato anche dall'uniformizzante locale adottata. La legge di trasformazione del Δ_2 , nel passaggio dall'uniformizzante $x + iy$ all'altra $x' + iy'$, è quella della moltiplicazione per lo jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y'}\right)^2;$$

si può anche dire che il Δ_2 si trasforma in modo che resti invariata l'espressione differenziale $\Delta_2 u dx dy$.

Questa osservazione mostra che di una funzione u dei punti di S si può definire intrinsecamente non il Δ_2 , ma per così dire *l'integrale del Δ_2 esteso ad una porzione S' di S* . Supponiamo per semplicità che u sia due volte derivabile con continuità, e che S' sia limitata da curve regolari: decomponendo S' nella somma di più porzioni dello stesso tipo s_1, s_2, \dots , rappresentando queste conformemente sui domini D_1, D_2, \dots , del piano xy , e formando la somma

$$\sum_k \iint_{D_k} \Delta_2 u_k(x, y) dx dy,$$

dove u_1, u_2, \dots , sono le trasformate di u definite in D_1, D_2, \dots , rispettivamente, si ottiene un valore $M_u(S')$ che non varia al variare della decomposizione di S' o delle uniformizzanti locali.

La dipendenza di $M_u(S')$ da u è distributiva, da S' è additiva. La conoscenza della *funzione additiva d'insieme M_u* equivale alla conoscenza, per ogni punto di S e per qualunque variabile locale, del $\Delta_2 u$ come *derivata* sul piano; con la nomenclatura più espressiva che naturalmente si presenta, M_u è una *distribuzione di masse* positive o negative, di cui i $\Delta_2 u$ sono le *densità* nelle rappresentazioni piane, la funzione di punto u essendone (a meno del fattore -2π) il *potenziale*.

Siamo così condotti a considerare in generale le funzioni additive d'insieme su S .

2. - Premettiamo l'osservazione ovvia che, attraverso la considerazione delle rappresentazioni conformi parziali, le definizioni di insieme di BOREL, insieme misurabile, insieme di misura nulla si estendono subito dal piano alla superficie di RIEMANN S ; e analogamente quelle di funzione di BAIRE e di funzione misurabile. Così pure una funzione definita su S si dirà *sommabile* se dà luogo in ogni rappresentazione conforme ad una funzione sommabile.

Una funzione reale additiva d'insieme $M(I)$ è definita (almeno) per tutti gli insiemi di BOREL I di S , e si ottiene come differenza di due funzioni non negative $M'(I)$ e $M''(I)$, $M'(I)$ essendo la *parte positiva* della *massa* che cade su I (o « variazione positiva »); $M''(I)$ è allora (a meno del segno) la *massa negativa* (o « variazione negativa »), e la somma $M'(I) + M''(I)$ dà la *massa totale* (o « variazione totale ») su I . M si dirà *assolutamente continua* se nulla su ogni insieme di misura nulla.

Se si rappresenta conformemente una porzione s di S sul dominio piano D , la funzione additiva M , considerata per gli insiemi contenuti in s , si trasforma in una funzione additiva $\mu(H)$ degli insiemi H di D , che ammette quasi ovunque in D una *densità* $\delta(x, y)$; nel caso che $M(I)$ sia assolutamente continua, anche $\mu(H)$ sarà assolutamente continua, e si avrà

$$\mu(H) = \iint_H \delta(x, y) dx dy.$$

Se ogni funzione $\delta(x, y)$ così definita risulta limitata, o continua, o derivabile, ecc., si dirà che la funzione assolutamente continua M è a densità limitata, o continua, o derivabile, ecc.; analogamente se tutte le funzioni δ risultano di quadrato o più generalmente di potenza p^{ma} (con $p > 1$) sommabile.

È immediata la definizione dell'integrale di STIELTJES

$$\int_I f(P) dM,$$

dove I è un insieme di BOREL e $f(P)$ è una funzione del punto di S . Se M è assolutamente continua, si può ottenere quest'integrale mediante una somma di integrali doppi ordinari. Basta all'uopo decomporre S (per esempio mediante curve regolari) nella somma di più porzioni sufficientemente piccole S_1, S_2, \dots, S_n , rappresentare queste conformemente sui domini piani D_1, D_2, \dots, D_n , e calcolare le relative funzioni densità $\delta_1(x, y), \delta_2(x, y), \dots, \delta_n(x, y)$: indicando allora con $f_k(x, y)$ la trasformata di $f(P)$ definita in D_k , con H_k l'insieme di D_k trasformato dell'insieme $I \cdot S_k$ di S , si avrà

$$\int_I f(P) dM = \sum_k \iint_{H_k} f_k(x, y) \delta_k(x, y) dx dy.$$

In particolare

$$M(I) = \int_I dM = \sum_k \iint_{H_k} \delta_k(x, y) dx dy,$$

$$M'(I) + M''(I) = \int_I |dM| = \sum_k \iint_{H_k} |\delta_k(x, y)| dx dy.$$

Se M ha densità di potenza p^{ma} sommabile ($p > 1$), l'integrale di $f dM$ esisterà sempre che $|f|^{\frac{p}{p-1}}$ sia sommabile.

Tornando ora alla distribuzione di masse M_u che abbiamo associata ad una funzione di punto $u(P)$ su S , due volte derivabile con continuità, è facile generalizzare la nostra definizione in modo di includere casi in cui la continuità delle derivate seconde, e però della densità di M_u , venga a mancare. Invero nella prima ipotesi, detto C un cerchio di raggio R interno al dominio D su cui si rappresenta conformemente la porzione s di S , assumendo coordinate polari ϱ, φ con polo nel centro di C e indicando con $u(\varrho, \varphi)$ la funzione trasformata di $u(P)$, con $\delta(\varrho, \varphi)$ la densità, si può scrivere

$$(1) \quad u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \varrho^2)u(R, \psi)}{R^2 - 2R\varrho \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2} d\psi - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \delta(r, \psi) \log \frac{R^4 - 2R^2\varrho r \cos(\psi - \varphi) + \varrho^2 r^2}{R^2[\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\psi - \varphi) + r^2]} d\psi, \quad (\varrho < R).$$

Orbene, indipendentemente da ogni ipotesi sulla continuità delle derivate seconde, definiremo per una funzione $u(P)$ la funzione additiva d'insieme $M_u(I)$ mediante la relazione (1), supposto beninteso che esista una funzione assolutamente continua che soddisfi la (1) per ogni porzione s di S e per qualunque scelta del cerchio C in D , nel qual caso essa risulta ovviamente unica.

Notiamo ancora che per la sommabilità della funzione sotto il segno di integrale doppio, a secondo membro della (1), basta che risulti sommabile una qualunque potenza, con esponente > 1 , della densità.

Ciò posto, il problema dell'integrazione dell'equazione di POISSON è quello di risalire, quando sia possibile, da $M_u(I)$ a $u(P)$, cioè da un'assegnata distribuzione di masse al potenziale. Non dobbiamo investigare che la questione di esistenza, essendo evidente l'unicità, a meno di una costante additiva, della soluzione: invero se $M_u \equiv 0$, u è armonica ovunque su S , ed una funzione armonica su tutta la superficie chiusa S si riduce ad una costante.

3. - Prenderemo ora a considerare delle classi, o *spazi funzionali* Σ , di distribuzioni di masse M , dotati delle seguenti proprietà:

1) Σ è lineare, cioè contiene con M_1 e M_2 ogni combinazione lineare a coefficienti costanti $c_1 M_1 + c_2 M_2$;

2) Σ è metrico completo, cioè fra due suoi elementi, o *punti*, M_1 e M_2 è definita una distanza $\|M_1 - M_2\|$, la cui convergenza a zero caratterizza la tendenza al limite, essendo valido (come condizione necessaria e sufficiente) il criterio di convergenza di CAUCHY;

3) per ogni M di Σ esistono, detta δ la densità di M , gli integrali del tipo

$$\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \delta(r, \psi) \log \frac{R^4 - 2R^2 \rho r \cos(\psi - \varphi) + \rho^2 r^2}{R^2[\rho^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi) + r^2]} d\psi$$

che figura a secondo membro della (1), e la convergenza nel senso ora detto di M si traduce per essi, riguardati come funzioni di ρ e φ , in convergenza uniforme.

Diremo V l'insieme delle distribuzioni M di Σ che sono anche delle M_u , che ammettono cioè un potenziale nel senso dianzi precisato: in virtù delle condizioni 1) e 3), V è una varietà lineare di Σ passante per l'origine, cioè un insieme chiuso che contiene ogni combinazione lineare di due suoi punti qualunque, come si prova subito osservando che se $\|M_u\| \rightarrow 0$, e $u \rightarrow 0$ in un punto particolare, u tende ovunque uniformemente a zero. Il nostro compito sarà quello di determinare la varietà V .

Ricercheremo all'uopo le *equazioni* di V (che vedremo ridursi ad una sola). Queste, in virtù di un noto e semplice principio di Analisi funzionale, si scrivono eguagliando a zero i *funzionali lineari* (cioè continui e distributivi) definiti in Σ e nulli su V ; è facile invero, dato in Σ un punto M fuori di V , costruire un funzionale lineare nullo su V e non nullo in M , almeno finchè, ciò che basta ai nostri scopi, lo spazio sia *separabile* (cioè contenga un insieme numerabile ovunque denso) (4).

Considereremo dapprima lo spazio Σ delle distribuzioni a densità continua, indi quello Σ_p delle distribuzioni aventi potenza p^{ma} ($p > 1$) sommabile (spazi entrambi separabili). Per definire la distanza $\|M_1 - M_2\|$, fisseremo ad arbitrio una decomposizione, del tipo già considerato al numero precedente, di S in n porzioni S_1, S_2, \dots, S_n , limitate da archi di curva regolari, e rappresentati conformemente sui domini D_1, D_2, \dots, D_n del piano xy ; potremo ricorrere, per esempio, ad una particolare *triangolazione* di S , purchè abbastanza serrata. Se di due distribuzioni M_1 e M_2 indichiamo con $\delta_{1k}(x, y), \delta_{2k}(x, y)$ le densità nella rappresentazione di S_k su D_k , porremo, nel caso di densità continue

$$\|M_1 - M_2\| = \sum_k \max | \delta_{1k}(x, y) - \delta_{2k}(x, y) |,$$

e nell'altro di densità con potenza p^{ma} sommabile

$$\|M_1 - M_2\| = \left\{ \sum_k \iint_{D_k} | \delta_{1k}(x, y) - \delta_{2k}(x, y) |^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(4) V. HAHN: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* (Journal für Math., B. 157, 1927). Cfr. anche ASCOLI: *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.* [Annali di Matematica (4^a), t. IX e t. X (1931-1932)].

Con queste definizioni di distanza ⁽⁵⁾ sono verificate, come si vede immediatamente, le precedenti condizioni 2), 3). Si deducono poi subito le espressioni dei funzionali lineari in Σ e Σ_p dai noti risultati sulla rappresentazione di questi funzionali nel campo delle funzioni continue e in quello delle funzioni di potenza sommabile: nel primo caso si trova

$$(2) \quad \sum_k \int_{D_k} \delta_k(x, y) d\mu_k,$$

μ_k essendo una generica funzione additiva d'insieme definita in D_k ; e nel secondo

$$(3) \quad \sum_k \iint_{D_k} \delta_k(x, y) f_k(x, y) dx dy = \int f(P) dM,$$

$|f|^{\frac{p}{p-1}}$ essendo sommabile; δ_k rappresenta sempre la densità su D_k della distribuzione M .

Abbiamo ora tutto quanto ci occorre per stabilire il seguente teorema, che è il teorema fondamentale di esistenza per il nostro problema d'integrazione:

La varietà lineare V è quella di equazione $M(S)=0$, cioè ammettono potenziale tutte le distribuzioni in cui la massa totale positiva eguaglia la negativa, e queste soltanto.

4. - Per dimostrare il teorema nello spazio Σ , occorre provare che l'espressione (2) non può annullarsi per ogni distribuzione M_u senza ridursi a

$$\lambda \sum_k \iint_{D_k} \delta_k(x, y) dx dy = \lambda \int_S dM = \lambda M(S),$$

con λ costante.

Che λ non sia tenuta ad annullarsi lo prova poi il fatto che esistono delle distribuzioni M a densità continua non appartenenti a V : quelle per esempio di masse esclusivamente positive, cui dovrebbero corrispondere funzioni u sprovviste di massimi.

Siano C un qualunque cerchio, di raggio r , contenuto in uno dei domini D_k , e ϱ la distanza di un punto generico (x, y) dal centro di C : consideriamo su S la funzione u nulla fuori del campo corrispondente a C , e che su questo abbia la forma $(r^2 - \varrho^2)^3$. La relativa distribuzione M_u ha densità continua, e il valore del funzionale (2) per M_u è

$$\int_C \Delta_2(r^2 - \varrho^2)^3 d\mu_k.$$

⁽⁵⁾ Le quali dipendono ovviamente dalla particolare decomposizione adottata.

Eguagliando a zero questa quantità otteniamo la relazione, in cui $\omega(\varrho)$ rappresenta il valore di μ_k sul cerchio di raggio ϱ concentrico a C ,

$$\int_0^r (3\varrho^4 - 4r^2\varrho^2 + r^4) d\omega(\varrho) = 0.$$

Data l'arbitrarietà di C in D_k , questa eguaglianza sussiste per ogni r sufficientemente piccolo, ed a prescindere tutt'al più da un'infinità numerabile di valori di r , per i quali $\omega(r)$ sia eventualmente discontinua (di prima specie), se ne trae dapprima integrando per parti

$$\int_0^r (3\varrho^3 - 2r^2\varrho) \omega(\varrho) d\varrho = 0,$$

e poi derivando rispetto ad r

$$r^2 \omega(r) - 4 \int_0^r \varrho \omega(\varrho) d\varrho = 0.$$

Si vede così che $\omega(r)$ è continua non solo, ma anche derivabile, e si ottiene

$$r \frac{d\omega}{dr} - 2\omega = 0, \quad \omega(r) = cr^2,$$

con c costante rispetto ad r e dipendente solo dal centro di C . Ne segue che la densità $f_k(x, y)$ della funzione additiva μ_k è armonica, cioè che μ_k è l'integrale indefinito di una funzione armonica, in virtù della seguente forma generale del teorema inverso della media di GAUSS: *Se i valori di una funzione additiva d'insieme su due cerchi concentrici qualunque sono proporzionali alle aree di questi, la densità di tale funzione è armonica* ⁽⁶⁾.

Il funzionale (2), nullo su V , ha dunque necessariamente la forma

$$\sum_k \iint_{D_k} \delta_k(x, y) f_k(x, y) dx dy = \int_S f(P) dM,$$

dove f è armonica internamente ad ogni porzione S_k . Ma il ragionamento fatto può applicarsi ad ogni altra porzione di S rappresentata sul piano, sicchè f risulta armonica ovunque, e però costante, come previsto.

⁽⁶⁾ Se $\mu(I)$ è la funzione additiva, la densità $d(x, y)$ è quasi ovunque data dal rapporto $\frac{\mu(I)}{\pi\varrho^2}$, I essendo un cerchio di centro (x, y) e raggio (arbitrario) ϱ . Inoltre in nessun punto può la densità essere infinita; quindi μ è assolutamente continua, e $\mu(I)$ risulta funzione continua di x, y, ϱ . Si riconosce così che $d(x, y)$ è continua, e si è ricondotti ad un risultato ben noto che si dimostra, per esempio, osservando che per qualunque funzione armonica $u(x, y)$ la differenza $d - u$ deve essere monotona (cioè estremata in ogni campo al contorno), sicchè in un cerchio arbitrario d coincide con la funzione armonica che ne assume i valori sulla circonferenza.

Passiamo ora a dimostrare il nostro teorema nello spazio Σ_p ; anche qui costruiremo delle particolari distribuzioni M_u , tenute ora ad annullare il funzionale (3), rappresentando sul dominio D una porzione di S , prendendo in D un cerchio C di raggio r , e ponendo, su S , $u(P)=0$ fuori del campo Γ corrispondente a C , e $u(P)=u(\varrho)$ in Γ , ϱ essendo la distanza dell'immagine di P dal centro di C . Se $p < 2$ (ma sempre > 1) possiamo scegliere $u(\varrho)=(r-\varrho)^2$, risultando allora M_u a densità di potenza p^{ma} sommabile, e otteniamo

$$\int_S f(P) dM_u = 2 \iint_C f(x, y) \left(2 - \frac{r}{\varrho}\right) dx dy = 0,$$

donde, indicata con $\varphi(\varrho)$ la media (sommabile rispetto a ϱ) dei valori di f sulla circonferenza di raggio ϱ concentrica a C ,

$$\int_0^r \varphi(\varrho)(2\varrho - r) d\varrho = 0.$$

La derivazione rispetto ad r dà

$$r\varphi(r) - \int_0^r \varphi(\varrho) d\varrho = 0$$

per quasi tutti i valori di r , donde segue senz'altro che $\varphi(r)$ coincide quasi ovunque con una costante, e che la media dei valori di $f(x, y)$ su di un cerchio non dipende che dal centro di questo. Il teorema inverso della media ci dice allora che $f(x, y)$ coincide quasi ovunque con una funzione armonica, e che pertanto in (3) $f(P)$ può supporre ovunque armonica su S , cioè costante.

Se $p \geq 2$ possiamo ricorrere ancora alla funzione $u(\varrho)=(r^2-\varrho^2)^3$, e troviamo per la media $\varphi(r)$ l'equazione

$$\int_0^r \varphi(\varrho)(2\varrho^2 - r^2)\varrho d\varrho = 0,$$

ossia, posto $\varrho^2=t$, $\varphi(\varrho)=\psi(t)$,

$$\int_0^{r^2} \psi(t)(2t - r^2) dt = 0$$

donde concludiamo come dianzi che φ coincide quasi ovunque con una costante. Il nostro assunto è così completamente provato (?).

(?) Nella mia nota cit. (4), ove tratto il solo caso dello spazio Σ_2 , trovasi per una svista $(r-\varrho)^3$ in luogo di $(r^2-\varrho^2)^3$ (pag. 53); così nelle formole successive vanno ripristinati r^2 e ϱ^2 al posto di r e ϱ .

Abbiamo stabilito in tal modo il teorema di esistenza per l'equazione di POISSON generalizzata col definire i Δ_2 , densità della distribuzione M_u , mediante la formola (1) (n.° 2); i risultati fondamentali della teoria del potenziale logaritmico assicurano poi che a questi Δ_2 si potrà restituire il significato ordinario sotto ipotesi assai larghe, per esempio non appena la densità si supponga differenziabile.

5. - Del risultato ottenuto sono semplici corollari i teoremi di esistenza degli *integrali abeliani* su S . Invero, per costruire questi integrali si deve disporre di funzioni armoniche su S assoggettate a certe condizioni, consistenti in singolarità prescritte, o nella polidromia dovuta ad assegnati moduli di periodicità; e si può ottenere una di tali funzioni partendo da una funzione $u(P)$ verificante le date condizioni ma per il resto arbitraria, deducendone la distribuzione M_u ⁽⁸⁾ e (riconosciuta soddisfatta l'equazione $M_u(S)=0$) passando alla funzione regolare e monodroma $v(P)$ (individuata a meno di una costante additiva arbitraria) per cui $M_u=M_v$: la differenza $u-v$ darà la funzione armonica richiesta.

Consideriamo in particolare il caso di un integrale di seconda specie: assegnato il polo P_0 , e scelta una variabile locale $x+iy$ che rappresenti un intorno di P_0 sopra un intorno I dell'origine, si tratta di costruire una funzione armonica su S e regolare ovunque fuorchè in P_0 , dove presenti il comportamento di $\frac{x}{x^2+y^2}$. Assumiamo come $u(P)$ una qualunque funzione continua con le sue derivate seconde per $P \neq P_0$, nulla fuori di un intorno di P_0 rappresentato internamente ad I , e coincidente in un intorno più ristretto con $\frac{x}{x^2+y^2}$. La massa complessiva $M_u(S)$ sarà nulla poichè, detta γ una circonferenza sufficientemente piccola con centro nell'origine, si ha

$$M_u(S) = \iint_I \Delta_2 u dx dy = \int_{\gamma} \frac{d}{dn} \frac{x}{x^2+y^2} ds = 0.$$

Esiste pertanto la funzione $v(P)$ per cui $M_v=M_u$, e quindi anche la funzione armonica cercata.

Per ottenere invece la parte reale di un integrale di prima specie (funzione di prima specie) dobbiamo imporre alla funzione armonica di essere ovunque regolare, però polidroma per la presenza di dati moduli di periodicità (ciclici). Partiamo qui da una qualunque funzione $u(P)$ dotata di siffatta polidromia; si costruiscono senza difficoltà quantesivogliono funzioni di questo tipo, ricorrendo alla riduzione canonica della superficie di RIEMANN, mediante retrosezioni, ad un campo semplice a più contorni. I $\Delta_2 u$ dipendono ovviamente dal punto di S

⁽⁸⁾ Questa si definisce o direttamente mediante i Δ_2 , calcolati prescindendo dagli eventuali punti singolari, o attraverso la formola (1), applicata a porzioni di S non contenenti alcun punto singolare.

e dalla variabile locale, ma non dalla determinazione scelta per u , sicchè si può definire anche in questo caso la distribuzione M_u . Che $M_u(S)=0$ si prova poi subito decomponendo già al n.º 2 la superficie, ed osservando che si ha

$$\sum_k \iint_{D_k} \Delta_2 u_k(x, y) dx dy = \sum_k \int_{\gamma_k} \frac{du_k}{dn} ds = 0,$$

dove γ_k è il contorno di D_k , n la normale interna, ed $u_k(x, y)$ la trasformata di una qualsiasi determinazione di u in S_k ; ogni elemento di uno degli integrali curvilinei distruggendosi con un corrispondente elemento di un altro integrale. Dunque anche in questo caso l'equazione di POISSON $M_v = M_u$ ammette soluzione.

Trattiamo infine il caso di un integrale di terza specie. Le singularità logaritmiche P_1 e P_2 possono supporre arbitrariamente prossime, quando si decomponga l'integrale cercato in una somma di integrali dello stesso tipo. Rappresentato un intorno di P_1 e P_2 sull'intorno I dell'origine, le immagini Q_1 e Q_2 di questi punti cadano internamente ad una circonferenza γ interna ad I , ed r_1, r_2 siano le distanze di un punto generico (x, y) da Q_1, Q_2 . Imponiamo ora alla funzione $u(P)$ di coincidere con $\log r_1 - \log r_2$ in un intorno H di P_1, P_2 contenente l'immagine di γ , e di annullarsi fuori di un intorno più ampio H' rappresentato internamente ad I . Risulterà allora

$$M_u(S) = \iint_I \Delta_2 u dx dy = \int_{\gamma} \left(\frac{d}{dn} \log r_1 - \frac{d}{dn} \log r_2 \right) ds = 0,$$

donde si concluderà ancora una volta all'esistenza della funzione $v(P)$.

La funzione armonica monodroma $u-v$ ha per coniugata (a meno di una funzione armonica di prima specie) una funzione polidroma, dotata del modulo di periodicità logaritmico $\pm 2\pi$, in corrispondenza dei due punti P_1 e P_2 . Anche questa si può costruire direttamente, prendendo la funzione ausiliaria eguale in H alla differenza $\theta_1 - \theta_2$ tra le anomalie del punto (x, y) relative ai punti Q_1 e Q_2 , e nulla a meno di multipli di 2π fuori di H' .

6. - Dei precedenti teoremi il caso particolare più semplice è quello relativo all'esistenza di una variabile complessa su una superficie chiusa semplicemente connessa, cioè alla rappresentazione conforme di questa superficie sulla sfera. Conseguenza immediata di tale risultato è il teorema fondamentale sulla rappresentazione conforme di una superficie aperta semplicemente connessa, almeno nel caso analitico. Sia invero S una superficie analitica semplicemente connessa, a contorno analitico, nello spazio ordinario. È ben nota l'osservazione di SCHWARZ secondo la quale le due facce S_1 e S_2 di S possono riguardarsi connesse lungo il contorno in guisa da costituire un'unica superficie chiusa \tilde{S} , dotata ovunque

