

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

**Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due  
variabili a variazione limitata**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 8, n° 1  
(1939), p. 41-50

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1939\\_2\\_8\\_1\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_41_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA DIFFERENZIABILITÀ ASINTOTICA DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI A VARIAZIONE LIMITATA (\*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

1. - Riprendendo i lavori di RADEMACHER <sup>(1)</sup> sulla differenziabilità totale (nel senso di STOLZ) di una funzione di due variabili reali, allargando le ipotesi enunciate da questo Autore, e dopo una approfondita analisi sulle condizioni di esistenza del differenziale totale, W. STEPANOFF <sup>(2)</sup> fu portato a porre il seguente concetto di differenziabilità totale *asintotica*, più largo di quello posto dallo STOLZ:

« Diremo che una funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme misurabile  $E$ , è *asintoticamente differenziabile* nel punto  $(x, y)$  di  $E$ , se esiste un insieme misurabile  $E_{xy}$  appartenente ad  $E$ , avente in tale punto densità 1, in modo che se  $(x+h, y+k)$  appartiene ad  $E_{xy}$ , l'incremento corrispondente della funzione si possa esprimere come segue:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = A(x, y) \cdot h + B(x, y) \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot R(x, y; h, k)$$

con  $R(x, y; h, k) \rightarrow 0$  quando  $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ , il limite essendo calcolato per i punti  $(x+h, y+k)$  di  $E_{xy}$  ».

Intorno ai concetti introdotti da RADEMACHER e da STEPANOFF hanno lavorato U. S. HASLAM-JONES <sup>(3)</sup> e J. C. BURKILL <sup>(4)</sup>, estendendo le considerazioni di quegli Autori ed enunciando alcune notevoli proprietà per particolari classi di funzioni. Essi fra l'altro hanno dimostrato che ogni funzione a variazione limitata secondo ARZELÀ è totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ), quasi dappertutto. Un tale risultato non è valido però per la classe di funzioni, più larga, a variazione limitata secondo TONELLI, neanche, come è noto <sup>(5)</sup>, se si ammette l'ipotesi della assoluta continuità. Nel lavoro citato in <sup>(4)</sup> viene però dimostrato

---

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) H. RADEMACHER: *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit*, I e II. *Mathematische Annalen*, 79 (1919), pp. 340-359 e 81 (1923), pp. 52-63.

(2) W. STEPANOFF: *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*. *Recueil de la Soc. Math. de Moscou*, 32 (1924), pp. 511-526.

(3) U. S. HASLAM-JONES: *Derivate planes and tangent planes of a measurable function*. *Quarterly Journal of Math. Oxford*, 3 (1932), pp. 120-132.

(4) J. C. BURKILL and U. S. HASLAM-JONES: *Note on the differentiability of functions of two variables*. *Journal of the London Math. Society*, vol. VII (1932), pp. 297-305.

(5) Cfr. loc. cit. in <sup>(2)</sup> pp. 515-516; SAKS: *On the surfaces without tangent planes*. *Annals of Mathematics* (1933-1934), pp. 114-124.

che le funzioni quasi continue che sono a variazione limitata secondo TONELLI e che soddisfano ad un'ulteriore condizione (che indicherò più oltre), godono della differenziabilità totale asintotica, quasi dappertutto.

Uno degli scopi della presente breve Nota è di provare come si possa fare a meno di porre tale ulteriore condizione ed inoltre che il risultato rimane valido anche per quelle funzioni più generali che il TONELLI ha chiamato generalmente a variazione limitata <sup>(6)</sup>, e che qui vanno supposte anche quasi continue. Ma, mentre questo risultato potremmo ottenerlo molto rapidamente sfruttando una proposizione dovuta allo STEPANOFF, noi preferiamo di dedurlo da alcune considerazioni e da un teorema, che qui proveremo e che ne estende un altro dovuto a BURKILL e HASHAM-JONES, considerazioni e teorema che sono molto utili anche per altre ricerche.

2. - La funzione  $f(x, y)$  che supporrò definita nel quadrato

$$Q: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (7),$$

è ivi a variazione limitata <sup>(8)</sup> se, indicata con  $V_y(\bar{x}, y_0)$  ( $0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1$ ) la variazione totale della funzione della sola  $y$ ,  $f(\bar{x}, y)$  per  $y$  variabile in  $(0, y_0)$  e con  $V_x(x_0, \bar{y})$  ( $0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1$ ) quella della  $f(x, \bar{y})$  per  $x$  variabile in  $(0, x_0)$ , le due funzioni  $V_y(x, 1)$ ,  $V_x(1, y)$ , rispettivamente della  $x$  e della  $y$ , sono finite in quasi tutto  $(0, 1)$ , quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE).

Ad ogni funzione  $f(x, y)$  a variazione limitata vengono così a corrispondere due funzioni  $V_x(x, y)$  e  $V_y(x, y)$  definite in  $Q$  e se la  $f(x, y)$  è in  $Q$  continua, le  $V_x(x, y)$  e  $V_y(x, y)$  risultano quasi continue; ciò non è però più vero se la  $f(x, y)$  è in  $Q$  soltanto quasi continua; è precisamente, in questo caso generale, l'ipotesi della quasi continuità superficiale delle  $V_x(x, y)$  e  $V_y(x, y)$  che BURKILL e HASLAM-JONES hanno aggiunto per dimostrare la differenziabilità totale asintotica quasi dappertutto della  $f(x, y)$ .

Come ho già detto, prenderò senz'altro in esame *le funzioni quasi continue  $f(x, y)$  generalmente a variazione limitata*, e richiamo la loro definizione <sup>(9)</sup>: « Una funzione  $f(x, y)$  è, nel quadrato fondamentale  $Q$  di vertici opposti  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ , *generalmente a variazione limitata*, se esiste un insieme  $E$  di punti di  $Q$  di misura superficiale nulla, tale che, indicate con  $V_x(x_0, y)$ ,  $V_y(x, y_0)$  ( $0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ) le variazioni totali della  $f(x, y)$  considerata rispet-

<sup>(6)</sup> L. TONELLI: *Sulle funzioni generalmente a variazione limitata*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (1936), pp. 315-320.

<sup>(7)</sup> Ciò solo per semplicità, valendo, tutto quel che dirò, per funzioni  $f(x, y)$  definite in un *campo* (insieme misurabile) qualunque  $A$  del piano  $(x, y)$ .

<sup>(8)</sup> Intenderò sempre, d'ora in poi, a variazione limitata, secondo TONELLI.

<sup>(9)</sup> Cfr. L. TONELLI, loc. cit. in <sup>(6)</sup> e L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1936, pp. 299-313.

tivamente come funzione della sola  $x$  in  $(0, x_0)$  e della sola  $y$  in  $(0, y_0)$  — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla  $f(x, y)$  nei punti di  $E$  — le  $V_x(1, y)$  e  $V_y(x, 1)$  risultino, come funzioni rispettivamente di  $y$  e di  $x$  nell'intervallo  $(0, 1)$ , quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE) ».

3. - L. CESARI (loc. cit. in <sup>(9)</sup>), sviluppando, fra l'altro, per altre ricerche, un'osservazione del TONELLI <sup>(10)</sup>, e partendo dalla funzione  $f(x, y)$  quasi continua e generalmente a variazione limitata in  $Q$ , costruisce <sup>(11)</sup> una funzione quasi continua in  $Q$ ,  $\bar{f}(x, y)$ , la quale è quasi dappertutto in  $Q$  uguale alla  $f(x, y)$  e gode inoltre della proprietà che, se  $\bar{x}$  è un punto non appartenente ad un opportuno insieme  $a_x$  di  $(0, 1)$  di misura lineare nulla, la  $\bar{f}(\bar{x}, y)$  considerata come funzione soltanto della  $y$  è a variazione limitata, ha sole discontinuità a destra ed è continua per  $y=0$ . Per questa  $\bar{f}(\bar{x}, y)$  vale perciò il noto teorema <sup>(12)</sup> secondo il quale le

somme  $\sum_1^n |\bar{f}(\bar{x}, y_{i+1}) - \bar{f}(\bar{x}, y_i)|$  ( $0=y_1 < y_2 < \dots < y_n=1$ ) tendono uniformemente

alla variazione totale della  $\bar{f}(\bar{x}, y)$  in  $(0, 1)$  quando tende a zero la massima parte in cui i punti  $y_i$  dividono l'intervallo  $(0, 1)$ . Indico con  $\bar{V}_y(x, y)$  la variazione totale della  $\bar{f}(x, y)$ , considerata come funzione della sola  $y$  sull'intervallo  $(0, y)$ , dove è  $0 \leq y \leq 1$  (variazione totale che è calcolata tenendo conto di *tutti* i valori assunti dalla  $\bar{f}(x, y)$ ). È allora facile dedurre, col solito ragionamento che si fa per le funzioni continue <sup>(13)</sup>, che per ogni  $\bar{x}$  non appartenente ad  $a_x$ , la  $\bar{V}_y(\bar{x}, y)$  è funzione di  $y$  continua a sinistra. Inoltre, come ha mostrato il CESARI <sup>(14)</sup>, per ogni  $\bar{y}$  di  $(0, 1)$  la  $\bar{V}_y(x, \bar{y})$  è funzione quasi continua di  $x$  in  $(0, 1)$ .

4. - Mi propongo ora di dimostrare che la  $\bar{V}_y(x, y)$  è funzione quasi continua, come funzione di  $(x, y)$ , in tutto  $Q$ . Per questo, osservo anzitutto che, essendo l'insieme  $a_x$  di misura lineare nulla, sul segmento  $(0, 1)$  dell'asse delle  $x$  è possibile costruire un plurintervallo aperto  $\Delta_{a_x} < \frac{1}{2n}$ , con  $n$  intero positivo, che racchiuda tutti i punti di  $a_x$ . Chiamo poi  $A_x$  l'insieme, di misura superficiale nulla, dei punti  $(x, y)$  di  $Q$  in cui  $x$  appartiene ad  $a_x$  ed è  $0 \leq y \leq 1$ , e scelgo un insieme

<sup>(10)</sup> L. TONELLI: *Serie Trigonometriche*. Bologna, Zanichelli, 1928, pag. 449, nota 1.

<sup>(11)</sup> Cfr. loc. cit. in <sup>(9)</sup>, pp. 303-305.

<sup>(12)</sup> Il teorema nella forma più generale trovasi in L. TONELLI: *Sopra alcuni polinomi di approssimazione*. Annali di Matematica, t. XXV, s. III, 1916, pp. 275-316, n.º 14. Per le funzioni continue verso destra tale teorema fu ritrovato recentemente da T. VIOLA: *Funzioni a variazione limitata continue verso destra*. Rendiconti Accademia dei Lincei, 1932, vol. XV, pp. 626-629.

<sup>(13)</sup> L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, pag. 43. Zanichelli, Bologna, 1921.

<sup>(14)</sup> Cfr. loc. cit. in <sup>(9)</sup>, pag. 305.

numerabile uniformemente denso di punti  $y_i$  di  $(0, 1)$  (per esempio l'insieme dei punti di ordinata razionale di  $(0, 1)$  dell'asse delle  $y$ ). Per la quasi continuità in  $(0, 1)$  della funzione della sola  $x$ ,  $\bar{V}_y(x, y_1)$ , è possibile costruire sul segmento  $(0, 1)$  dell'asse delle  $x$  un plurintervallo aperto  $\Delta_1 < \frac{1}{n \cdot 2^2}$  a prescindere dal quale la  $\bar{V}_y(x, y_1)$  è funzione, della sola  $x$ , continua; analogamente è possibile costruire un plurintervallo aperto  $\Delta_2 < \frac{1}{n \cdot 2^3}$  sul segmento  $(0, 1)$  dell'asse delle  $x$ , a prescindere dal quale la  $\bar{V}_y(x, y_2)$  è funzione, della sola  $x$ , continua; e così, in generale, è possibile costruire un plurintervallo aperto  $\Delta_m < \frac{1}{n \cdot 2^{m+1}}$  sul segmento  $(0, 1)$  dell'asse delle  $x$  a prescindere dal quale la  $\bar{V}_y(x, y_m)$  è funzione, della sola  $x$ , continua. Costruisco ora un plurintervallo aperto  $\Delta$  tale che sia

$$\Delta \leq \Delta_{a_x} + \Sigma \Delta_m < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2 \cdot n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots \right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e che contenga tutti gli intervalli di  $\Delta_{a_x}$ ,  $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \dots$ . L'insieme  $\bar{\Delta}$  dei punti  $(x, y)$  tali che  $x$  appartenga a  $\Delta$ , e  $0 \leq y \leq 1$ , che è quindi formato da un numero finito o da una infinità numerabile di rettangoli non sovrappoventisi, coi lati paralleli all'asse delle  $y$  di lunghezza uguale all'unità, ha misura superficiale  $< \frac{1}{n}$ .  $\bar{\Delta}$  contiene inoltre tutti i punti di  $A_x$ . Chiamando  $Q'$  l'insieme  $Q - \bar{\Delta}$ , per ogni punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  di  $Q'$  e di continuità per la  $\bar{f}(\bar{x}, y)$  come funzione della sola  $y$ , e quindi di continuità per la  $\bar{V}_y(\bar{x}, y)$  considerata come funzione della sola  $y$ , è possibile, in corrispondenza a un numero positivo arbitrario  $\varepsilon$ , determinare due numeri  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che si abbia

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2) - \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

e si può sempre fare in modo che i punti  $(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)$ ,  $(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)$  cadano su due rette del sistema  $y = y_i$ . Si può poi trovare un numero  $\delta^* > 0$  tale che, per tutti gli  $x$  soddisfacenti alla  $|x - \bar{x}| \leq \delta^*$  e se i punti  $(x, \bar{y} + \delta_2)$ ,  $(x, \bar{y} - \delta_1)$  appartengono a  $Q'$ , si abbia

$$(2) \quad \begin{cases} |\bar{V}_y(x, \bar{y} + \delta_2) - \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\bar{V}_y(x, \bar{y} - \delta_1) - \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $Q'$  con  $|x - \bar{x}| \leq \delta^*$ ,  $\bar{y} - \delta_1 \leq y \leq \bar{y} + \delta_2$ , essendo la  $\bar{V}_y(x, y)$  funzione non decrescente di  $y$  per ogni  $x$  fissato e osservando che i punti  $(x, \bar{y} + \delta_2)$ ,  $(x, \bar{y} - \delta_1)$  appartengono necessariamente a  $Q'$ , dalle (1) e (2) si deduce

$$|\bar{V}_y(x, y) - \bar{V}_y(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon.$$

La  $\bar{V}_y(x, y)$  è così continua in  $(\bar{x}, \bar{y})$  a prescindere dai punti di  $\bar{\Delta}$ . Si osservi

ora che essendo su ogni parallela all'asse delle  $y$ , tranne quelle appartenenti a  $\bar{A}$ , la  $\bar{f}(x, y)$  a variazione limitata, su ognuna di tali parallele esistono al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità per la  $\bar{f}(x, y)$ . Essi complessivamente costituiscono quindi (come facilmente si vede) un insieme di misura superficiale nulla, e per quanto sopra si è notato, si può dire che quasi dappertutto in  $Q'$  la  $\bar{V}_y(x, y)$  è funzione continua, e, pertanto, che essa è quasi continua in  $Q$ , essendo la misura di  $Q - Q'$  uguale a quella di  $\bar{A}$  e perciò  $< \frac{1}{n}$ , con  $n$  intero positivo arbitrario.

5. - Di quanto si è stabilito al numero precedente darò una seconda dimostrazione. Osservo subito che, per il nostro scopo, si può senz'altro trascurare l'insieme  $A_x$  definito al n.º 4. Scelto anche qui un insieme numerabile uniformemente denso di punti  $y_i$  di  $0 \leq y \leq 1$ , dico  $\Lambda$  l'insieme dei punti di  $Q - A_x$  per cui è  $\bar{V}_y(x, y) > m$ ,  $m$  essendo un numero fissato arbitrariamente. Essendo misurabile linearmente (n.º 3) la funzione di  $x$ ,  $\bar{V}_y(x, y_i)$  (in cui suppongo fissato  $y_i$ ), è misurabile linearmente l'insieme dei punti  $\lambda_{y_i}$  di  $Q - A_x$  che cadono sulla retta  $y = y_i$  e per cui è  $\bar{V}_y(x, y_i) > m$ . Chiamo  $\Lambda_{y_i}$  l'insieme di tutti i punti  $(x, y)$  di  $Q$  tali che  $x$  sia l'ascissa di un punto di  $\lambda_{y_i}$  e  $y_i \leq y \leq 1$ . Come è noto,  $\Lambda_{y_i}$  risulta superficialmente misurabile (è anzi la misura di  $\Lambda_{y_i}$  uguale a quella di  $\lambda_{y_i}$  moltiplicata per  $(1 - y_i)$ ). Poichè  $\bar{V}_y(x, y)$  è funzione non decrescente di  $y$  per ogni  $x$  fissato,  $\Lambda_{y_i}$  fa parte di  $\Lambda$ . Se poi  $(x_0, y_0)$  è un punto di  $Q - A_x$  per cui è  $\bar{V}_y(x_0, y_0) > m$ , dico che allora esso dovrà appartenere a un  $\Lambda_{y_i}$ . Infatti, non appartenendo  $x_0$  ad  $A_x$ , la funzione  $\bar{V}_y(x_0, y)$  è continua a sinistra come funzione di  $y$ , e quindi alla sinistra di  $(x_0, y_0)$  sulla retta  $x = x_0$  esiste un intorno in cui è sempre  $\bar{V}_y(x_0, y) > m$  e in tale intorno un punto  $y_j$  per cui è anche  $\bar{V}_y(x_0, y_j) > m$ . È così visto che  $(x_0, y_0)$  appartiene a  $\Lambda_{y_j}$ . Risulta dunque  $\Lambda = \sum \Lambda_{y_i}$ , da cui segue che  $\Lambda$  è misurabile superficialmente. La  $\bar{V}_y(x, y)$  è pertanto superficialmente misurabile in  $Q - A_x$  e perciò anche in  $Q$ .

6. - Analogamente a quanto si è fatto per la  $\bar{f}(x, y)$ , si può costruire in  $Q$  una funzione quasi continua  $\bar{\bar{f}}(x, y)$ , quasi dappertutto uguale alla  $f(x, y)$ , per la quale la corrispondente variazione totale, come funzione della sola  $x$ ,  $\bar{\bar{V}}_x(x, y)$  risulta quasi continua come funzione di  $(x, y)$  in tutto  $Q$ , e inoltre la  $\bar{\bar{V}}_x(\bar{x}, y)$  è funzione quasi continua della  $y$  in  $(0, 1)$  per ogni  $\bar{x}$  di  $(0, 1)$ . Ne viene allora, analogamente a quanto ha fatto vedere il CESARI <sup>(15)</sup>, che si può determinare un insieme  $E'$  contenente  $E$  (n.º 2) di punti di  $Q$ , di misura superficiale nulla, in modo che, dette  $V_x^*(x, y)$  e  $V_y^*(x, y)$  le variazioni totali della  $f(x, y)$ , calcolate senza tenere alcun conto dei valori della  $f(x, y)$  in  $E'$ , si abbia, quasi dappertutto in  $Q$ ,  $V_x^*(x, y) = \bar{\bar{V}}_x(x, y)$ ,  $V_y^*(x, y) = \bar{V}_y(x, y)$  — donde risulta che  $V_x^*(x, y)$

<sup>(15)</sup> Cfr. loc. cit. in <sup>(9)</sup>, pag. 305.

e  $V_y^*(x, y)$  sono funzioni di  $(x, y)$  quasi continue in  $Q$  — e in modo anche che  $V_x^*(\bar{x}, y)$  e  $V_y^*(x, \bar{y})$  risultino funzioni quasi continue rispettivamente di  $y$  e di  $x$  per tutti gli  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  di  $(0, 1)$ . Essendo poi  $V_x^*(x, y) \leq V_x^*(1, y)$ ,  $V_y^*(x, y) \leq V_y^*(x, 1)$ , le  $V_x^*(x, y)$  e  $V_y^*(x, y)$  risultano finite quasi dappertutto in  $Q$ , e le  $V_x^*(1, y)$ ,  $V_y^*(x, 1)$  risultano, come funzioni rispettivamente di  $y$  e di  $x$ , integrabili in  $(0, 1)$ .

7. - Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA: *Se  $f(x, y)$  è una funzione quasi continua in  $Q$  ed ivi generalmente a variazione limitata, dato un numero positivo arbitrario  $\sigma$ , esistono un numero positivo  $N$  ed un insieme  $E^*$  di punti di  $Q$ , tali che si abbia  $m(Q) - m(E^*) < \sigma$  <sup>(16)</sup>, e*

$$\frac{|f(x', y') - f(x, y)|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leq N,$$

per ogni coppia  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  di punti di  $E^*$ .

Senza restrizione per la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, si può sempre supporre che  $f(x, y)$  sia quasi continua linearmente sui lati del quadrato  $Q$ . Si può anche supporre che su questi lati l'insieme  $E'$  (considerato al n.° 6) abbia soltanto punti costituenti insiemi lineari di misura nulla. Si dica  $J$  l'insieme delle rette parallele all'asse  $x$  su cui  $V_x^*(1, y)$  <sup>(17)</sup> non risulti finita, di quelle pure parallele all'asse  $x$  su cui l'insieme  $E'$  sechi insiemi di misura lineare non nulla od eventualmente non misurabili (linearmente), ed infine di quelle, sempre parallele all'asse delle  $x$ , che passano per i punti  $(0, y)$  appartenenti ad  $E'$ . L'insieme dei valori  $y'$  corrispondenti a tutte queste parallele risulta di misura lineare nulla.

Sull'insieme  $E''$  costituito dai punti del quadrato  $Q$  che non appartengono alle rette del sistema  $J$ , nè all'insieme  $E'$ , si definiscano le due funzioni  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  mediante le due eguaglianze <sup>(17)</sup>:

$$(1) \quad \begin{cases} V_x^*(x, y) = P(x, y) + Q(x, y) \\ f(x, y) - f(0, y) = P(x, y) - Q(x, y), \end{cases}$$

da cui risulta che, essendo

$$P(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) + f(x, y) - f(0, y)}{2}$$

$$Q(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) - f(x, y) + f(0, y)}{2},$$

le  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sono in  $E''$  (per quanto si è visto al n.° 6) funzioni quasi continue di  $(x, y)$  e, inoltre, funzioni non negative e non decrescenti di  $x$  per ogni  $y$

<sup>(16)</sup> Con  $m(Q)$  e  $m(E^*)$  indico le misure di  $Q$  e di  $E^*$ .

<sup>(17)</sup> Si tenga presente che  $V_x^*(x, y)$  e  $V_y^*(x, y)$  sono calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla  $f(x, y)$  sull'insieme  $E'$  (considerato al n.° 6).

fissato. Se  $y=y_0$  è una retta non appartenente all'insieme  $J$ , l'insieme dei punti  $\pi_{y_0}$  che  $E''$  sega su essa ha misura lineare eguale a 1. Chiamo  $\omega_{y_0}$  l'insieme (di misura lineare nulla) complementare di  $\pi_{y_0}$  rispetto al segmento  $(0, 1)$ , su cui quindi  $P(x, y_0)$  e  $Q(x, y_0)$  non sono definite. Poichè  $P(x, y_0)$  nell'insieme  $\pi_{y_0}$  è funzione finita non decrescente, non negativa di  $x$ , se  $\bar{x}$  è un punto di  $\omega_{y_0}$ , esisterà finito il limite di  $P(x, y_0)$  per  $x \rightarrow \bar{x}-0$ , con  $(x, y_0)$  appartenente a  $\pi_{y_0}$ ; assumo tale limite come valore di  $P(x, y_0)$  nel punto  $(\bar{x}, y_0)$ . Così facendo per ogni punto di  $\omega_{y_0}$ , e ponendo  $P(x, y_0)=0$  per  $x < 0$  e  $P(x, y_0)=P(1, y_0)$  per  $x > 1$ , la  $P(x, y_0)$  viene ad essere definita su tutta la retta  $y=y_0$ , su cui risulta non negativa, non decrescente. Per ogni punto  $(x, y)$  di  $Q$  in cui la  $P(x, y)$  risulta così definita (quindi esclusi *tutti e soli* i punti  $(x, y')$  essendo  $y=y'$  una retta del sistema  $J$ ), si indichi con  $p(x, y)$  l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h} \right|$$

considerata per tutti i valori di  $h \neq 0$ .

Mostrerò anzitutto che  $p(x, y)$  è funzione quasi continua di  $(x, y)$ . Se  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n, \dots$  è un insieme numerabile uniformemente denso di numeri non nulli dell'intervallo  $(-1, 1)$ , per essere la  $P(x, y)$  funzione non decrescente di  $x$ , per ogni  $y$  fissato ( $y \neq y'$ ), si può considerare  $p(x, y)$  come estremo superiore dell'espressione:

$$\left| \frac{P(x+h_r, y) - P(x, y)}{h_r} \right|.$$

Poichè l'espressione entro il segno di valore assoluto è, per ogni  $h_r$ , funzione quasi continua di  $(x, y)$ , tale è  $p(x, y)$  come estremo superiore di un insieme numerabile di tali funzioni.

Fissato ora un numero positivo  $L$  e detto  $e$  l'insieme dei punti  $(x, y)$  in cui è  $p(x, y) > \frac{1}{8}L$ , si consideri la sezione  $e(y_0)$  di  $e$  con la retta  $y=y_0$  e si osservi che ad ogni punto di  $e(y_0)$  è associato almeno un segmento, di lunghezza  $|\bar{h}|$  della retta  $y=y_0$ , che ha tale punto come estremo e per cui è:

$$\left| \frac{P(x+\bar{h}, y) - P(x, y)}{\bar{h}} \right| > \frac{1}{8}L.$$

Ricordando un lemma del VITALI <sup>(48)</sup>, si può scegliere un numero finito di

<sup>(48)</sup> Il lemma è il seguente:

« Sia  $E$  un insieme lineare di misura esterna finita  $m_e(E)$ . Supponiamo che ad ogni punto  $P$  di  $E$  siano associati uno o più intervalli chiusi contenenti  $P$  come punto interno o come estremo. Dato allora un numero  $\varepsilon > 0$ , si può scegliere un insieme  $\mathcal{E}$  di un numero finito di intervalli associati non sovrappontendosi tali che  $m(\mathcal{E}) > \frac{1}{3}m_e(E) - \varepsilon$  ».

In una forma leggermente diversa, ma del resto perfettamente equivalente, esso si trova in VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*. Atti Accademia Scienze, Torino, vol. XLIII, 1908, pag. 230.



tali segmenti in modo che risultino non sovrappontersi e che, dette  $|\bar{h}_1|, |\bar{h}_2|, \dots, |\bar{h}_s|$  le loro lunghezze, risulti

$$\begin{aligned} m(e(y_0)) &\leq 4 \sum_1^s |\bar{h}_i| < 4 \cdot 8L^{-1} \sum_1^s |P(x + \bar{h}_i, y) - P(x, y)| < \\ &< 32L^{-1} P(1, y_0) \leq 32L^{-1} V_x^*(1, y_0). \end{aligned}$$

Da qui integrando si ha:

$$m(e) = \int_0^1 m(e(y)) dy < 32L^{-1} \int_0^1 V_x^*(1, y) dy = AL^{-1},$$

dove  $A$  è una costante positiva indipendente da  $L$ .

Ragionando analogamente su  $Q(x, y)$  come si è fatto su  $P(x, y)$ , si ha, per la seconda delle uguaglianze (1),

$$(2) \quad \left| \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right| \leq \frac{1}{8} L + \frac{1}{8} L = \frac{1}{4} L,$$

essendo  $(x, y)$  e  $(x+h, y)$  due punti qualunque del quadrato  $Q$ , purchè non appartenenti ad un certo insieme di misura superficiale  $< 2AL^{-1}$ .

Analogamente si dimostra che in un insieme corrispondente è

$$(3) \quad \left| \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right| \leq \frac{1}{4} L.$$

Preso dunque un  $\sigma > 0$  ad arbitrio, si possono trovare un numero  $L > 0$  ed un insieme chiuso  $H$  di punti di  $Q$  tali che  $m(Q) - m(H) < \frac{\sigma}{3}$  ed in modo che quando  $(x, y)$  appartiene ad  $H$  valga la (2) se anche  $(x+h, y)$  appartiene ad  $H$  e valga pure la (3) se anche  $(x, y+k)$  appartiene ad  $H$ .

Si indichi ora con  $\Delta$  un insieme chiuso di punti di  $Q$  tale che  $m(Q) - m(\Delta) < \frac{\sigma}{3}$  e sul quale la  $f(x, y)$  risulti funzione continua, e si dica  $M$  il massimo modulo di  $f(x, y)$  su  $\Delta$ . Si esamini l'insieme chiuso  $\bar{E}$  dei punti comuni ad  $H$  e a  $\Delta$ . È  $m(\bar{E}) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$ . Segando l'insieme  $\bar{E}$  con la retta  $y = \bar{y}$  si ottiene un insieme lineare  $\bar{E}_{\bar{y}}$  chiuso (e quindi misurabile). Quasi tutti i punti di  $\bar{E}_{\bar{y}}$  sono, per un noto teorema del LEBESGUE, punti di densità lineare 1 (rispetto a  $\bar{E}_{\bar{y}}$ ); e questi punti di densità lineare 1 costituiscono un insieme  $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$  di cui ogni punto è quindi di densità lineare 1 rispetto all'insieme  $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$  stesso (avendo escluso dall'insieme  $\bar{E}_{\bar{y}}$  solo l'insieme di misura lineare nulla  $\bar{E}_{\bar{y}} - \bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$ ). Si indichi ora con  $\bar{\bar{E}}$  l'insieme superficiale di tutti i punti degli  $\bar{\bar{E}}_{\bar{y}}$  per tutti gli  $\bar{y}$ . Questo in-

sieme  $\bar{E}$  è misurabile superficialmente <sup>(19)</sup>. È poi  $m(\bar{E}) = m(\bar{E}) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$ . Sia  $(\bar{x}, \bar{y})$  un qualunque punto di  $\bar{E}$  e si dica  $m(\bar{x}, \bar{y}, n)$  la misura dell'insieme dei punti di  $\bar{E}$  che cadono nell'intervallo di ampiezza  $\frac{2}{n}$  della retta  $y = \bar{y}$  e avente il centro in  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Si ponga  $\varphi_n(x, y) = \frac{n}{2} m(\bar{x}, \bar{y}, n)$ . Le funzioni  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$  definite in  $\bar{E}$  sono ivi quasi continue <sup>(20)</sup> e convergono in tutto  $\bar{E}$  al valore 1, per  $n \rightarrow \infty$ ; per il noto teorema di SEVERINI-EGOROFF è quindi possibile determinare un insieme chiuso  $E^*$  di punti di  $\bar{E}$  soddisfacente alla condizione  $m(E^*) > m(\bar{E}) - \frac{\sigma}{3} > m(Q) - \sigma$  e in cui la convergenza di  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$  verso il valore 1 è uniforme. È dunque possibile trovare un  $\bar{n} > 8$  tale che, per ogni indice  $n \geq \bar{n}$  e per ogni punto  $(x, y)$  di  $E^*$  si abbia  $\varphi_n(x, y) > \frac{8}{9}$ ; e allora, se è  $0 < \delta \leq \frac{1}{n}$ , posto  $\frac{1}{n_1 + 1} < \delta \leq \frac{1}{n_1}$ , si avrà per un qualunque punto  $(x', y')$  di  $E^*$ , e indicando con  $\bar{E}(2\delta)$  l'insieme dei punti di  $\bar{E}$  che cadono nell'intervallo  $(x' - \delta, x' + \delta)$  della retta  $y = y'$ :

$$m[\bar{E}(2\delta)] \geq m(x', y', n_1) - \left(\frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_1 + 1}\right) = m(x', y', n_1) - \frac{2}{n_1(n_1 + 1)} > \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{n_1} - \frac{2}{9n_1} = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{n_1} \geq \frac{7}{9} \cdot 2\delta.$$

Se ora  $(x, y)$  e  $(x', y')$  sono due punti qualunque di  $E^*$  con  $|x - x'| \leq \frac{1}{n}$ , i punti di  $\bar{E}$  che cadono nell'intervallo di estremi  $(x', y')$ ,  $(x, y)$ , come pure quelli che cadono nell'intervallo (di uguale ampiezza  $\delta = |x - x'|$ ) di estremi  $(x, y)$ ,  $(x', y)$ , costituiscono due insiemi ciascuno di misura  $> \frac{5}{9} \delta$ .

Ne segue che esisterà necessariamente una retta  $x = x^*$ , con  $x^*$  compreso fra  $x$  e  $x'$ , tale che i punti  $(x^*, y')$  e  $(x^*, y)$  appartengano entrambi ad  $\bar{E}$ . È allora, per le (2) e (3) (e poichè  $\bar{E}$  appartiene ad  $H$ ):

$$\begin{aligned} \frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} &\leq \left| \frac{f(x', y') - f(x^*, y')}{x' - x^*} \right| + \left| \frac{f(x^*, y') - f(x^*, y)}{y' - y} \right| + \\ &+ \left| \frac{f(x^*, y) - f(x, y)}{x^* - x} \right| \leq \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L = \frac{3}{4} L < L. \end{aligned}$$

<sup>(19)</sup> Per questo basta osservare che, dicendo  $\varphi(x, y)$  la funzione caratteristica relativa all'insieme  $\bar{E}$ , la funzione  $\psi(x, y) = \int_0^x \varphi(x, y) dx$  è superficialmente misurabile (cfr. L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti*. Rendic. Accad. Lincei, 1909, XVIII, pag. 248) e che tale è anche  $\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$ ; donde segue che è superficialmente misurabile l'insieme dei punti in cui è  $\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = 1$ .

<sup>(20)</sup> Infatti, detta  $\varphi(x, y)$  la funzione caratteristica dell'insieme  $\bar{E}$ , è

$$\varphi_n(x, y) = \frac{n}{2} \left\{ \int_0^{x + \frac{1}{n}} \varphi(x, y) dx - \int_0^{x - \frac{1}{n}} \varphi(x, y) dx \right\}.$$

