ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Osservazioni sulla misurabilità secondo Carathéodory

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 69-74
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_69_0>

OSSERVAZIONI SULLA MISURABILITÀ SECONDO CARATHÉODORY (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

§ 1. - Nota storica e posizione del problema. — W. H. YOUNG in *Theory of sets of points* (¹) svolgendo una teoria della misura degli insiemi (*content*) fu portato a definire quattro classi d'insiemi:

1°). La « inner additive class » formata dagli insiemi lineari per cui vale « l'inner addition theorem »: cioè quegli insiemi tali che, per ciascuno di essi, la misura interna della somma di questo insieme e d'un qualunque altro esterno ad esso sia uguale alla somma delle misure interne dei due insiemi. Con altre parole, se con $m_i(A)$ indichiamo la misura interna di A e se X è un qualunque insieme esterno ad A (cioè $X \subset CA$ (²)), A si metterà nella « inner additive class » quando:

$$m_i(A) + m_i(X) = m_i(A + X). \tag{1}$$

2°). La « outer additive class » formata dagli insiemi per cui vale l'« outer addition theorem ». Vale a dire, se $m_e(A)$ è la misura esterna di A, A apparterrà a questa classe se, per qualunque $X \subset CA$ è:

$$m_e(A) + m_e(X) = m_e(A + X). \tag{2}$$

3°). La « additive class » che è l'intersezione delle due classi precedenti: cioè formata dagli insiemi per cui valgono entrambe le (1) e (2).

4°). La classe degli insiemi misurabili, quella cioè formata dagli insiemi per cui sono uguali le misure interne ed esterne:

$$m_e(A) = m_i(A). \tag{3}$$

YOUNG dimostrò che tanto la « outer » quanto la « inner additive class » (e di conseguenza anche la additive class) sono contenute nella classe degli insiemi misurabili. Ma quest'ultima avrebbe potuto esssere più ampia.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) Cambridge « University Press » 1906.

(²) CA indica il complementare di A.

L. TONELLI in una nota dei « Rendiconti del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere » Serie II, vol. XLI (1908), provò (insieme a proprietà sulle discontinuità di prima specie) che:

ogni insieme misurabile appartiene alla « additive class » e perciò che le *quattro classi sopra indicate coincidono.*

Pertanto un insieme (lineare) si può definire misurabile quando la sua misura esterna (interna) soddisfa all'« outer (inner) addition theorem »; ossia

Un insieme si dirà misurabile se vale la relazione (1) [*o* (2)].

Notiamo che secondo questa definizione un plurintervallo è misurabile, e che $m_e(A)$ è uguale al limite inferiore delle misure dei plurintervalli che contengono A.

C. CARATHÉODORY nel suo libro *Vorlesungen über reelle Funktionen* (3) e, in seguito, S. SAKS in *Theory of the integral* (4) si sono proposti di svolgere una teoria della misura negli spazi astratti. Non adoperano più le funzioni d'insieme m_e e m_i ma delle funzioni che CARATHÉODORY chiama « Maßfunktionen », le quali vengono definite da quattro proprietà (che sono le proprietà essenziali di m_e).

Diremo dunque che la funzione d'insieme $\Gamma(A)$ definita su ogni insieme d'uno spazio astratto R è *una funzione di misura esterna* (Maßfunktion) quando goda delle seguenti proprietà:

I). $\Gamma(A)$ sia non negativa (cioè positiva, nulla, infinita positiva) per ogni insieme A dello spazio R. Vi siano inoltre in R degli insiemi di misura finita non nulla; e sia, per definizione, sull'insieme vuoto E, $\Gamma(E)=0$.

II). Se B è un componente di A (cioè $B\subset A$), dovrà essere anche $\Gamma(B)\leq\Gamma(A)$.

III). Se S è l'insieme somma d'una successione finita o infinita d'insiemi A_n dello spazio R, dovrà essere

$$\Gamma(S)\leq\Gamma(A_1)+\Gamma(A_2)+ \dots +\Gamma(A_n)+ \dots$$

$\Gamma(A)$ si dirà allora *misura esterna di A secondo la funzione di misura* Γ.

A queste tre, CARATHÉODORY aggiunge una quarta proprietà:

IV). Se R è uno *spazio metrico* (cioè in esso è definita una *distanza*), e se la distanza tra due insiemi A e B di R non è nulla, dovrà essere:

$$\Gamma(A)+\Gamma(B)=\Gamma(A+B).$$

Come osserva il SAKS, questa proprietà non è necessaria per lo sviluppo di gran parte della teoria: essa interviene soltanto nel dimostrare che un qualunque insieme di BOREL dello spazio R è misurabile secondo CARATHÉODORY.

---

(3) Vedere per esempio la 2ª edizione (Leipzig) p. 238 e seg.

(4) Vedere l'edizione recente in inglese, tradotta da L. C. YOUNG.

Seguendo il CARATHÉODORY:

Un insieme A dello spazio R si dice misurabile rispetto alla funzione di misura esterna Γ se, P e Q essendo due qualunque insiemi di R di misura esterna Γ finita, rispettivamente contenuto ed esterno ad A (cioè $P \subset A$, $Q \subset CA$), *si ha:*

$$\Gamma(P) + \Gamma(Q) = \Gamma(P + Q). \tag{4}$$

Questa definizione è equivalente alla seguente:

l'insieme A dello spazio R è misurabile quando, W essendo un qualunque insieme di R di misura esterna Γ finita, si ha:

$$\Gamma(W) = \Gamma(A \cdot W) + \Gamma(CA \cdot W). \tag{5}$$

La classe degli insiemi di R misurabili secondo la definizione del CARATHÉODORY la indicheremo con $\mathfrak{L}_\Gamma$, e un insieme di questa classe lo diremo un *insieme* ($\mathfrak{L}_\Gamma$),

Si dimostra che la classe $\mathfrak{L}_\Gamma$ è una *classe additiva*, cioè che, se A e B sono due insiemi ($\mathfrak{L}_\Gamma$) anche la loro somma $A + B$ è un insieme ($\mathfrak{L}_\Gamma$); e così pure per il prodotto $A \cdot B$, ecc.

Il risultato, già rammentato del TONELLI induce a porre quest'altra definizione:

D) un insieme dello spazio R si dirà misurabile rispetto a Γ se, X essendo un qualunque insieme di R esterno ad A (cioè $X \subset CA$), *si ha:*

$$\Gamma(A) + \Gamma(X) = \Gamma(A + X). \tag{6}$$

La classe di questi insiemi la chiameremo *classe* $\mathfrak{M}_\Gamma$; e un insieme di questa classe si dirà un insieme ($\mathfrak{M}_\Gamma$).

Si vede subito che un qualunque insieme ($\mathfrak{L}_\Gamma$) di misura finita appartiene alla classe $\mathfrak{M}_\Gamma$.

Poi, nel caso degli insiemi lineari e scegliendo per funzione di misura la funzione $m_e(A)$, un qualunque insieme misurabile secondo CARATHÉODORY e di misura finita è anche misurabile secondo LEBESGUE e viceversa ([5]). Ma per quanto abbiamo detto più sopra ciò accade anche per la definizione D) e cioè per gli insiemi ($\mathfrak{M}_\Gamma$). Dunque, in questo caso particolare, la definizione di CARATHÉODORY e la D) sono equivalenti.

Ci si può porre allora la domanda:

le due definizioni ora indicate sono equivalenti in generale?

§ 2. - Il CARATHÉODORY nello sviluppo della sua teoria è condotto a considerare delle funzioni di misura che chiama *regolari*, e cioè che oltre alle proprietà I), II), III) (ed anche IV)) soddisfano pure alla seguente:

([5]) Vedere, per esempio, S. SAKS: *Theorie de l'integrale* (edizione francese) pag. 31.

V). *Per qualunque insieme A di R, $\Gamma(A)$ è uguale al limite inferiore delle misure $\Gamma(B)$ degli insiemi B della classe $\mathfrak{L}_\Gamma$ che contengono A.*

Notiamo che la $m_e(A)$ della teoria della misura lineare ordinaria è regolare, come lo abbiamo fatto osservare nel paragrafo precedente. In generale, le funzioni di misura che si presentano nelle applicazioni (come anche lo afferma il SAKS [6]) sono tutte *regolari.*

Nostro scopo è di dimostrare il seguente fatto:

Per una funzione di misura $\Gamma(A)$ regolare, la definizione di misurabilità del Carathéodory e la D) sono equivalenti, quando siano applicate ad insiemi di misura esterna $\Gamma(A)$ finita.

§ 3. - Occupiamoci dunque degli insiemi dello spazio R di misura esterna Γ finita.

Basterà dimostrare che un insieme $(\mathfrak{M}_\Gamma)$ è un insieme $(\mathfrak{L}_\Gamma)$, poichè il viceversa, come abbiamo già detto, è evidente.

Premettiamo il seguente lemma enunciato dal CARATHÉODORY [7].

LEMMA: *Per la misurabilità secondo Carathéodory d'un insieme A di R è sufficiente che invece della* (5) *sia verificata la relazione*

$$\Gamma(\overline{\overline{W}})=\Gamma(A \cdot \overline{\overline{W}})+\Gamma(CA \cdot \overline{\overline{W}}), \tag{5'}$$

dove $\overline{\overline{W}}$ indica un qualunque insieme $(\mathfrak{L}_\Gamma)$ di misura finita.

Basta dimostrare che, se esiste un insieme W di R di misura esterna Γ finita e tale che:

$$\Gamma(W)<\Gamma(A \cdot W)+\Gamma(CA \cdot W),$$

ne esiste certamente almeno un altro $\overline{\overline{W}}$ per cui vale la stessa relazione e che sia inoltre un insieme $(\mathfrak{L}_\Gamma)$.

Infatti sia:

$$\Gamma(A \cdot W)+\Gamma(CA \cdot W)-\Gamma(W)=\varepsilon>0.$$

Per la definizione del paragrafo precedente di misura regolare, esiste certamente almeno un insieme $\overline{\overline{W}}$ di R della classe $\mathfrak{L}_\Gamma$, tale che

$$W \subset \overline{\overline{W}} \quad \text{e} \quad \Gamma(\overline{\overline{W}})<\Gamma(W)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

È dunque:

$$\Gamma(A \cdot W)+\Gamma(CA \cdot W)-\Gamma(\overline{\overline{W}})>0,$$

---

[6] S. SAKS: *Theory of the integral* (edizione inglese) (1937), p. 51.

[7] C. CARATHÉODORY opera citata, p. 267. Per la dimostrazione il CARATHÉODORY adopera il postulato delle infinite scelte.

ed essendo

$$A \cdot W \subset A \cdot \overline{W}, \qquad CA \cdot W \subset CA \cdot \overline{W},$$

viene

$$\Gamma(\overline{W}) < \Gamma(A \cdot \overline{W}) + \Gamma(CA \cdot \overline{W}) \qquad \text{C. D. D.}$$

Possiamo adesso dimostrare il seguente

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente per la misurabilità secondo Carathéodory d'un insieme di R di misura esterna Γ finita, è che, per ogni insieme X di R esterno ad A, sia:*

$$\Gamma(A) + \Gamma(X) = \Gamma(A + X). \tag{7}$$

La condizione necessaria è evidente.

Per la condizione sufficiente basta dimostrare che, ammessa la (7), se ne ricava la (5') per un qualunque insieme W della classe $\mathfrak{L}_\Gamma$.

Essendo $CA \cdot W \subset CA$, è, per ipotesi,

$$\Gamma(A) + \Gamma(W \cdot CA) = \Gamma(A + W \cdot CA) = \Gamma(A + W),$$

poichè $A + W \cdot CA$ è formato dagli elementi di A e dagli elementi di W che non appartengono ad A.

D'altra parte, poichè W appartiene ad $\mathfrak{L}_\Gamma$, è:

$$\Gamma(A \cdot W) + \Gamma(A \cdot CW) = \Gamma(A).$$

Perciò, sommando membro a membro, viene:

$$\Gamma(A) + \Gamma(W \cdot CA) + \Gamma(A \cdot W) + \Gamma(A \cdot CW) = \Gamma(A + W) + \Gamma(A)$$

ossia, essendo $\Gamma(A)$ finito:

$$\Gamma(W \cdot CA) + \Gamma(A \cdot W) = \Gamma(A + W) - \Gamma(A \cdot CW). \tag{8}$$

Ora è

$$\Gamma(A + W) = \Gamma(W + A \cdot CW) \leqslant \Gamma(W) + \Gamma(A \cdot CW)$$

e dunque

$$\Gamma(A + W) - \Gamma(A \cdot CW) \leqslant \Gamma(W).$$

Ma, d'altra parte,

$$\Gamma(CA \cdot W) + \Gamma(A \cdot W) \geqslant \Gamma(W);$$

e siccome, per la (8), sono uguali i primi due membri delle ultime due disuguaglianze, dovrà essere certamente:

$$\Gamma(CA \cdot W) + \Gamma(A \cdot W) = \Gamma(W)$$

che è la (5').

§ 4. - Vediamo ora che cosa accade per gli insiemi dello spazio R di misura esterna Γ infinita. Notiamo che la definizione di misurabilità secondo CARATHÉO-

DORY mantiene il suo significato mentre per la definizione D) non avviene altrettanto. Anzi quest'ultima potrebbe indurre a considerare un qualunque insieme di R di misura esterna Γ infinita, come misurabile $\mathfrak{M}_\Gamma$: infatti i due termini della (6) diventano ambedue infiniti e in un certo senso uguali. Ora ciò non accade per la misura secondo CARATHÉODORY, come faremo vedere con un esempio. Daremo cioè un insieme di misura esterna infinita non misurabile $\mathfrak{L}_\Gamma$.

Consideriamo una certa funzione di misura esterna $M_e(X)$, che chiamiamo misura superficiale, definita su tutti gli insiemi di un dato piano P.

Sia A l'insieme dei punti interni e di contorno d'una parabola π del piano P.

Definiamo adesso una funzione di misura esterna $\Gamma(X)$ per tutti gli insiemi del piano P nel modo seguente:

1°) se X è tale che non esista nessun punto di π che appartenga ad X o che sia punto limite di punti di X, si prenda per $\Gamma(X)$ la misura esterna $M_e(X)$ dell'insieme.

2°) se X è invece tale che esistano punti di π che siano punti di X o punti limiti di punti di X si prenda per $\Gamma(X)$ la somma di $M_e(X)$ e della misura esterna lineare contata sulla parabola dell'insieme dei punti predetti.

Questa funzione gode delle proprietà I), II), III) delle funzioni di misura esterna (Maßfunktionen). La I) è evidentemente soddisfatta.

Per la II) dimostriamo che, se X e Y sono insiemi del piano P con $X \subset Y$, è $\Gamma(X) \leqslant \Gamma(Y)$. Se X appartiene alla prima delle due categorie sopra considerate ciò è evidente. Se, invece, appartiene alla seconda categoria, a tale categoria appartiene Y e i punti limiti di X sono anche punti limiti di Y. Dunque i punti della parabola π che vanno considerati per Y formano un insieme che contiene quello dei punti di π che vanno considerati per X. Da ciò viene l'asserto.

Per la III) proviamo che, X e Y essendo due insiemi qualunque del piano P, è

$$\Gamma(X) + \Gamma(Y) \geqslant \Gamma(X + Y).$$

Anche questo è evidente perchè, se mai un medesimo arco della parabola π può essere contato due volte nel primo membro e una sola volta nel secondo.

Si potrebbe provare che è verificata anche la IV) condizione; ma ciò, non avendo importanza per il nostro scopo, sarà tralasciato.

Ora l'insieme A non è misurabile secondo CARATHÉODORY: Basta infatti, prendere per insiemi P' e Q' due insiemi di misura esterna finita che abbiano uno stesso confine sulla parabola π di misura esterna lineare finita e non nulla (questi insiemi esistono evidentemente e Q' va pensato non contenente nessun punto di π) e sia P' interno ad A e Q' esterno.

Si avrà allora di certo $\Gamma(P') + \Gamma(Q') > \Gamma(P' + Q')$ perchè la lunghezza dell'arco di confine tra P' e Q' è contata due volte nel primo membro e una sola nel secondo.

Con ciò viene provata *la differenza essenziale delle due definizioni, la D) e quella di Carathéodory, per gli insiemi di misura esterna infinita.*