

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

JOSEPH MARCINKIEWICZ

**Sur une méthode remarquable de sommation des  
séries doubles de Fourier**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 8, n° 2  
(1939), p. 149-160

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1939\\_2\\_8\\_2\\_149\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_149_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE MÉTHODE REMARQUABLE DE SOMMATION DES SÉRIES DOUBLES DE FOURIER

par JOSEPH MARCINKIEWICZ (Paris).

1. - Dans tout ce qui suit nous allons désigner par  $f(x, y)$  une fonction de période  $2\pi$ . Nous dirons qu'elle appartient à la classe  $L^p$  et nous écrirons  $f \in L^p$  si

$$(1.1) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dx dy < \infty.$$

D'une manière analogue nous dirons que  $f \in L^*$  si

$$(1.2) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| \lg \{1 + f^2\} dx dy < \infty.$$

La série de FOURIER d'une fonction  $f(x, y)$  sera désignée par  $\sigma\{f\}$  et ses sommes partielles par  $s_{m, n}(f, x, y)$  ou tout simplement par  $s_{m, n}(x, y)$ .

On dit qu'une suite

$$s_0, s_1, s_2, \dots$$

converge par la méthode de CESARO d'ordre  $k$  ( $k$  entier) ou plus simplement converge  $(C, k)$  lorsque la suite

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{A_n^{(k)}},$$

où

$$(1.3) \quad s_n^{(0)} = s_n, \quad s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \dots + s_n^{(k-1)}$$

$$(1.4) \quad A_n^{(0)} = 1, \quad A_n^{(k)} = A_0^{(k-1)} + A_1^{(k-1)} + \dots + A_n^{(k-1)}$$

converge au sens ordinaire.

2. - Les difficultés des recherches concernant le comportement des séries  $\sigma(f, x, y)$  dépendent d'une façon extrêmement étroite des propriétés intégrales des fonctions  $f$ . Ainsi par exemple, lorsque la fonction  $f$  est continue, il est facile de modifier les nombreux théorèmes valables dans le cas des séries de Fourier d'une variable réelle de manière à obtenir les théorèmes correspondants pour les séries  $\sigma\{f, x, y\}$ .

On peut par exemple facilement démontrer sous l'hypothèse de la continuité de la fonction  $f(x, y)$  que les expressions

$$(2.1) \quad \sigma_{m,n} = (m+1)^{-1}(n+1)^{-1} \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n s_{\mu,\nu}(x, y)$$

convergent uniformément vers  $f(x, y)$ .

Au contraire, si l'on ne suppose que  $f \in L^p(p > 1)$ , l'étude des expressions (2.1) devient difficile. On démontre dans ce cas que les expressions (2.1) convergent presque partout vers  $f$ . Cette dernière proposition tombe en défaut pour les fonctions  $f$  de la classe  $L$ . Dès qu'on a remarqué ce fait, on a essayé de donner d'autres méthodes de sommation valables pour  $f \in L$ . Le premier qui résolut ce problème important fut M. S. BOCHNER <sup>(1)</sup>. Il a démontré que si  $f \in L$  les expressions

$$(2.2) \quad \frac{4}{\pi R^2} \sum_{m^2+n^2 \leq R^2} s_{m,n}$$

convergent presque partout vers  $f$ .

Tout récemment <sup>(2)</sup> on a démontré que les expressions

$$(2.3) \quad (n+1)^{-2} \sum_{\mu,\nu=0}^n s_{\mu,\nu}$$

jouissent de la même propriété. Ces sont les seules méthodes connues qu'on peut appliquer avec succès à la sommation des séries  $\sigma\{f, x, y\}$ . Le but de cette note est de donner une troisième méthode de ce genre. Cette nouvelle méthode consiste dans l'application des méthodes  $(C, k)$  à la suite  $\{s_{n,n}(f, x, y)\}$ .

Nous allons établir les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - *Si  $f(x, y)$  est continu la suite  $\{s_{n,n}\}$  converge uniformément  $(C, 1)$ .*

THÉORÈME 2. - *Soit  $f \in L^p(p > 1)$ .*

Posons

$$(2.4) \quad H_n^2 = (n+1)^{-1} \sum_0^n \{s_{n,n} - f\}^2$$

$$(2.5) \quad H = \text{borne sup.}_n H_n(x, y).$$

*La suite  $\{H_n\}$  converge presque partout vers zéro et on a*

$$(2.6) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H^p(x, y) dx dy \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dx dy$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $p$ .

<sup>(1)</sup> S. BOCHNER: *Summation of multiple Fourier series by spherical means*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp. 175-207.

<sup>(2)</sup> J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND: *Sur la sommabilité des séries doubles de Fourier*. Va paraître dans le t. 32 de Fund. Math.

THÉORÈME 3. - Soit  $f \in L^*$ . Posons

$$(2.7) \quad U_n(x, y) = (n+1)^{-1} \sum_0^n s_{m, m}$$

$$(2.8) \quad U = \text{borne sup. } |U_n|.$$

La suite  $\{U_n\}$  converge presque partout vers  $f$  et on a

$$(2.9) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U dx dy \leq A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg \{1 + f^2\} dx dy + B$$

où  $A$  et  $B$  désignent deux constantes.

THÉORÈME 4. - Soit  $f \in L$ . La suite  $\{s_{n, n}\}$  converge presque partout (C, 2) vers  $f$ .

3. - Nous commençons par la démonstration du théorème 1. Elle sera basée sur plusieurs lemmes.

LEMME 1. - Posons

$$(3.1) \quad D_\nu = \frac{\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

On a

$$(3.2) \quad \sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y) = \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} \cos ny \sin \frac{y}{2} - \cos nx \sin \frac{x}{2} \sin ny \cos \frac{y}{2}}{8 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}}$$

$$(3.3) \quad \sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y) = \frac{\sin n(x-y) \sin \frac{x+y}{2} - \sin n(x+y) \sin \frac{x-y}{2}}{16 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}.$$

On a

$$\sum_0^{n-1} z^{2\nu+1} = z \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}$$

d'où l'on obtient, en posant  $z = e^{i\theta/2}$  et en égalant les parties réelles des deux cotés,

$$\sum_0^{n-1} \cos(2\nu+1)\frac{\theta}{2} = \frac{\sin n\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

En y posant successivement  $\theta = x-y$  et  $\theta = x+y$  et en prenant la différence on obtient (3.3). La formula (3.2) est une conséquence immédiate de (3.3).

LEMME 2. - Posons

$$(3.4) \quad K_n(x, y) = n^{-1} \sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y).$$

On a pour  $|x| + |y| \leq \frac{3}{2} \pi$ .

$$(3.5) \quad |K_n(x, y)| \leq n^2$$

$$(3.6) \quad |K_n(x, y)| \leq \frac{K}{|x-y| \cdot |x+y|}$$

$$(3.7) \quad |K_n(x, y)| \leq \frac{K}{|xy|}$$

$$(3.8) \quad |K_n(x, y)| \leq \frac{K}{n|x| \cdot |x-y| \cdot |x+y|} + \frac{K}{n|y| \cdot |x-y| \cdot |x+y|}$$

$$(3.9) \quad |K_n(x, y)| \leq \frac{K}{n|yx| \cdot |x-y|} + \frac{K}{n|xy| \cdot |x+y|}$$

où  $K$  désigne une constante absolue.

La formule (3.4) résulte de l'inégalité évidente  $|D_v| \leq \nu + \frac{1}{2}$ .

Les inégalités (3.6)-(3.9) sont des conséquences de (3.2) et (3.3).

LEMME 3. - On a

$$(3.10) \quad \iint_{D^*} |K_n(u, v)| \, dudv \leq K^* \quad (3)$$

où  $D^*$  est le domaine défini par l'inégalité

$$(3.11) \quad |u| + |v| \leq \frac{3}{2} \pi$$

et où  $K$  désigne une constante absolue.

Soit  $D$  la partie  $D^*$  définie par les relations  $u \geq 0, v \geq 0$ .

On a évidemment

$$\iint_{D^*} |K_n| \, dudv = 4 \iint_D |K_n| \, dudv.$$

Désignons par  $D_1$  la partie de  $D$  dans laquelle  $u \leq 2/n, v \leq 2/n$ , par  $D_2$  celle composée de points n'appartenant pas à  $D_1$  et tels que  $v \geq \frac{1}{n}, v \leq u - \frac{1}{n}$ , par  $D_3$  celle où  $v \leq 1/n, n \geq 2/n$ , par  $D_4$  et  $D_5$  les domaines symétriques à  $D_2$  et à  $D_3$  par rapport à la droite  $u=v$  et enfin par  $D_6$  la partie restant de  $D$ .

Nous allons évaluer séparément les intégrales

$$A_k = \iint_{D_k} |K_n(u, v)| \, dudv, \quad (k=1, 2, \dots, 6).$$

D'après (3.5) on a

$$(3.12) \quad A_1 \leq 4.$$

La formule (3.6) donne

$$(3.13) \quad A_3 \leq 2 \int_{1/n}^{\pi} du \int_0^{\frac{1}{u}} \frac{K}{u^2} dv \leq 2K$$

---

(3) Les constantes  $K$  dans les différents contextes sont différentes.

et à cause de la symétrie

$$(3.14) \quad A_5 \leq 2K.$$

La formule (3.7) donne d'une façon analogue

$$(3.15) \quad A_6 \leq 2K.$$

Il nous reste à évaluer  $A_2$  et  $A_4$ . On a d'après (3.9)

$$|K_n(x, y)| \leq \frac{K}{nx^2y} + \frac{K}{nx^2|x-y|} \quad (xy \in D_2),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \iint_{D_2} \frac{K}{nx^2y} dx dy + \iint_{D_2} \frac{K}{nx^2|x-y|} dx dy \leq \\ &\leq \int_{1/n}^{\pi} \frac{Kdy}{ny} \int_{y+1/n}^{\pi} \frac{dx}{x^2} + 4 \iint_{D_2} \frac{Kdx dy}{n(x+y)^2|x-y|} \leq \\ &\leq \int_{1/n}^{\pi} \frac{Kdy}{ny^2} + 16 \iint_{D_2'} \frac{Kdu dv}{nu^2v} \end{aligned}$$

où  $D_2'$  est défini par les inégalités  $v \geq 1/n$ ,  $u \geq v$ .

Il en résulte que

$$(3.16) \quad A_2 \leq K + 16 \int_{1/n}^{\pi} \frac{Kdv}{nv^2} \leq K.$$

On trouve d'une façon analogue

$$(3.17) \quad A_4 \leq K.$$

Les évaluations pour  $A_k$  donnent (3.10).

LEMME 4. - Soit  $f(x, y)$  une fonction égale à zéro pour  $|x| \leq 2\Delta$  et pour  $|y| \leq 2\Delta$ . La suite  $\{s_{n,n}\}$  converge  $(C, 1)$  uniformément vers zéro dans le carré  $|x| \leq \Delta$ ,  $|y| \leq \Delta$ .

C'est le principe bien connu de la localisation.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate des lemmes 3 et 4. Les calculs à faire sont si familiers que nous ne croyons pas utile de les reproduire.

4. - Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.

LEMME 5. - Soit

$$(4.1) \quad f^*(x, y) = \text{borne sup.} \int_{-h}^{+h} \int_{-k}^{+k} |f(x+u, y+v)| du dv$$

$$(4.2) \quad f_*(x, y) = \text{borne sup.} \int_{D_{hk}} |f(x+u, y+v)| du dv$$

où  $D_{hk}$  est défini par les relations  $|u-v| \leq h$ ,  $|u+v| \leq k$ .

On a

$$(4.3) \quad |U_n(x, y)| \leq K(f^*(x, y) + f_*(x, y)).$$

Sans borner la généralité des résultats nous pouvons supposer  $x=y=0$ . Nous pouvons aussi admettre que  $f(x, y) \geq 0$  et  $f=0$  en dehors du domaine  $D^*$ . En effet posons  $f=f_1+f_2$  où  $f=f_1$  dans  $D^*$  et  $f=f_2$  en dehors de  $D^*$ . On a

$$|s_{n,n}(f_2, 0, 0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(u, v)| \frac{dudv}{|uv|} \leq \frac{4}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u, v)| dudv \leq 16 f^*(0, 0)$$

ce qui donne aussi

$$|U_n(f_2, 0, 0)| \leq 6f^*(0, 0).$$

On a

$$(4.4) \quad |U_n(0, 0)| \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u, v)| |K_n(u, v)| dudv.$$

Soient  $D_k (k=1, 2, \dots, 6)$  les domaines envisagés dans la démonstration du lemme 3 et  $A_k$  les parties de l'intégrale (4.4) prises sur ces domaines. On a d'après (3.5)

$$(4.5) \quad A_1 \leq Kf^*(0, 0).$$

Divisons  $D_3$  en parties  $D_3^k$  par les droites  $u=2^k/n$ .

En tenant compte de (3.6) on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{D_3^k} |f(u, v)| |K_n(u, v)| dudv &\leq 2 \iint_{D_3^k} |f(u, v)| \frac{K}{u^2} du \leq \\ &\leq 2K \left(\frac{2^{+k}}{n}\right)^{-2} n^{-2} 2^{k-1} f^*(0, 0) \leq K 2^{-k} f^*(0, 0) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(4.6) \quad A_3 \leq Kf^*(0, 0).$$

En raison de la symétrie on trouve aussi

$$(4.7) \quad A_5 \leq Kf^*(0, 0).$$

Un raisonnement analogue fournit la formule

$$(4.8) \quad A_6 \leq Kf_*(0, 0).$$

D'autre part on a dans  $D_2$

$$|K_n(u, v)| \leq \frac{K}{nu^2v} + \frac{K}{nu^2|u-v|}$$

et il en résulte que

$$A_2 \leq \iint_{D_2} f(u, v) \frac{K}{nu^2v} dudv + \iint_{D_2} f(u, v) \frac{K}{nu^2|u-v|} dudv = A_2' + A_2''.$$

Divisons le domaine  $D_2$  en sous-domaines  $D^{ij}$  ( $j \leq i-1$ ) par les droites  $u=2^{i-1}/n$  et  $v=2^j/n$ .

On a

$$\begin{aligned} \iint_{D^{ij}} f(u, v) \frac{Kdudv}{nu^2v} &\leq 2^{-2(i-1)-j} n^2 \iint_{D^{ij}} Kf(u, v) dudv \leq \\ &\leq 2^{-(i+1)} Kf^*(0, 0) \leq K2^{-\frac{i+j}{2}} f^*(0, 0). \end{aligned}$$

On en obtient  $A_2' \leq Kf^*(0, 0)$  et d'une manière analogue  $A_2'' \leq Kf_*(0, 0)$  ou bien

$$(4.9) \quad A_2 \leq K \{ f^*(0, 0) + f_*(0, 0) \}.$$

Les évaluations pour  $A_k$  donnent

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f(u, v) |K_n(u, v)| dudv \leq K \{ f^*(0, 0) + f_*(0, 0) \}.$$

De même on trouve les évaluations pour les autres parties de l'intégrale (4.4) ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 5\*. - Soit  $f \in L^*$ . On a

$$(4.10) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x, y) dx dy \leq A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg(1+f^2) dx dy + B$$

$$(4.11) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_*(x, y) dx dy \leq A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg(1+f^2) dx dy + B$$

où  $A$  et  $B$  désignent deux constantes absolues.

La formule (4.10) est connue <sup>(4)</sup>, la formule (4.11) résulte de (4.10).

Pour démontrer ceci il suffit de changer les axes des coordonnées.

Les lemmes 5 et 5\* donnent (2.9).

En posant dans (2.9)  $Mf$  au lieu de  $f$  on obtient

$$(4.12) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, y) dx dy \leq A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| \lg(1+M^2f^2) dx dy + \frac{B}{M}.$$

(4) B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND: *Note on the differentiability of multiple integrals*. Fund. Math. 25 (1935), pp. 217-239.



Soit  $f=f_1+f_2$  où  $f_1$  est une fonction continue et

$$(4.13) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_2| \lg(1+M^2 f_2^2) dx dy \leq \frac{1}{M}.$$

On obtient d'après (4.12)

$$(4.14) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(f_2, x, y) dx dy \leq \frac{A+B}{M}.$$

En  $y$  posant  $M=(A+B)\varepsilon^{-2}$  on conclut que

$$\text{mes } E \{ U(f_2, x, y) > \varepsilon \} \leq \varepsilon.$$

Il en résulte, d'après le théorème 1, que

$$\text{mes } E \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_n(f, x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon \} \leq \varepsilon.$$

Or,  $\varepsilon$  étant arbitraire, la dernière relation achève la démonstration du théorème 3.

5. - LEMME 6. — Soient  $\{f_\nu(x)\}$  une suite de fonctions et  $\{n_\nu\}$  une suite de nombres naturels. En désignant par  $s_n(f) = s_n(f, x, y)$  les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction  $f$  on a

$$(5.1) \quad \int_0^{2\pi} \left( \sum_\nu s_{n_\nu}^2(f_\nu) \right)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} \left( \sum_\nu f_\nu^2 \right)^{p/2} dx, \quad (p > 1)$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $p$ .

Ce lemme est connu <sup>(5)</sup>.

LEMME 7. - Soient  $\{f_\nu\}$  une suite de fonctions et  $\{n_i\}$  une suite de nombres naturels.

On a

$$(5.2) \quad \int_0^{2\pi} \left( \sum \sigma_{n_i}^2(f_i, x) \right)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} \left( \sum f_\nu^2 \right)^{p/2} dx, \quad (p > 1)$$

où

$$\sigma_{n_i}(f, x) = (n_i + 1)^{-1} \sum_0^{n_i} s_\nu(f, x).$$

Pour démontrer cette inégalité, il suffit de remarquer que

$$\sigma_{n_i}^2(f_i, x) \leq (n_i + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n_i} s_k^2(f_i, x)$$

et d'appliquer le lemme 6.

<sup>(5)</sup> A. ZYGMUND: *On the convergence and summability of power series on the circle of convergence*. I. Fund. Math. 30 (1938), pp. 170-196.

LEMME 8. - Soient  $f(x)$  une fonction,  $s_n(f, x) = s_n$  les sommes partielles et  $\sigma_n(f, x) = \sigma_n$  les moyennes de Fejér de sa série de Fourier. On a

$$(5.3) \quad \int_0^{2\pi} \left( \sum \frac{(s_n - \sigma_n)^2}{n} \right)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} |f|^p dx, \quad (p > 1)$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $p$ .

Ce lemme est aussi connu (6).

LEMME 9. - Soient  $f(x, y) \in L^p(p > 1)$ , les expressions  $s_{m,n}(f, x, y)$  les sommes partielles de sa série de Fourier et  $\sigma_{m,n}$  définies par la formule (2.1). On a

$$(5.4) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum n^{-1} (s_{n,n} - \sigma_{n,n})^2 \right)^{p/2} dx dy \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx dy.$$

Pour toute fonction  $h(x, y)$  nous écrirons  $h^{(1)}(x, y)$  pour mettre en évidence que nous la considérons comme une fonction de  $x$  et par  $h^{(2)}(x, y)$  si nous la considérons comme une fonction de  $y$ . On a

$$s_{n,n} - \sigma_{n,n} = s_n \{ s_n(f^{(2)}) - \sigma_n(f^{(2)}) \}^{(1)} + \sigma_n \{ s_n(f^{(1)}) - \sigma_n(f^{(1)}) \}^{(2)} = P_n + Q_n.$$

On trouve d'après le lemme 6

$$\int_0^{2\pi} \left( \sum n^{-1} P_n^2 \right)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum n^{-1} [s_n(f^{(2)}) - \sigma_n(f^{(2)})]^2 \right)^{p/2} dx.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à  $y$  et en appliquant le lemme 8 on obtient

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum n^{-1} P_n^2 \right)^{p/2} dx dy \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx dy.$$

Une évaluation analogue subsiste aussi pour le  $Q_n$ , il en résulte (5.4).

LEMME 10. - Posons

$$h^2 = \max_n n^{-1} \sum_0^{n-1} (s_{\nu\nu} - \sigma_{\nu\nu})^2.$$

On a

$$(5.5) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^p dx dy \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx dy, \quad (p > 1).$$

(6) Ibid. voir aussi A. ZYGMUND: *Proof of a theorem of Paley*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1938), pp. 125-133.

C'est une conséquence immédiate du lemme 9.

L'inégalité (2.5) résulte de (5.5) et du lemme suivant.

LEMME 11. - *Soit*

$$\sigma(x, y) = \text{borne sup. } |\sigma_{n,m}(x, y)|.$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^p(x, y) dx dy \leq A_p \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx dy.$$

Ce lemme est connu <sup>(6)</sup>.

L'inégalité (2.5) donne aussi la convergence presque partout vers zéro de la suite  $H_n$ . L'idée du raisonnement est la même que dans le théorème 3.

6. - LEMME 12. -- *On a*

$$(6.1) \quad \sum_1^n \sin v\theta = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Cette formule est bien connue.

LEMME 13. - *Soit*

$$D_r(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad \bar{K}_n(x, y) = \sum_0^{n-1} D_r(x) D_r(y), \quad P_n = \sum_1^n K_r(x, y).$$

On a

$$(6.2) \quad P_n(x, y) = \frac{1}{32} \frac{\sin^2 \frac{(x+y)}{2} \left[ \cos \frac{(x-y)}{2} - \cos(2n+1) \frac{(x-y)}{2} \right] - \sin^2 \frac{(x-y)}{2} \left[ \cos \frac{(x+y)}{2} - \cos(2n+1) \frac{(x+y)}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin^2 \frac{x+y}{2} \sin^2 \frac{x-y}{2}}.$$

C'est la conséquence immédiate du lemme 12 et de la formule (3.3).

LEMME 14. - *Les expressions  $P_n$  étant définies comme dans le lemme 13, on a pour  $|u| + |v| \leq \frac{3}{2}\pi$*

$$(6.3) \quad |P_n| \leq n^4,$$

$$(6.4) \quad |P_n| \leq \frac{K}{|xy|(x-y)^2} + \frac{K}{|xy|(x+y)^2},$$

<sup>(6)</sup> Voir p. ex. A. ZYGMUND: *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów 1935), p. 278 et la note citée sous (4).

$$(6.5) \quad |P_n| \leq \frac{Kn^2}{|xy|},$$

$$(6.6) \quad |P_n| \leq \frac{Kn^2}{|x-y||x+y|}.$$

La formule (6.3) résulte de (3.5), la formule (6.4) de (6.2).

La formule (3.6) donne

$$|K_n| \leq \frac{Kn}{|x-y| \cdot |x+y|}$$

ce qui entraîne (6.6). D'une façon analogue (3.7) fournit (6.5).

LEMME 15. - On a pour  $|x| + |y| \leq \frac{3}{2}\pi$

$$(6.7) \quad \left| \frac{P_n}{n^2} \right| \leq \frac{Kn^2}{(1+n^2x^2)(1+n^2y^2)} + \frac{Kn^2}{[1+n^2(x-y)^2][1+n^2(x+y)^2]}.$$

Il suffit de démontrer cette inégalité pour  $x \geq 0, y \geq 0$ . Soient  $D_k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ ) les mêmes que dans le lemme 3. Pour  $(x, y) \in D_1$  (6.7) est une conséquence immédiate de (6.3) de même l'inégalité (6.6) donne (6.7) dans  $D_3$  et  $D_5$  et (6.5) dans  $D_6$ . Pour démontrer (6.7) dans  $D_2$  il suffit de diviser ce domaine en deux parties par la droite  $y = \frac{1}{2}x$ .

Soient  $D'$  et  $D''$  la partie inférieure et supérieure de  $D_2$ .

On a dans  $D'$

$$y < x, \quad x - y > \frac{1}{2}x, \quad x > 2/n, \quad y > 1/n$$

ce qui donne d'après (6.4)

$$\left| \frac{P_n}{n^2} \right| \leq \frac{K}{n^2x^3y} + \frac{K}{n^2x^2y^2} \leq \frac{K}{n^2x^2y^2} \leq \frac{Kn^2}{(1+n^2x^2)(1+n^2y^2)}.$$

D'une manière analogue on trouve dans  $D''$

$$\left| \frac{P_n}{n^2} \right| \leq \frac{Kn^2}{[1+n^2(x-y)^2][1+n^2(x+y)^2]}.$$

Il en résulte que (6.7) subsiste dans  $D_2$  et par conséquent aussi dans  $D_4$ .

La formule (6.7) se trouve ainsi entièrement établie.

LEMME 16. *Posons*

$$h_1 = \text{borne sup.}_n \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u, y+v)| \frac{n^2 du dv}{(1+n^2u^2)(1+n^2v^2)}$$

$$h_2 = \text{borne sup.}_n \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u, y+u)| \frac{n^2 du dv}{[1+n^2(u-v)^2][1+n^2(u+v)^2]}.$$

On a pour tout  $A > 0$

$$(6.8) \quad \text{mes } E(h_1(x, y) > A) \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| \, dx dy$$

$$(6.9) \quad \text{mes } E(h_2(x, y) > A) \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| \, dx dy$$

où  $K$  désigne une constante absolue.

La formule (6.8) est connue <sup>(7)</sup>, la formule (6.9) résulte de (6.8).

Pour démontrer le théorème 4 remarquons qu'on a

$$V_n(x, y) = \frac{2}{\pi^2 n(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u-x, v-y) P_n(u, v) \, dudv$$

$$V_n(x, y) = s_n^{(2)}/A_n^{(2)}, \quad s_n^{(0)} = s_{n, n}(f).$$

En tenant compte des lemmes 4, 15 et 16 on obtient facilement

$$\text{mes } E\{\lim \sup |V_n(x, y)| > A\} \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| \, dx dy.$$

Pour en tirer le théorème il suffit de poser  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1$  soit continue et l'intégrale de  $|f_2|$  très petite.

---

<sup>(7)</sup> Citée sous <sup>(2)</sup>.