Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Silvio Cinquini

Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 271-283

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_271_0>

SOPRA I PROBLEMI DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

In una recente Memoria (¹) ho stabilito con procedimento di natura elementare alcuni teoremi di esistenza di un integrale dell'equazione differenziale

$$y'' = f(x, y, y'),$$

il quale congiunga due punti assegnati, ed ho osservato, alla fine dell'introduzione alla Memoria stessa, che « i semplicissimi procedimenti usati riescono pure utili, oltrechè per stabilire altri teoremi (alcuni dei quali evidenti) ecc. ». In un lavoro pubblicato in questi giorni G. SCORZA-DRAGONI (²) dimostra, mediante considerazioni di carattere funzionale, che traggono la loro origine dalle note ricerche di BIRKHOFF e KELLOG, altri due teoremi di esistenza al secondo dei quali l'A. ha dato, successivamente (³), una nuova forma, togliendo alcune restrizioni.

Nella presente Nota voglio mettere in rilievo che anche queste due proposizioni si possono stabilire, nella loro forma più ampia e in modo rapido, mediante le considerazioni elementari svolte nella mia citata Memoria, nella quale ho indicato due diversi procedimenti per ricondursi al caso di equazioni $y'' = f(x, y, y')$ con secondo membro continuo e lipschitziano rispetto a (y, y'). Ambedue questi procedimenti sono immediatamente applicabili alle nuove condizioni considerate dallo SCORZA-DRAGONI, come mostrerò nelle pagine che seguono, utilizzando il primo di essi per provare una proposizione più generale del primo teorema dello SCORZA-DRAGONI, a cui ho sopra accennato, e l'altro per stabilire un'altra proposizione anch'essa più generale del secondo teorema del citato Autore.

(¹) S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 1-22). Tale Memoria verrà indicata nel seguito con *M. I.*

(²) G. SCORZA-DRAGONI: *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti.* (Rend. Seminario Matematico di Roma, Vol. II (1938), pp. 255-275).

(³) G. SCORZA-DRAGONI: *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XXVIII (1938), pp. 317-325).

Il lettore avrà così, dalla presente Nota, una conferma di quanto ho sopra riportato, e potrà constatare, al tempo stesso, che i miei semplicissimi procedimenti riescono efficaci non solo « in casi particolari », ma anche « in ipotesi molto generali » formulate dallo SCORZA-DRAGONI, come del resto tale Autore non esclude (4).

È perfettamente inutile che io soggiunga ancora che i metodi seguiti nella mia Memoria possono essere altrettanto utili in moltissimi altri casi.

1\. - TEOREMA I. - *Sia $f(x, y, y')$ una funzione definita per ogni x di (a, b) e per ogni coppia (y, y') di numeri reali y e y', la quale, per ogni x fissato, risulti continua rispetto a (y, y'), e, per ogni coppia (y, y') fissata, risulti quasi-continua in x, e si supponga che:* I) *esistano tre funzioni $\psi_1(x)$, $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, di cui le prime due siano non negative e integrabili* (5) *rispettivamente sugli intervalli (a, b), e $(-\infty, +\infty)$, e la terza sia sempre positiva, continua in $(-\infty, +\infty)$ e tale che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = -\infty,$$

in modo che in tutto il campo

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad |y| < +\infty, \qquad |y'| < +\infty,$$

risulti

$$|f(x, y, y')| \leqslant \gamma(y)\varphi(y') + \psi_1(x), \tag{1}$$

intendendo che, o sia $\psi_1(x) = 0$ in quasi-tutto (a, b), oppure esista una costante $k > 0$, tale che sia sempre $|u| \leqslant k\varphi(u)$; II) *in corrispondenza ad ogni numero $\lambda^* > 0$ si possa determinare una funzione $\psi_*(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (a, b), in modo che per ogni terna (x, y, y'), con $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant \lambda^*$, $|y'| \leqslant \lambda^*$, risulti*

$$|f(x, y, y')| \leqslant \psi_*(x).$$

Allora se (x_0, y_0), (x_1, y_1) sono due punti qualunque del piano (x, y) tali che sia $a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant b$, l'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y, y')\, dx \tag{2}$$

(4) Cfr. luogo cit. in (2), p. 256, e in particolare nota (8).

(5) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa sempre nel senso del LEBESGUE.

ammette in (x_0, x_1) *almeno una soluzione* $y=y_0(x)$, *con* $y_0(x)$, $y_0'(x)$ *assolutamente continue e tale che* $y_0(x_0)=y_0$, $y_0(x_1)=y_1$.

Basta ripetere il procedimento di dimostrazione seguito nel § 1 di *M. I* con qualche complemento.

Si osservi innanzi tutto che, se $F(x, y, y')$ è una funzione che nel campo

$$C_\infty: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad |y| < +\infty, \qquad |y'| < +\infty,$$

verifica la condizione I) del nostro enunciato, nella quale si sostituisca alla (1) la disuguaglianza

$$|F(x, y, y')| \leq 4g(y)\varphi(y') + \psi_1(x),$$

ove $g(y)$ è una funzione non negativa e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y)dy + 2,$$

è possibile, in base ad una lieve estensione del lemma del n° 2, γ) di *M. I* [6], determinare una costante $L_1 > 0$, in modo che per ogni curva $y=y(x)$, con $y(x)$ e $y'(x)$ assolutamente continue, la quale congiunga i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), e

---

[6] Osserviamo innanzi tutto, in vista del teorema del numero successivo, che il lemma del n.° 2, β) di *M. I* può generalizzarsi nel seguente modo:

a) Sia $u(x)$ *una funzione assolutamente continua, insieme con la sua derivata del primo ordine, sull'intervallo* (a, b) *e sia in tutto* (a, b) $u_1 \leq u(x) \leq u_2$; *siano* $\delta(x)$ *e* $\gamma(u)$ *due funzioni non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli* (a, b) *e* (u_1, u_2) *e sia* $\varphi(v)$ *una funzione continua e sempre positiva sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *e tale che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{v}{\varphi(v)} dv = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{v}{\varphi(v)} dv = -\infty,$$

e in quasi-tutto l'intervallo (a, b) *sia verificata la disuguaglianza*

$$|u''(x)| \leq \gamma(u(x))\varphi(u'(x)) + \delta(x),$$

intendendosi che, o sia $\delta(x)=0$ *in quasi-tutto* (a, b), *oppure esista una costante* $k > 0$ *tale che sia sempre* $|v| \leq k\varphi(v)$. *Allora, in corrispondenza ad ogni numero* $h' > 0$, *è possibile determinare un numero* $H' > 0$, *in modo che, se esiste almeno un valore* a' *dell'intervallo* (a, b) *con* $|u'(a')| \leq h'$, *risulti in tutto* (a, b) $|u'(x)| \leq H'$.

b) Il lemma ora enunciato continua a sussistere anche quando non si conoscano « a priori » i limiti superiore e inferiore della funzione $u(x)$ *sull'intervallo* (a, b), *purchè* $\gamma(u)$ *sia non negativa e integrabile su tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

Per la dimostrazione delle proposizioni ora enunciate cfr. L. Tonelli: *Sull'equazione differenziale* $y''=f(x, y, y')$. (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 75-88), n.° 6, *c*).

soddisfi all'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(x, y, y')dx,$$

risulti in tutto (x_0, x_1)

$$|y'(x)| \leq L_1.$$

Indicato con L' il maggiore dei numeri $|y_0|$, $|y_1|$, si ponga

$$L = L' + (2L_1 + 1)(x_1 - x_0).$$

Considerato x come parametro si approssimi, nel quadrato $|y| \leq L+1$, $|y'| \leq L+1$, la funzione $f(x, y, y')$ mediante la nota successione dei polinomi di STIELTJES [7] nelle due variabili y e y'. Avremo allora una successione di funzioni $\pi_n(x, y, y')$, $(n=1, 2, ...)$, definite per ogni x di (x_0, x_1), e per ogni coppia y, y' del quadrato considerato, e ognuna di tali funzioni sarà, per ogni coppia y, y' fissata, quasi-continua in x, e, per ogni x fissato, razionale intera nelle y, y'.

In virtù della (1), tenuta presente l'espressione dei polinomi di STIELTJES e una loro proprietà stabilita dal TONELLI [8], abbiamo per ogni terna (x, y, y') sopra indicata

$$|\pi_n(x, y, y')| \leq \gamma_n(y)\varphi_n(y') + \psi_1(x), \qquad (n=1, 2, ...),$$

ove $\gamma_n(y)$ e $\varphi_n(y')$ sono i polinomi di STIELTJES di ordine n che approssimano, sull'intervallo $(-L-1, L+1)$, rispettivamente le funzioni $\gamma(y)$ e $\varphi(y')$.

Siccome $\varphi(y')$ è continua e sempre >0, si può quindi determinare un numero intero $\bar{n}$, in modo che, in tutto il campo

$$C_L: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad -L \leq y \leq L, \qquad -L \leq y' \leq L,$$

risulti, per $n > \bar{n}$,

$$|\pi_n(x, y, y')| \leq 2\gamma_n(y)\varphi(y') + \psi_1(x). \tag{3}$$

Inoltre, indicato con Φ il massimo di $\varphi(y')$ sull'intervallo $(-L, L)$, e con Γ_n il massimo di $\gamma_n(y)$ sull'intervallo stesso, risulta in tutto C_L

$$|\pi_n(x, y, y')| \leq 2\Gamma_n\Phi + \psi_1(x), \qquad (n > \bar{n}) \tag{4}$$

e pertanto, tenuto presente che $\pi_n(x, y, y')$, per ogni x fissato di (a, b), è, rispetto

---

(7) Sarà conveniente assumere il polinomio di STIELTJES in quella forma, in cui è stato considerato da L. TONELLI in: *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. III (1926), p. 714 e segg.).

(8) L. TONELLI: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, T. XXIX, 1910, pp. 1-36), n.° 18.

al complesso delle due variabili y, y', funzione razionale intera di grado $2n$, in virtù di un ragionamento fatto dal TONELLI (9), si può determinare, in corrispondenza ad ogni intero $n > \bar{n}$, una funzione $\chi_n(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (x_0, x_1), in modo che, in tutto C_L, risulti

$$(5) \qquad \left| \frac{\partial \pi_n(x, y, y')}{\partial y} \right| \leqslant \chi_n(x), \qquad \left| \frac{\partial \pi_n(x, y, y')}{\partial y'} \right| \leqslant \chi_n(x).$$

Sia Λ_1 il massimo valore di y', non superiore a $L+1$ e tale che in tutto (L, Λ_1) risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(L)$; sia $-\Lambda_2$ il minimo valore di y', non inferiore a $-L-1$, e tale che in tutto $(-\Lambda_2, -L)$ risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(-L)$. Indicato con σ_n il minimo numero intero, non inferiore ad n, tale che, in ogni intervallo di $(-L-1, L+1)$ di ampiezza non superiore a $1 : \sigma_n$, l'oscillazione della funzione $\gamma_n(y)$ non superi l'unità, si definisca nel campo C_∞ una successione di funzioni $Q_n(x, y, y')$, $(n = 1, 2, ...)$ ponendo per ogni x di (x_0, x_1):

$$Q_n(x, y, y') = \pi_n(x, y, y'), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad |y'| \leqslant L;$$

$$Q_n(x, y, y') = \frac{\Lambda_1 - y'}{\Lambda_1 - L} \pi_n(x, y, L), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad L < y' \leqslant \Lambda_1;$$

$$Q_n(x, y, y') = \frac{\Lambda_2 + y'}{\Lambda_2 - L} \pi_n(x, y, -L), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad -\Lambda_2 \leqslant y' < -L;$$

$$Q_n(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad y' > \Lambda_1, \quad \text{e} \quad y' < -\Lambda_2;$$

$$Q_n(x, y, y') = \sigma_n \left(L + \frac{1}{\sigma_n} - y \right) Q_n(x, L, y'), \quad \text{per} \quad L < y \leqslant L + \frac{1}{\sigma_n}, \quad |y'| < +\infty;$$

$$Q_n(x, y, y') = \sigma_n \left(L + \frac{1}{\sigma_n} + y \right) Q_n(x, -L, y'), \quad \text{per} \quad -L - \frac{1}{\sigma_n} \leqslant y < -L, \ |y'| < +\infty;$$

$$Q_n(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad |y| > L + \frac{1}{\sigma_n}, \quad |y'| < +\infty.$$

In virtù della (3) risulta, in tutto C_∞ e per $n > \bar{n}$,

$$(6) \qquad |Q_n(x, y, y')| \leqslant 4 g_n(y) \varphi(y') + \psi_1(x),$$

ove

$$g_n(y) = \gamma_n(y), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L; \qquad 0 \leqslant g_n(y) \leqslant \gamma_n(y) + 1, \quad \text{per} \quad L < |y| \leqslant L + \frac{1}{\sigma_n};$$
$$g_n(y) = 0, \quad \text{per} \quad |y| > L + \frac{1}{\sigma_n}.$$

Inoltre, per una nota proprietà dei polinomi di STIELTJES, risulta

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) dy = \int_{-L-\frac{1}{\sigma_n}}^{L+\frac{1}{\sigma_n}} g_n(y) dy \leqslant \int_{-L-\frac{1}{\sigma_n}}^{L+\frac{1}{\sigma_n}} \gamma_n(y) dy + \frac{2}{\sigma_n} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y) dy + 2.$$

---

(9) L. TONELLI: *I polinomi di approssimazione di Tchebychev.* (Annali di Matematica pura e applicata, Serie III, T. XV (1908), pp. 47-119), p. 61.

Indicato con Δ il minore dei due numeri $\Lambda_i - L$, $(i=1, 2)$, e posto

$$\tau_n(x) = \frac{\sigma_n}{\Delta}\left[2\Gamma_n \Phi + \psi_1(x)\right] + \chi_n(x),$$

tenendo conto nel modo in cui è stata definita $Q_n(x, y, y')$ e tenendo presenti le (4) e (5), risulta per ogni x di (x_0, x_1), se t_1, t_1', t_2, t_2' sono quattro numeri reali qualunque,

$$(8) \qquad |Q_n(x, t_1, t_1') - Q_n(x, t_2, t_2')| \leq \tau_n(x)[|t_1 - t_2| + |t_1' - t_2'|].$$

Ciò premesso, basta ripetere la dimostrazione del n.° 1 di *M. I*, procedendo in modo analogo al n.° 3 della Memoria stessa, tenendo presente che in virtù della (8), nonchè della continuità della funzione $Q_n(x, y, y')$ rispetto alle variabili y e y' sussistono, per l'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} Q_n(x, y, y')dx,$$

i classici teoremi che affermano l'esistenza e l'unicità di una soluzione che esce da un dato punto con una data direzione, e il fatto che tale soluzione varia con continuità al variare delle condizioni iniziali [10].

Si prova così che esiste almeno una soluzione $y = y_n(x)$ dell'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \pi_n(x, y, y')dx,$$

con $y_n(x_0) = y_0$, $y_n(x_1) = y_1$, e per la quale ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartiene al campo C_L.

L'uguale continuità delle derivate $y_n'(x)$, $(n = \bar{n}+1, \bar{n}+2, ...)$ discende dall'ipotesi II) del nostro enunciato (ove si determina la funzione $\psi_*(x)$ prendendo per λ^* il numero L), e per provare l'asserto basta procedere come al luogo citato, tenendo conto di un noto teorema di integrazione per serie.

OSSERVAZIONE I. - Se $\gamma(y)$ è limitata su tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, l'ipotesi II) del nostro enunciato è conseguenza immediata della I).

Pertanto, facendo $\gamma(y) \equiv 0$, ne segue evidentemente, che *il teorema del presente numero contiene, come caso particolare, il primo dei teoremi dimostrati dallo* SCORZA-DRAGONI *nel luogo cit. in* [2].

OSSERVAZIONE II. - Nell'enunciato del presente n.° alla condizione $|u| \leq k\varphi(u)$ può sostituirsi la seguente [11]: esistano due numeri positivi μ e ν, in modo che

---

[10] Vedi p. es. C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* (Teubner, 1918, Leipzig), Cap. XI.

[11] Cfr. L. TONELLI, luogo cit. in [6].

È superfluo osservare che se fosse $|u| \leq k\varphi(u)$ soltanto per $|u| \geq k_0 > 0$, basterebbe sostituire alla funzione $\varphi(u)$ la $\varphi(u) + \frac{k_0}{k}$, perchè la disuguaglianza in questione fosse verificata su tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

gli intervalli, in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze $u>\mu$, $\varphi(u)<\nu u$, abbiano lunghezza complessiva infinita, e della stessa proprietà godano quegli intervalli, nei quali sono verificate entrambe le disuguaglianze $u<-\mu$, $\varphi(u)<-\nu u$.

ESEMPIO. - La funzione definita da

$$f(x, y, y')=\frac{y'^2 \lg(1+y'^2)+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+y^2}+x^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{per} \quad x\neq 0; \qquad f(x, y, y')=0, \quad \text{per} \quad x=0,$$

soddisfa alle condizioni del teorema del presente n.° anche quando il punto $x=0$ non sia esterno all'intervallo (x_0, x_1). Infatti è evidentemente

$$|f|\leq\frac{y'^2 \lg(1+y'^2)+1}{y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+y^2}},$$

e quindi la (1) è verificata per

$$\gamma(y)=\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+y^2}}, \qquad \varphi(y')=y'^2 \lg(1+y'^2)+1, \qquad \psi_1(x)=0.$$

Inoltre, per $|y'|\leq\lambda^*$, risulta $|f|\leq\dfrac{\lambda^{*2}\lg(1+\lambda^{*2})+1}{x^{\frac{2}{3}}}$, per qualunque y.

Sono dunque verificate tutte le condizioni dell'enunciato del presente numero, ma l'esempio ora citato non soddisfa alle condizioni di alcuno dei teoremi dello SCORZA-DRAGONI.

2. - TEOREMA II. - *Sia $f(x, y, y')$ una funzione definita per ogni (x, y, y') del campo*

$$C': \quad a\leq x\leq b, \qquad y_1(x)\leq y\leq y_2(x), \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

ove $y_1(x)\leq y_2(x)$ ed esistono due numeri finiti l_1, l_2 tali che in tutto (a, b) risulti $l_1\leq y_i(x)\leq l_2$, $(i=1, 2)$, e si supponga che $f(x, y, y')$, per ogni x fissato, risulti continua rispetto a (y, y'), e, per ogni coppia (y, y') fissata, risulti quasi-continua in x, ed inoltre che: I) *le derivate $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ esistano finite e continue in tutto (a, b), ed ivi le differenze*

$$y_1'(x)-\int_a^x f(t, y_1(t), y_1'(t))dt, \qquad \int_a^x f(t, y_2(t), y_2'(t))dt-y_2'(x)$$

siano non decrescenti; II) *esistano tre funzioni $\psi_1(x)$, $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, di cui le prime due siano non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli (a, b) e (l_1, l_2), e la terza sia sempre positiva, continua in $(-\infty, +\infty)$, tale che*

$$\int_0^{+\infty}\frac{u}{\varphi(u)}du=+\infty, \qquad \int_{-\infty}^0\frac{u}{\varphi(u)}du=-\infty,$$

e che esista una costante $k>0$, *per la quale sia sempre* $|u|\leq k\varphi(u)$, *in modo che in tutti i punti del campo* C' *risulti*

$$(9) \qquad |f(x, y, y')|\leq \gamma(y)\varphi(y')+\psi_1(x);$$

III) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^*>0$, *si possa determinare una funzione* $\psi_*(x)$, *non negativa e integrabile sull'intervallo* (a, b), *in modo che per ogni punto* (x, y, y') *del campo* C', *con* $|y'|\leq\lambda^*$, *risulti*

$$|f(x, y, y')|\leq\psi_*(x).$$

Allora se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ *sono due punti qualunque, per i quali risultano verificate le disuguaglianze*

$$a\leq x_0<x_1\leq b, \qquad y_1(x_i)\leq y_i\leq y_2(x_i), \quad (i=0, 1),$$

l'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx$$

ammette almeno una soluzione $y=y_0(x)$, $(x_0\leq x\leq x_1)$, *con* $y_0(x)$ *e* $y_0'(x)$ *assolutamente continue, soddisfacente alle condizioni*

$$y_1(x)\leq y_0(x)\leq y_2(x), \quad (x_0\leq x\leq x_1), \qquad y_0(x_0)=y_0, \qquad y_0(x_1)=y_1.$$

Basta ripetere, con qualche piccolo complemento, la dimostrazione del n.° 7 di *M. I.*

Supposto ancora, dapprima, $y_2(x)>y_1(x)$ in tutto (x_0, x_1), si osservi innanzi tutto che se $F(x, y, y')$ è una funzione che nel campo

$$C: \quad x_0\leq x\leq x_1, \qquad y_1(x)\leq y\leq y_2(x), \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

verifica la condizione II) del nostro enunciato nella quale si sostituisca alla (9) la disuguaglianza

$$(10) \quad |F(x, y, y')|\leq 2\gamma(y)\varphi(y')+\psi_1(x)+|f(x, y_1(x), y_1'(x))|+|f(x, y_2(x), y_2'(x))|,$$

si può determinare [12] una costante $L>0$, in modo che per ogni curva $y=y(x)$, con $y(x)$, $y'(x)$ assolutamente continue, la quale congiunga i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), soddisfi all'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} F(x, y, y')dx,$$

e per la quale ogni punto $(x, y(x), y'(x))$, $(x_0\leq x\leq x_1)$ appartenga al campo C, risulti in tutto (x_0, x_1)

$$|y'(x)|\leq L.$$

---

[12] Si tenga presente il lemma enunciato in [6].

Indicato con L' il maggiore dei massimi moduli delle derivate $y_i'(x)$, $(i=1, 2)$ nell'intervallo (x_0, x_1), si prenda

$$H = L + L' + 1.$$

Per ogni intero $n \geqslant 4$ si definisca, nel seguente modo, una funzione $f_n(x, y, y')$.

Sia $R_{\bar{x}}$ il rettangolo, di cui al n.° 7 di *M. I*, e lo si decomponga in triangoli nel modo allora indicato.

Considerati quei triangoli della suddivisione fatta in $R_{\bar{x}}$, che hanno un vertice nel punto $Q_1 \equiv (\bar{x}, y_1(\bar{x}), y_1'(\bar{x}))$, si definisca in ciascuno dei loro vertici

$$f_n(\bar{x}, y, y') = f(\bar{x}, y_1(\bar{x}), y_1'(\bar{x}))\,;$$

e analogamente in ciascuno dei vertici dei triangoli, a cui appartiene il punto $Q_2 \equiv (\bar{x}, y_2(\bar{x}), y_2'(\bar{x}))$, si prenda

$$f_n(\bar{x}, y, y') = f(\bar{x}, y_2(\bar{x}), y_2'(\bar{x})).$$

Per ogni altro vertice Q della suddivisione fatta in $R_{\bar{x}}$ (distinto da quelli già considerati), si consideri l'insieme $E(Q)$ dei punti appartenenti a quelli, fra i triangoli in cui è stato suddiviso $R_{\bar{x}}$, che hanno un vertice in Q, e nel punto Q si definisca

$f_n(\bar{x}, y, y')$ uguale al minimo di $f(\bar{x}, y, y')$ in $E(Q)$, se in tale insieme è $f(\bar{x}, y, y') \geqslant 0$;

$f_n(\bar{x}, y, y')$ uguale al massimo di $f(\bar{x}, y, y')$ in $E(Q)$, se in tale insieme è $f(\bar{x}, y, y') \leqslant 0$;

$f_n(\bar{x}, y, y') = 0$, altrimenti.

Successivamente si completi la definizione di $f_n(\bar{x}, y, y')$ in $R_{\bar{x}}$, in modo che in ciascuno dei triangoli, in cui è stato suddiviso $R_{\bar{x}}$, la $f_n(\bar{x}, y, y')$ sia funzione lineare rispetto a y e a y', cioè in modo che, in ognuno di tali triangoli, $z = f_n(\bar{x}, y, y')$ sia una superficie piana.

Poi, indicato con H_1 il massimo valore di y', non superiore a $H+1$ e tale che in tutto (H, H_1) risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(H)$, e indicato con $-H_2$ il minimo valore di y', non inferiore a $-H-1$ e tale che in tutto $(-H_2, -H)$ risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(-H)$, si ponga

$$f_n(\bar{x}, y, y') = \frac{H_1 - y'}{H_1 - H} f_n(\bar{x}, y, H), \quad \text{per} \quad H < y' \leqslant H_1\,;$$

$$f_n(\bar{x}, y, y') = \frac{H_2 + y'}{H_2 - H} f_n(\bar{x}, y, -H), \quad \text{per} \quad -H_2 \leqslant y' < -H\,;$$

$$f_n(\bar{x}, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad y' > H_1, \quad \text{e per} \quad y' < -H_2.$$

Fatta tale costruzione per ogni $\bar{x}$ di (x_0, x_1), la funzione $f_n(x, y, y')$ risulta definita in tutto il campo C, ed ivi è, per ogni coppia (y, y') fissata, quasi-continua rispetto ad x, e, per ogni x fissato, continua rispetto a (y, y').

Nel campo

$$C_H: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -H \leq y' \leq H,$$

$f_n(x, y, y')$ converge, per $n \to \infty$, verso $f(x, y, y')$, e in virtù della (9) risulta, in tutto C e per ogni intero n,

$$(11) \quad |f_n(x, y, y')| \leq 2\gamma(y)\varphi(y') + \psi_1(x) + |f(x, y_1(x), y_1'(x))| + |f(x, y_2(x), y_2'(x))|.$$

Inoltre, in corrispondenza ad ogni numero intero n, è possibile determinare un numero $\theta_n > 0$ ([13]), in modo che sia

$$f_n(x, y, y') = f(x, y_1(x), y_1'(x)),$$

per

$$x_0 \leq x \leq x_1, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_1(x) + \theta_n, \qquad y_1'(x) - \theta_n \leq y' \leq y_1'(x) + \theta_n,$$

ed anche

$$f_n(x, y, y') = f(x, y_2(x), y_2'(x)),$$

per

$$x_0 \leq x \leq x_1, \qquad y_2(x) - \theta_n \leq y \leq y_2(x), \qquad y_2'(x) - \theta_n \leq y' \leq y_2'(x) + \theta_n.$$

Infine, determinata in virtù dell'ipotesi III) del nostro enunciato, in corrispondenza ad H una funzione $h(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (x_0, x_1), in modo che in tutto il campo C_H sia

$$|f(x, y, y')| \leq h(x),$$

ne segue immediatamente, per il modo in cui è stata definita f_n e con calcoli elementari che omettiamo, che, in corrispondenza ad ogni intero n positivo, esiste un numero $\varrho_n > 0$ ([14]), tale che risulta

$$(12) \qquad |f_n(x, t_1, t_1') - f_n(x, t_2, t_2')| \leq \varrho_n h(x)[|t_1 - t_2| + |t_1' - t_2'|],$$

per ogni x di (x_0, x_1), e per ogni quadrupla di numeri reali t_1, t_1', t_2, t_2', con

$$y_1(x) \leq t_i \leq y_2(x), \qquad -\infty < t_i' < +\infty, \qquad (i = 1, 2).$$

([13]) Si vede subito, con considerazioni elementari, che, indicato con $\delta (> 0)$ il minore dei minimi in (x_0, x_1) delle espressioni $y_2(x) - y_1(x)$, $H - y_1'(x)$, $H - y_2'(x)$, $y_1'(x) + H$, $y_2'(x) + H$, basta prendere $\theta_n = \delta^2 : 8nH$.

([14]) Basta prendere $\varrho_n = \dfrac{2n}{\delta}\left(1 + \dfrac{2H}{\delta}\right) + \dfrac{1}{\delta'}$, ove δ è il numero indicato in ([13]), e δ' è il minore dei due numeri $H_1 - H$, $H_2 - H$.

Per l'equazione

$$(13) \qquad y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y, y')dx,$$

può quindi ripetersi il ragionamento di carattere elementare già fatto al n.° 7 di *M. I*, facendo rilevare che ogni curva integrale della (13) ed uscente dal punto (x_0, y_0), se è tangente in un punto ad una delle due curve $y = y_i(x)$, (x_0, x_1), $[i = 1, 2]$, coincide con tale curva in tutto l'intervallo in cui è definita.

Infatti, sia $y = Y_n(x)$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_n)$, [con $x_n \leqslant x_1$] una curva integrale della (13), uscente dal punto (x_0, y_0), e supponiamo, per fissare le idee, che per $x = \xi$, con $x_0 \leqslant \xi < x_n$, sia

$$(14) \qquad Y_n(\xi) = y_1(\xi), \qquad Y_n'(\xi) = y_1'(\xi).$$

Indicato con ξ_1 $(\xi_1 \geqslant \xi)$ il massimo valore di x tale che, in tutto l'intervallo (ξ, ξ_1), risulti $y_1(x) = Y_n(x)$, dico che è necessariamente $\xi_1 = x_n$. Infatti, in caso contrario, esisterebbe qualche x', con $\xi_1 < x' < x_n$, e vicino quanto si vuole a ξ_1, verificante la disuguaglianza

$$(15) \qquad Y_n(x') > y_1(x').$$

D'altra parte, per la continuità delle funzioni

$$(16) \qquad y_1(x), \qquad y_1'(x), \qquad Y_n(x), \qquad Y_n'(x),$$

si potrebbe determinare un $\delta_n > 0$, (con $\delta_n < x_n - \xi_1$), in modo che in tutto $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$ fosse $Y_n(x) \geqslant y_1(x)$, e ciascuna delle funzioni (16) avesse ivi un'oscillazione non superione a $\theta_n : 2$. Allora, avendosi per ogni x di $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$,

$$Y_n'(x) = Y_n'(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{x} f_n(x, Y_n(x), Y_n'(x))dx,$$

ed anche in virtù della condizione I),

$$y_1'(x) - \int_{\xi_1}^{x} f(x, y_1(x), y_1'(x))dx \geqslant y_1'(\xi_1),$$

ne seguirebbe, essendo $Y_n(\xi_1) = y_1(\xi_1)$, $Y_n'(\xi_1) = y_1'(\xi_1)$ e tenendo presente la definizione della f_n, in tutto $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$

$$Y_n'(x) \leqslant y_1'(x);$$

e questa disuguaglianza, siccome $Y_n(\xi_1) = y_1(\xi_1)$, contradice la (15). Dunque in tutto (ξ, x_n) è necessariamente $Y_n(x) = y_1(x)$, e, se è $x_0 < \xi$, si prova, analogamente, che tale uguaglianza è verificata anche in (x_0, ξ).

Pertanto, in virtù della (12), possiamo concludere che esiste almeno un integrale $y = y_n(x)$ della (13) che congiunge i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1), e per il quale ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ appartiene al campo C_H. Non rimane che proseguire come al luogo citato, osservando che l'uguale continuità delle derivate $y_n'(x)$ discende dalla condizione III), e utilizzando poi un noto teorema di integrazione per serie.

Infine si elimina l'ipotesi supplementare $y_1(x) < y_2(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$, fatta all'inizio della dimostrazione, come al n.° 7, *b*) di *M. I.*

3. - OSSERVAZIONI E COMPLEMENTI AL TEOREMA II.

a) UN CASO PARTICOLARE. - Se è in quasi-tutto (a, b)

$$\psi_1(x) + |f(x, y_1(x), y_1'(x))| + |f(x, y_2(x), y_2'(x))| = 0, \tag{17}$$

l'ipotesi $|u| \leq k\varphi(u)$ può essere soppressa, e le condizioni I) e II) assumono la forma seguente: I') *le derivate* $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ *siano finite e continue in tutto* (a, b), *con* $y_1'(x)$ *non decrescente,* $y_2'(x)$ *non crescente, e sia* $f(x, y_i(x), y_i'(x)) = 0$, $(i = 1, 2)$ *in quasi-tutto* (a, b); II') *esistano due funzioni* $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, *di cui la prima sia non negativa e integrabile sull'intervallo* (l_1, l_2), *e la seconda sia sempre positiva, continua in* $(-\infty, +\infty)$ *e tale che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = -\infty,$$

in modo che in tutti i punti del campo C' *risulti*

$$|f(x, y, y')| \leq \gamma(y)\varphi(y').$$

b) Se la funzione $\gamma(y)$ è limitata sull'intervallo (l_1, l_2), la condizione III) può essere soppressa nell'enunciato del n.° 2 (come pure nel caso particolare indicato nell'*a*) del presente numero), perchè è conseguenza immediata della II).

c) Inoltre, se la funzione $\gamma(y)$ è limitata sull'intervallo (l_1, l_2), e se è $\psi_1(x) = 0$ in quasi-tutto (a, b), l'ipotesi $|u| \leq k\varphi(u)$ può essere soppressa, anche quando non sia verificata, in quasi-tutto (a, b), la (17).

Infatti, poichè nelle ipotesi del presente capoverso $\gamma(y)$ può farsi, praticamente, uguale ad 1, basta determinare il numero L sostituendo alla (10) la disuguaglianza

$$|F(x, y, y')| \leq 4\varphi(y'),$$

perchè in base alla costruzione fatta, tenendo conto della continuità di $\varphi(y')$ e dell'ipotesi $\varphi(y') > 0$, risulta in tutto C_H per ogni n sufficientemente grande,

$$|f_n(x, y, y')| \leq 2\varphi(y'),$$

e quindi in tutto C

$$|f_n(x, y, y')| \leq 4\varphi(y').$$

In virtù dell'osservazione del presente capoverso *il teorema dello* SCORZA-DRAGONI, *di cui ai luoghi citati in* [2] *e in* [3] *viene ad essere contenuto, anche nella sua forma meno restrittiva, come caso particolare in quello del n.° 2 del presente lavoro.*