ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Qualche applicazione dell'indice di Kronecker alle corrispondenze algebriche tra curve

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 1 (1940), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_1_1_0>

QUALCHE APPLICAZIONE DELL'INDICE DI KRONECKER ALLE CORRISPONDENZE ALGEBRICHE TRA CURVE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

SUNTO. - Si dimostra che, mercé opportuna scelta delle retrosezioni, al prodotto di una corrispondenza algebrica T, ad indici ovunque finiti, per la sua inversa compete una matrice diagonale d'interi caratteristici. Questa matrice è addirittura scalare, se una delle due curve è priva d'integrali abeliani riducibili. Se non è scalare, sulla riemanniana R di una delle curve vi è una certa linea asportando la quale si rompe la connessione di R. Questo risultato permette all'A. di dare una nuova dimostrazione di un teorema di TORELLI, nonché una proposizione più generale, che assegna nuove condizioni necessarie e sufficienti per la identità birazionale di due curve. Si fanno anche altre osservazioni che mettono in luce alcune cause di differenza fra la geometria sulle curve algebriche e quella sulle varietà abeliane.

Queste brevi pagine sono state occasionate dal teorema che R. TORELLI pose a fondamento delle sue ricerche sulle condizioni di identità birazionale di due curve algebriche ([1]).

Detto teorema può enunciarsi così:

Se fra due curve algebriche C e D di egual genere $p>1$, intercede una corrispondenza $\mathfrak{T}$ non speciale ad indici α e β, e se il comune difetto di equivalenza delle serie γ_α', γ_β' indotte da $\mathfrak{T}$ sulle due curve è egual p, C e D son birazionalmente identiche.

Diamo qui una dimostrazione di questo teorema, che ne costituisce anche una espressiva illustrazione topologico-trascendente ottenuta a mezzo di alcune proprietà dell'indice di KRONECKER, che hanno qualche analogia con altre esposte in un mio recente lavoro ([2]).

Da questa dimostrazione si traggono varie interessanti conseguenze, talune delle quali, oltre che nuove, mi sembran meritevoli di attenzione. Eccole brevemente riassunte:

([1]) *Sulle varietà di Jacobi.* [Rend. Lincei, 22, s. 5ª (1913)]. Nota I, teor. I. Lo enunciato di cui sopra è un po' più largo, ma coincide con quello dato dallo stesso TORELLI nell'altra sua Nota: *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* [Stessi Rend. (1915)]. Nota I, principio del n.° 7.

([2]) *Su l'indice di Kronecker pei cicli analitici tracciati sulle riemanniane delle curve algebriche.* [Annali Sc. Sup. Pisa (1939-XVII)].

a) la dimostrazione dà anche un teorema più generale di quello di TORELLI, ponendo in luce l'interesse, ai fini della identità birazionale, di quei caratteri che furono introdotti dal COMESSATTI nel 1913 come estensione del difetto di equivalenza del CASTELNUOVO ([3]);

b) si riconosce che, mercé opportuna scelta delle retrosezioni sulla riemanniana di una delle due curve, la matrice degli interi caratteristici del prodotto di una corrispondenza algebrica per la sua inversa si può, *in generale*, ridurre a forma diagonale (*forma canonica*);

c) l'equazione caratteristica della matrice ora detta resta invariata per cambiamento di retrosezioni ed ha tutte le sue radici intere (e non negative);

d) se almeno due di queste radici caratteristiche sono distinte, una delle due curve possiede necessariamente dei sistemi regolari di integrali abeliani riducibili;

e) un breve supplemento di dimostrazione mostra che la presenza dei sistemi ora detti è legata ad una proprietà di natura topologica (sulle riemanniane delle curve) delle corrispondenze sopra indicate;

f) dalla dimostrazione sviluppata si deduce anche, in modo immediato, una semplice ed interessante spiegazione del perchè due curve possedenti una stessa varietà di JACOBI (ossia una stessa tabella di periodi primitivi per gl'integrali di prima specie) possono essere birazionalmente distinte;

g) segue che soltanto una corrispondenza nella cui classe ne esiste (almeno) una ad indici ovunque finiti soddisfa certamente alla proprietà *b*);

h) e segue anche che la equivalenza delle matrici di RIEMANN di due curve dà luogo alla loro identità birazionale non appena con quella equivalenza resta definita una classe di corrispondenze che ne contiene una ad indici ovunque finiti ([4]);

i) infine, la ricerca dà l'occasione di metttere in luce taluna delle ragioni, forse fra le più sostanziali, della profonda differenza che spesso si manifesta fra la geometria sulle curve algebriche e quella sulle varietà abeliane. Queste sono da aggiungersi ad una, assai significativa, già segnalata dallo SCORZA, nel 1918.

([3]) Questo illustre A., nel 1921, ritrovò per altra via gli stessi caratteri e ne diede un'ampia illustrazione: *Sulle funzioni abeliane.* [Rend. Lincei, vol. 30, s. 5ª (1921)]. Nota IV.

([4]) Questa proposizione fu enunciata come immediata conseguenza del teorema di TORELLI, ma senza menzionare esplicitamente la necessità della finitezza di entrambi gl'indici, da G. SCORZA nella classica Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann....* [Rend. Pal., t. 41 (1916)] nota ([20]) proposiz. (6) a piè di p. 12. L'insufficienza di una comune varietà di JACOBI per l'identità birazionale di due curve era stata osservata da G. HUMBERT: *Sur les fonctions abéliennes singulières.* Mém. II [Journal de Liouville, t. 6 (1900)] n.° 181, pag. 326. Una condizione sufficiente fu data dal SEVERI in calce a una Nota di A. COMESSATTI: *Sulle trasformazioni Hermitiane della varietà di Jacobi* [Atti Torino, vol. 50 (1915)]. Un'altra, meno restrittiva di quella ora mentovata, è stata data recentemente da me nella Memoria: *Identità birazionale di due curve algebriche.* [Rend. Sem. Roma, 1939-XVII] § 3, n.° 10 *a*) ed osservazione finale del § 4.

A proposito della proprietà *b*), non è forse inutile far rilevare che, in un mio recente lavoro ([5]), essa mi si era già presentata come necessaria e sufficiente per poter concludere con la identità birazionale di due curve, in base al citato teorema di TORELLI. Ma ivi non potevo andar oltre, pel diverso ordine di idee sul quale quel lavoro era impostato.

1. - Diciamo R ed R' le riemmanniane delle due curve

$$\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{2p}), \qquad \delta=(\delta_1,\dots,\delta_{2p})$$

i $2p$-complessi (orizzontali) simbolici di due loro sistemi di cicli primitivi che, con gli accoppiamenti γ_s, γ_{p+s} e δ_s, δ_{p+s} $(s=1, 2,\dots, p)$, danno luogo a sistemi di retrosezioni su R ed R'; $\omega=(I|\tau)$, $\Omega=(I|\sigma)$ le matrici dei periodi di p integrali abeliani, normali, di prima specie per C e D, calcolati sui cicli predetti.

La corrispondenza considerata darà luogo alle solite relazioni

$$\pi\omega=\Omega T_{-1}, \qquad \pi^*\Omega=\omega T^*_{-1}, \tag{1}$$

ove T e T^* son due matrici intere di ordine $2p$, entrambe non degeneri (per la non specialità di $\mathfrak{T}$) legate dalla relazione ([6])

$$T^*=-I_0T_{-1}I_0, \qquad I_0=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0\end{array}\right), \tag{2}$$

ove con I s'indica la matrice identica di ordine p.

Poichè i cicli γ son trasformati dalla $\mathfrak{T}$ nei cicli γ' soddisfacenti, su R', alle omologie

$$\gamma'\sim\delta T_{-1}, \tag{3}$$

si ha immediatamente

$$[\gamma'_{-1}\cdot\gamma']=TI_0T_{-1}=TT^*I_0, \tag{4}$$

ove con $[\gamma'_{-1}\cdot\gamma']$ si è indicata la matrice i cui elementi son gl'indici di KRONECKER $[\gamma_r'\cdot\gamma_s']$ delle coppie di cicli γ_r', γ_s'.

Questa (4) ci dice che

$$\sum_{s=1}^{p}[\gamma_s'\cdot\gamma'_{p+s}]=\frac{1}{2}\ \text{traccia}\ \ TT^*=z, \tag{5}$$

ove z è il comune difetto di equivalenza delle serie γ_α', γ_β' subordinate da $\mathfrak{T}$ rispettivamente sulle due curve C e D.

([5]) CHERUBINO S.: *Identità birazionale di due curve algebriche.* [Rend. Sem. Roma (1939-XVII)], § 2, n.° 9, già citato nella nota prec.

([6]) Per maggiori dettagli e più ampie informazioni sui simboli adottati vedasi il § 1 della Mem. cit. ([5]).

La matrice TI_0T_{-1}, quindi il prodotto TT^*, come sarà mostrato qui appresso, possiede sempre una certa forma, che diremo **canonica**, cui si perviene con eventuale cambiamento di retrosezioni sulla riemanniana R.

2. - Ricordiamo come si determina il segno di un'intersezione di due cicli analitici sopra la riemanniana di una curva (7). Fissato su R un sistema (locale) di coordinate curvilinee ξ, η e posto che

$$\sigma(\xi, \eta)=0, \qquad \tau(\xi, \eta)=0$$

siano le equazioni (analitiche) che rappresentano i due cicli σ e τ nell'intorno di una loro intersezione P, si ha che il segno di questa è $+$ ovvero $-$, secondo che il jacobiano $\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial(\xi, \eta)}$, calcolato in P, è positivo o negativo (8).

Assumendo su R' un analogo sistema locale ξ', η' di coordinate curvilinee, la corrispondenza $\mathfrak{T}$ sarà assegnata, nell'intorno di *una coppia* di punti corrispondenti P e P', da due relazioni come

$$\xi'=\xi'(\xi, \eta), \qquad \eta'=\eta'(\xi, \eta),$$

sicché i cicli σ', τ', trasformati di σ e τ, s'intersecheranno in P', col segno del jacobiano

$$\frac{\partial(\sigma', \tau')}{\partial(\xi', \eta')}=\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial(\xi, \eta)}\cdot\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}.$$

Per la continuità della corrispondenza, se M è un punto generico di R, per un suo intorno sufficientemente piccolo accadrà che, nei β punti che corrispondono ad un punto qualsiasi di detto intorno, i β jacobiani $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}$ (sono non nulli e) conservano segni costanti.

Ciò posto, consideriamo la coppia di cicli γ_r, γ_s, con $r \neq p+s$ ed $s \neq p+r$, sicchè $[\gamma_r \cdot \gamma_s]=0$. Ricordando che l'indice di due cicli rimane inalterato se uno di essi (o entrambi) si deforma con continuità, potremo ottenere che, ad esempio, tutti i punti di γ_r si trovino nelle condizioni del punto generico M ora considerato; oppure cambieremo le retrosezioni in modo che ciascun ciclo γ_r si trovi nelle condizioni volute. Si può inoltre supporre (9) che γ_r e γ_s non abbiano punti a comune.

Se la corrispondenza considerata non è composta con un'involuzione (10) su C, cioè se non lo è la serie γ_α' indotta da $\mathfrak{T}$ su C, ogni gruppo Y di γ_β' corrisponde

---

(7) LEFSCHETZ S.: *Correspondences between algebraic curves.* [Annals of Math., (2), t. 28 (1927)], n.° 3 e prec.

(8) Se questo jacobiano fosse zero, uno dei cicli si deformerebbe convenientemente poco, lasciando fermo P.

(9) Cfr. la mia Mem. cit. (2), lemma V.

(10) Per questa nozione e per le sue applicazioni, vedi il *Trattato di Geometria Algebrica* di F. SEVERI (Bologna, Zanichelli, 1926), Cap. VI, § 68, pp. 215-216 e § 83, pp. 257-259.

ad un sol punto di C, ossia di R. Quindi, se i cicli corrispondenti di γ_r, γ_s s'intersecano in un punto M', questo proviene da due punti M_1, M_2, il primo su γ_r l'altro su γ_s, cioè M' è comune ai due gruppi Y', Y'' di γ_β' che corrispondono a questi due punti ([11]).

Deformiamo γ_s lasciando fermo M_2 e portiamolo a passar per M_1. Essendo $[\gamma_r \cdot \gamma_s]=0$, la coppia deformata, oltre che in M_1, s'intersecherà in un secondo punto, sia P, con segno opposto a quello col quale s'interseca in M_1, cioè $\frac{\partial(\gamma_r, \gamma_s)}{\partial(\xi, \eta)}$ acquisterà segni opposti in M_1 e P.

Orbene, P si può supporre così vicino ad M_1 quanto ci piace, perciò i jacobiani $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}$ hanno gli stessi segni in M_1 e P, quindi nei punti corrispondenti ad M_1 i cicli γ_r', γ_s' s'intersecano con segni opposti a quelli coi quali si tagliano nei punti corrispondenti a P. Ripetendo per ogni altro punto comune a γ_r', γ_s' il ragionamento ora fatto per M', si conclude che

$$[\gamma_r' \cdot \gamma_s']=0, \qquad (r \neq p+s, \ s \neq p+r).$$

Dunque si può sempre supporre che

$$TI_0T_{-1}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -E & 0 \end{array}\right),$$

con E matrice diagonale. Segue che si ha:

$$TT^*=\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right),$$

matrice diagonale che dà la cercata forma canonica.

Gli elementi principali di E son gl'indici $[\gamma_r' \cdot \gamma'_{p+r}]$ e son le radici caratteristiche di detto prodotto, (ciascuna di molteplicità pari), quindi son tutte positive o zero ([12]).

Orbene, se T è non degenere, è tale anche T^*, insieme al prodotto TT^*, sicchè si ha

$$\frac{1}{2} \ \text{traccia} \quad TT^*=z \geqq p.$$

Sempre per T non degenere, segue anche che se $z=p$ è necessariamente

$$[\gamma_r' \cdot \gamma'_{p+r}]=+1, \qquad (r=1, 2, \ldots, p),$$

cioè

$$(I) \qquad TI_0T_{-1}=I_0.$$

Il che basta, a norma del ragionamento di cui al n.° 8 della mia Mem. cit. ([2]), per concludere col teorema di TORELLI.

([11]) Ed M_1, M_2 stanno nello stesso gruppo X di γ_α' che corrisponde ad M'.

([12]) Cfr., ad esempio, la mia Mem. cit. ([5]), § 1, n.° 4.

OSSERVAZIONE I. - L'indice $[\gamma_r' \cdot \gamma_s']$ è zero anche se la γ_α' indotta da $\mathfrak{T}$ su C è composta con un'involuzione γ_μ', $\mu > 1$. In tal caso, invero, M' sarà comune a due gruppi Y, Y' corrispondenti il primo ad uno o più punti M_1, N_1,.... su γ_r ed il secondo a uno o più punti M_2, N_2,.... su γ_s. Allora si deformerà γ_s, tenendo fermi i punti M_2 ed N_2,...., fino a passare per M_1, N_1,.... e per altrettanti punti P, Q,.... di γ_r abbastanza vicini, ordinatamente, ad M_1, N_1,.... Per ciascuna coppia M_1, P; N_1, Q;.... vale il ragionamento di poco fa, quindi etc.

OSSERVAZIONE II. - Non è indispensabile che γ_r sia privo di punti in cui è zero qualcuno dei β jacobiani $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}$. Basta che in uno almeno dei due punti di ciascuna delle coppie M_1, M_2 corrispondenti di M' non si annulli nessuno di detti jacobiani. Cioè a dire, basta poter evitare che γ_r, γ_s passino per coppie di punti M_1, M_2 che stanno in uno stesso gruppo X di g_α' e nei quali sia zero qualcuno dei jacobiani di cui sopra.

In altri termini, detto γ_r'' il ciclo trasformato di γ_r' mediante $\mathfrak{T}^{-1}$, basta che γ_s incontri eventualmente questo γ_r'' solo in punti nei quali quei jacobiani son tutti diversi da zero. Orbene, poichè l'indice di KRONECKER $[\gamma_s \cdot \gamma_r'']$ è finito, il numero dei punti d'intersezione di questi due cicli, tutto al più dopo conveniente deformazione (continua) di γ_s, è finito quindi, se occorre, con ulteriore deformazione di γ_s, si può sempre evitare che queste intersezioni capitano fra i punti nei quali si annulla qualcuno dei $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}$.

Potrebbe far eccezione solo il caso in cui tutti i punti di γ_r'' appartengano a questa categoria. In tal caso, bisognerà cambiare opportunamente γ_r.

3. - La dimostrazione che precede implica la effettuazione di un cambiamento dei cicli γ su R in altri

$$\gamma^* = \gamma H_{-1}$$

costituenti ancora, con accoppiamento analogo a quello dei γ, un sistema di retrosezioni. La matrice unimodulare H soddisferà alla relazione

$$H_{-1} I_0 H = I_0, \tag{6}$$

che ha per conseguenza (ed equivale a) l'altra ([13])

$$H I_0 H_{-1} = I_0. \tag{6'}$$

Poichè la relazione $\gamma^* = \gamma H_{-1}$ è, in sostanza, un'omologia, se i γ^* si ottengon dai γ con deformazione continua, la matrice H è identica. Però, per verificare

([13]) Queste due relazioni sono equivalenti perchè, ad esempio dalla prima, segue che

$$-I_0 H_{-1} I_0 \cdot H = I_{2p},$$

quindi che

$$H \cdot (-I_0 H_{-1} I_0) = I_{2p}$$

dalla quale si passa immediatamente alla $H I_0 H_{-1} = I_0$.

la condizione di cui in fine all'osservazione II, può darsi sia necessario fare un cambiamento di retrosezioni non ottenibile per deformazione continua da quello di partenza, perciò non può in ogni caso affermarsi che H sia identica.

Segue che la matrice ω si scambia nell'altra, pure di periodi normali, $\omega' = \omega H_{-1}$ e quindi che la (1) si muta nella relazione

$$(1') \qquad \pi\omega' = \Omega T'_{-1},$$

ove $T' = HT$. In definitiva, si ha

$$T' I_0 T'_{-1} = H \cdot T I_0 T_{-1} \cdot H_{-1},$$

ed è sui nuovi cicli che il prodotto TT^* (il quale ora è diventato $T'T'^*$) assume la forma canonica diagonale di cui al numero precedente.

Un cambiamento di retrosezioni su R', come si vede immediatamente, lascia il prodotto TI_0T_{-1}, quindi quello TT^* addirittura inalterato.

Di qui risulta anche che non può aversi $T'I_0T'_{-1} = I_0$ se non è già $TI_0T_{-1} = I_0$, cioè che in questo caso la forma canonica del prodotto TT^* vale per ogni sistema di retrosezioni.

Un altro caso in cui ciò accade è ovviamente quello in cui la matrice ω è ad indice di singolarità nullo, poichè allora è necessariamente $TI_0T_{-1} = \lambda I_0$ ed il prodotto di $\mathfrak{T}$ per la sua inversa è a valenza $(TT^* = \lambda I_{2p})$.

In ogni altro caso, per raggiungere la forma canonica diagonale, di TT^*, può esser neessario un cambiamento di retrosezioni su R.

Osserviamo ancora che, indicando con ϱ un'indeterminata, si ha

$$-(TI_0T_{-1} - \varrho I_0)I_0 = (TT^* - \varrho I_{2p}),$$

il che, essendo $T'^* = T^* H^{-1}$, assicura che un cambiamento di retrosezioni lascia inalterata la equazione caratteristica della matrice TT^*.

La forma canonica diagonale raggiunta per questa assicura che detta equazione ha radici tutte intere (e non negative).

OSSERVAZIONE. - Anche il prodotto T^*T, mediante opportuna scelta delle retrosezioni su R', si riduce a forma diagonale. E poichè l'equazione caratteristica di un prodotto di due matrici resta invariata mutando l'ordine dei fattori, è ovvio che le due matrici diagonali cui si riducono i prodotti TT^* e T^*T coincidono. Si conclude che:

mercé opportuno cambiamento di retrosezioni su R e su R' i due prodotti TT^* e T^*T coincidono in una stessa matrice diagonale.

4. - Dalla forma canonica di TT^* e da quanto ora osservato, segue immediatamente il seguente teorema [14]:

---

[14] Che può porsi in utile raffronto coi teoremi trovati dal TORELLI nella seconda delle due Note cit. [1].

due curve di genere $p>1$ son birazionalmente identiche se son legate da una corrispondenza non speciale $\mathfrak{T}$, ad indici finiti, che subordina su una di esse una serie γ_n' tale che riunendo i suoi gruppi ad r ad r ($r \leqq p$) si ottiene una γ_{rn}^r possedente $\binom{p}{r}$ gruppi contenuti parzialmente in una serie lineare $g_{r(n-1)+p}^{r(n-1)}$ generica (non speciale).

Questa proposizione, per $r=1$, contiene quella del TORELLI.

Ricordiamo ([15]), infatti, che l'equazione caratteristica di TT^* è il quadrato di un polinomio

$$\varrho^p - i_1\varrho^{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} i_{p-1}\varrho + (-1)^p i_p,$$

che è il pfaffiano di $TI_0T_{-1} - \varrho I_0$.

Poichè le sue radici son tutte intere e positive esse risultano tutte eguali all'unità non appena si abbia

$$i_r = \binom{p}{r}.$$

E se questa eguaglianza ha luogo per un valore dell'indice r ($r=1, 2, \dots, p$) ha luogo per tutti gli altri valori di r, quindi si ha $i_1 = z = p$. Basta ora ricordare il significato geometrico ([16]) dei coefficienti i_r per concludere col teorema enunciato.

5. - Un'altra interessante conseguenza del n.° 2 è quella che segue. Poniamo, per fissare le idee, che TT^* possegga due radici caratteristiche distinte, λ e μ, di molteplicità rispettive $2q$ e $2(p-q)$. Si potrà allora porre, dopo opportuni scambi di righe e colonne,

$$TT^* = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right), \qquad E = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I' & 0 \\ \hline 0 & \mu I'' \end{array}\right)$$

con I', I'' matrici identiche degli ordini q e $p-q$.

Dopo di ciò, dalla relazione

$$\pi^*\pi\omega = \omega(TT^*)_{-1},$$

che segue dalle (1), cioè dalla

$$\pi^*\pi(I\,|\,\tau) = (I\,|\,\tau)(TT^*)_{-1},$$

ove si è posto ([17]) $\omega = (I\,|\,\tau)$, si deduce

$$\pi^*\pi = E, \qquad E\tau = \tau E.$$

Dalla seconda di queste relazioni, scrivendo

$$\tau = \left(\begin{array}{c|c} \tau_1 & \tau_3 \\ \hline \tau_4 & \tau_2 \end{array}\right), \qquad \tau_4 = (\tau_3)_{-1}$$

---

(15) Mem. cit. (5), § 1, n. 4.

(16) CASTELNUOVO G.: Nota cit. (3).

(17) S'intende dopo gli scambi predetti, i quali equivalgono ancora a un cambiamento di retrosezioni.

con τ_1 di ordine q, quindi τ_2 di ordine $p-q$, ed entrambe simmetriche, segue che dev'essere

$$\lambda\tau_3 = \mu\tau_3,$$

quindi $\tau_3 = \tau_4 = 0$. Dunque si ha

$$\tau = \left(\begin{array}{c|c} \tau_1 & 0 \\ \hline 0 & \tau_2 \end{array}\right)$$

e la matrice ω, dopo opportuni scambi di colonne, acquista l'aspetto

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} \omega_1 & 0 \\ \hline 0 & \omega_2 \end{array}\right), \qquad \omega_1 = (I' \mid \tau_1), \qquad \omega_2 = (I'' \mid \tau_2),$$

cioè risulta composta mediante le due matrici di RIEMANN ω_1 ed ω_2, di generi q e $p-q$.

Segue che C possiede due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili, fra loro complementari, delle dimensioni q e $p-q$.

È ovvio come si procederebbe e che cosa si otterrebbe nel caso in cui TT^* possedesse più di due radici caratteristiche distinte.

6. - Il prodotto di $\mathfrak{T}$ per la sua inversa risulta necessariamente a valenza (cioè, con riferimento canonico, gli elementi diagonali di TT^* son tutti eguali) oppur no secondo che un taglio su R eseguito secondo una certa linea rompe o non rompe la connessione di R.

Consideriamo, infatti, una delle retrosezioni di R, ad esempio γ_1, γ_{p+1}, e diciamo A_1 il suo punto d'incrocio, A_1', A_1'',...., A_1^β i punti corrispondenti, su R'. I cicli γ_1' e γ'_{p+1} s'intersecheranno in questi β punti ed, eventualmente, in *altri* punti: sia M' uno di questi ultimi. Poichè il ciclo γ_1' (γ'_{p+1}) è costituito da tutti e soli i corrispondenti dei puntti di γ_1 (di γ_{p+1}) il punto M' sarà comune ai due gruppi di β punti che corrispondono a due punti M_1, M_2, il primo su γ_1, il secondo su γ_{p+1} (eventualmente a più di due, se la serie indotta da $\mathfrak{T}$ su C è composta con un'involuzione).

Mantenendo fermo il punto M_2 (od M_1) si deformi per continuità il ciclo γ_{p+1} (o γ_1) in modo che la sua intersezione A_1 con γ_1 (con γ_{p+1}) descriva il ciclo γ_1 (o γ_{p+1}). Quando A_1 verrà in M_1 (in M_2) uno dei punti corrispondenti su R' coinciderà con M'. Ciò prova che, deformando con continuità (uno o) entrambi i cicli γ_1', γ'_{p+1}, possono sopprimersi le intersezioni che non compaiono nel gruppo A_1', A_1'',...., A_1^β, ossia che l'indice $[\gamma_1' \cdot \gamma'_{p+1}]$ dipende soltanto da queste intersezioni.

Il punto A_1 d'incrocio di γ_1, γ_{p+1} è un punto arbitrario, quindi può scegliersi tale che prendendo in un suo intorno convenientemente piccolo altri $p-1$ punti A_2,...., A_p, tutti distinti, in questi i β jacobiani $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi', \eta')}$ conservan gli stessi segni assunti in A_1. Perciò, incrociando in A_r le coppie di cicli γ_r, γ_{p+r}, si ha che gl'indici $[\gamma_r' \cdot \gamma'_{p+r}]$ son tutti eguali, ossia che TT^* è scalare, cioè che il prodotto $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}^{-1}$ dà, su R, una corrispondenza a valenza.

Questa conclusione può prendersi, soltanto quando le retrosezioni γ_r, γ_{p+r} possono portarsi a incrociar nei punti $A_1, \dots, A_p$, situati in uno stesso intorno, senza passar per punti nei quali qualcuno dei jacobiani predetti si annulla. Il che è certamente possibile se il numero di questi punti è finito ed anche quando essi costituiscono un insieme infinito la cui asportazione non rompe la connessione di R.

Se invece questo insieme costituise, ad esempio, una linea capace di rompere la connessione di R, gli indici $[\gamma_r' \cdot \gamma'_{p+r}]$ non son, *necessariamente*, tutti eguali ed il prodotto TT^* è diagonale, ma non certamente scalare ([18]).

7. - Ipotesi essenziale per la validità del ragionamento del n.° 2 è che sui cicli γ_r, γ_s non esistano infinite coppie di punti (un punto su γ_r, l'altro su γ_s) che diano luogo a uno stesso di R'. Analogamente per i cicli δ_r, δ_s. Questa condizione è soddisfatta, mercè opportuna scelta delle retrosezioni, se entrambi gli indici α e β della corrispondenza si mantengan finiti al variare di M su R e di M' su R'.

Se questa condizione non si verifica, la forma diagonale pel prodotto TT^* potrebbe non esser raggiungibile.

È questo quello che necessariamente accade, ad esempio, quando la matrice T è unimodulare ma non soddisfa alla (I), perchè allora TT^* non è riducibile a forma diagonale con cambiamento di retrosezioni in retrosezioni, altrimenti questa sarebbe addirittura l'identità, cioè varrebbe necessariamente la (I) ([19]).

In tal caso, le due curve C e D hanno una stessa varietà di JACOBI V_p (a meno di trasformazioni birazionali) la quale è legata alla comune matrice di periodi primitivi, non normali, ΩT_{-1}. Allora fra C e D si ha una classe di corrispondenze algebriche non soddisfacenti alla condizione predetta.

Perchè la comunanza della V_p dia luogo alla identità birazionale di C e D, basta assicurarsi che nella classe di corrispondenze individuata dalla matrice unimodulare T che lega le due tabelle di periodi primitivi ω ed Ω, ne esiste (almeno) una ad indici ovunque finiti ([20]). Se ciò avviene, T soddisferà necessariamente alla (I).

([18]) Dal che quella linea rompe la connessione di R non segue che i cicli γ_r debbono necessariamente esser tagliati da essa. Basta pensare a un modello concreto di R: ed esempio alla sfera con p manichi. Se quella linea spezza R, ad esempio in 2 parti, si ha invece che le retrosezioni γ_r, γ_{p+r} possono ripartirsi in 2 gruppi ciascuno giacente totalmente su una sola di quelle due parti.

([19]) Cfr., a tal proposito, col § 2, n.° 8 della mia Mem. cit. ([5]).

([20]) Oppure (SEVERI) basta sapere che una delle due curve è priva di corrispondenze simmetriche singolari. Per una condizione meno restrittiva di quest'ultima vedasi la mia Mem. cit. ([5]), § 3, n.° 10 *a*) ed osservazione finale.