

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUIGI BRUSOTTI

## **Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni di analisi**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 11, n° 3-4 (1942), p. 211-215*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1942\\_2\\_11\\_3-4\\_211\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_211_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DIMOSTRAZIONE DI UN LEMMA ALGEBRICO  
UTILE IN QUESTIONI DI ANALISI

di LUIGI BRUSOTTI (Pavia).

Il presente scritto trae la sua origine da una conversazione recentemente svoltasi fra me ed il mio giovane collega Prof. SILVIO CINQUINI; esso è inteso a dimostrare in modo semplice ed elementare una proposizione algebrica che può essere utile esplicitamente stabilire, in vista delle applicazioni che, com'egli ha avuto occasione di osservare <sup>(1)</sup>, se ne possono fare a talune questioni di Analisi.

Veramente è risultato dapprima conveniente (num. 1) aggiungere un'ipotesi che, precisando la tesi, permette una dimostrazione per induzione matematica. Dall'enunciato così modificato si passa poi facilmente (num. 2) a quello richiesto.

1. - I numeri che si considerano, salvo contrario avviso, si suppongano reali. Ciò posto, siano i polinomî

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

e si introducano le condizioni seguenti:

I. Nel campo

$$(2) \quad a_i \leq x_i \leq b_i, \quad a_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

abbiasi:

$$(3) \quad \begin{cases} f_h < 0 & \text{per } x_h = a_h, \\ f_h > 0 & \text{per } x_h = b_h, \end{cases} \quad h = 1, \dots, n.$$

---

<sup>(1)</sup> S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie*. [Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 14 (1940), pp. 157-170]; e specialmente la nota <sup>(12)</sup> a piè di pag. 168.

II. Le soluzioni (reali e complesse) di ciascuno dei sistemi

$$(4)_h \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1=0, \\ \dots\dots\dots \\ f_h=0, \\ x_{h+1}=a_{h+1}, \\ x_n=a_n, \end{array} \right.$$

con  $h=1, \dots, n$ , siano in numero finito e « semplici » (nel consueto senso dell'algebra).

Dico che: *Supposte soddisfatte le condizioni I e II, sono in numero dispari i punti del campo (2) nei quali si annullano tutti i polinomi (1).*

La proposizione è vera per  $n=1$ ; basterà dunque dimostrare che, se vale per  $n-1$  polinomi, vale anche per  $n$ .

Osservo intanto che l'intersezione delle ipersuperficie :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1=0, \\ \dots\dots\dots \\ f_{n-1}=0, \end{array} \right.$$

è una curva algebrica reale  $C$  e non una varietà algebrica di dimensione maggiore, perchè in tal caso il sistema  $(4)_{n-1}$ , che si ricava da (5) aggregandovi la  $x_n=a_n$ , avrebbe infinite soluzioni contro l'ipotesi che II sia soddisfatta.

Ma, per II, il sistema  $(4)_{n-1}$  deve avere soluzioni tutte semplici e d'altra parte la  $C$ , pensata come insieme di punti reali (propri ed impropri), si compone di eventuali punti isolati (almeno doppi) e di « circuiti » (eventualmente dotati di punti multipli e di mutui appoggi), onde  $C$  avrà tutte le sue intersezioni (reali) coll'iperpiano  $x_n=a_n$  in punti semplici di singoli circuiti e senza contatti.

Simile comportamento avrà poi  $C$  coll'ipersuperficie  $f_n=0$ ; come si vede applicando la condizione II al sistema  $(4)_n$ , che si ricava da (5) aggregandovi la  $f_n=0$ ; anzi di più la  $C$  non passerà per alcuno degli eventuali punti multipli della ipersuperficie.

Nel campo (2) la  $C$  si compone allora di punti isolati, di circuiti, infine di « tratti » aventi gli estremi sul contorno, anzi sulle « facce »  $x_n=a_n$ ,  $x_n=b_n$ , sulle rimanenti essendo  $\neq 0$  almeno una delle  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ ; tali tratti si distingueranno in tratti  $\theta_a$  (risp.  $\theta_b$ ) aventi entrambi gli estremi sulla  $x_n=a_n$  (risp.  $x_n=b_n$ ) ed in tratti  $\theta_{ab}$  con un estremo sulla  $x_n=a_n$  e l'altro sulla  $x_n=b_n$ , essendo poi gli estremi dei tratti  $\theta_a$  e  $\theta_{ab}$  sulla  $x_n=a_n$  tutti, per quanto precede, fra loro distinti.

Ma giova per il seguito di mostrare altresì che tali estremi sulla faccia  $x_n=a_n$  sono complessivamente in numero dispari.

Il che equivale a provare che sono in numero dispari i punti del campo

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1,$$

nei quali si annullano tutti i polinomî

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \end{cases}$$

nelle  $n-1$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ; e ciò subito scende dalla ipotesi inerente al procedimento di induzione matematica, appena si osservi che per gli  $n-1$  polinomî (6) sono soddisfatte le condizioni I e II, le quali deduconsi dalle analoghe relative ai polinomî (1) per  $h=1, 2, \dots, n-1$ , ponendo, come è lecito,  $x_n = a_n$  nelle  $f_i$  e sopprimendo in ciascuno dei sistemi (4)<sub>h</sub> l'ultima equazione.

Dall'essere dispari il numero degli estremi sulla faccia  $x_n = a_n$  segue che è pure dispari il numero dei tratti  $\theta_{ab}$ ; ed invero di tali estremi (tutti distinti) due ne assorbe ogni tratto  $\theta_a$  ed uno solo ogni tratto  $\theta_{ab}$ .

Si passi ora alla diretta considerazione dei punti del campo (2) nei quali si annullano tutti i polinomî (1), ossia, in tale campo, dei punti della  $C$  in cui la  $f_n$  si annulla.

Ricordato il comportamento di  $C$  colla  $f_n = 0$ , saranno intanto da escludersi i punti isolati (almeno doppi) e, considerata  $f_n$  come funzione del punto corrente su di un circuito o su di un tratto, la  $f_n$  si annullerà quando e soltanto quando essa cambi di segno.

Se s'immagina allora che, nel campo (2), ogni circuito sia percorso partendo da un punto (fuori della  $f_n = 0$ ) e ritornandovi, mentre ogni tratto lo sia dall'uno all'altro estremo, i valori iniziale e finale di  $f_n$  saranno ogni volta non nulli e precisamente dello stesso segno per un circuito o per un tratto  $\theta_a, \theta_b$ , di segno opposto per un tratto  $\theta_{ab}$ .

Onde si ha che su ciascun circuito e su ciascun tratto  $\theta_a, \theta_b$  è pari il numero dei punti in cui  $f_n$  si annulla, mentre esso è dispari su ciascun tratto  $\theta_{ab}$ . E, poichè i tratti  $\theta_{ab}$  sono in numero dispari, è dispari, nel campo (2), il numero dei punti di  $C$  nei quali  $f_n$  si annulla, ossia è ivi dispari il numero dei punti in cui si annullano tutti i polinomî (1), come volevasi.

2. - Si passi ora a dimostrare che: *Supposta soddisfatta la condizione I, esiste nel campo (2) almeno un punto in cui tutti i polinomî (1) si annullano.*

Se è soddisfatta la II, l'affermazione è immediata conseguenza della proposizione stabilita al numero precedente.

Siano dunque

$$(7) \quad f_1^*, \dots, f_n^*$$

polinomî soddisfacenti alla I ma non alla II.

Allora fra i relativi sistemi  $(4)_h$  uno almeno sarà od indeterminato o dotato di qualche soluzione multipla e sarà quindi, per esso, nullo il discriminante  $\Delta_h$ , dell'equazione in  $x_1$  (eventualmente identica) ottenuta eliminandone le  $x_2, \dots, x_n$ .

Ne segue che per i polinomî (7) è

$$\Delta = \prod_{h=1}^n \Delta_h = 0,$$

mentre, se per i polinomî

$$(8) \quad \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$$

(soddisfacenti alla I) risulta

$$\Delta \neq 0,$$

per essi è soddisfatta anche II.

Ora, di una  $n$ -pla di polinomî  $f_i$ , di gradi assegnati, ma affatto liberi da condizioni, si assumano complessivamente i coefficienti e si interpretino come coordinate di un punto-immagine  $P$  corrente in un iperspazio  $S$ , nel quale si introduca il campo  $K$  determinato dalle (3) e perciò composto dei punti-immagine di  $n$ -ple soddisfacenti alla I.

In  $K$  e sull'ipersuperficie algebrica  $\Delta=0$  sarà il punto-immagine  $P^*$  della  $n$ -pla (7).

Condotta per  $P^*$ , in  $S$  ma fuori della  $\Delta=0$ , una retta  $g$ , esisterà in  $K$  un intorno di  $P^*$ , tale che in esso per ogni punto  $\bar{P}$  di  $g$  ( $\neq P^*$ ) sia  $\Delta \neq 0$ , onde sarà  $\bar{P}$  punto-immagine di una  $n$ -pla (8) per cui, colla condizione I, è soddisfatta anche la II.

Quando  $\bar{P}$  tende a  $P^*$ , allora nel campo (2) i punti in cui (num. 1) si annullano tutti i polinomî (8) tendono a punti in cui si annullano tutti i polinomî (7). Nel campo (2) esiste dunque almeno un punto in cui tutti i polinomî (7) si annullano.

La richiesta proposizione è così dimostrata.

OSSERVAZIONE. - La deduzione del risultato di num. 2 da quello di num. 1 potrebbe conseguirsi anche facendo uso di un noto metodo <sup>(2)</sup> fondato sulla considerazione del minimo di

$$\sum_{i=1}^n |f_i|,$$

dopo aver stabilito che una  $n$ -pla  $f_i^*$  può approssimarsi con  $n$ -ple  $\bar{f}_i$ .

<sup>(2)</sup> Cfr. p. es. S. CINQUINI, loc. cit. in (4).

Si è qui preferita altra via che è sembrata più conforme all'indole algebrica delle proposizioni considerate, anche perchè essa permette di sostituire nella prima proposizione alla condizione II la condizione meno restrittiva :

II<sup>bis</sup> Nel campo (2) siano in numero finito e semplici le soluzioni del sistema  $f_i=0$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Invero se  $f_i^*$  è una  $n$ -pla soddisfacente alla condizione II<sup>bis</sup>, ma non alla II, i punti del campo (2) nei quali si annullano tutte le  $\bar{f}_i$  tendono ad altrettanti (fra loro distinti) in cui si annullano tutte le  $f_i^*$ , nè possono comparire ulteriori punti di annullamento.