

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Su un teorema di esistenza di calcolo delle variazioni e una
proposizione generale di calcolo funzionale**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 12,
n° 3-4 (1947), p. 119-133*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_119_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UN TEOREMA DI ESISTENZA DI CALCOLO
DELLE VARIAZIONI E UNA PROPOSIZIONE GENERALE
DI CALCOLO FUNZIONALE

di SANDRO FAEDO (Roma).

In una mia nota ⁽¹⁾ apparsa nel fascicolo precedente di questi Annali ho dato un teorema di esistenza dell'estremo assoluto in campi illimitati che — come mi ha fatto notare S. CINQUINI — non è sempre vero nelle condizioni generali da me poste.

Era mia intenzione di pubblicare una breve rettifica indicando le ulteriori precisazioni da farsi per rendere rigorosa la mia dimostrazione; invece, seguendo un consiglio del mio Maestro L. TONELLI, riespongo ora il mio lavoro in forma completa, soprattutto allo scopo di mettere in evidenza la nuova forma di ragionamento da me fatta che è suscettibile di applicazioni anche ad altri tipi di problemi; più precisamente il detto modo di ragionare si può applicare a tutti quei problemi in cui si tratti di dimostrare che una certa proprietà (già nota quando le grandezze che si considerano sono limitate) continua a rimanere quando queste non sono più limitate.

Come esempio consideriamo un *qualunque* teorema di esistenza del minimo per l'integrale

$$I(C) = \int_C f[x, y(x), y'(x)] dx,$$

che sussista quando la curva assolutamente continua $C: y=y(x)$ appartenga a una classe completa ⁽²⁾ di curve di un campo limitato

$$(1) \quad |y| \leq M; \quad a \leq x \leq b.$$

Per dimostrare questo teorema seguendo il metodo diretto di L. TONELLI si dimostra fra l'altro che la classe (K_1) delle curve C per cui è

$$(2) \quad I(C) \leq N$$

è costituita di curve equi-assolutamente continue.

⁽¹⁾ S. FAEDO: *Su un teorema di esistenza dell'estremo assoluto in campi illimitati*. Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie 2^a, vol. XII, fasc. I, 1943.

⁽²⁾ L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. 2^o, pag. 281.

Ne segue che per tutte le curve di (K_1) è

$$|y(x)| \leq |y(a)| + F(N, M),$$

dove con $F(N, M)$ si indica un numero non negativo che dipenderà oltre che da N e M dalla $f(x, y, y')$. Si ha anche, posto

$$Y(x) = \max y(x) \text{ in } (a, x),$$

$$|y(x)| \leq |y(a)| + F(N, Y(x)),$$

per ogni curva di (K_1) .

Togliamo ora la condizione (1), cioè il campo non sia più limitato e consideriamo una classe completa (K) di curve C per cui sia

$$a \leq x \leq b \qquad |y(a)| \leq L.$$

La sottoclasse (K_2) delle curve di (K) che verificano la (2) soddisfa alla

$$(3) \qquad |y(x)| \leq L + F(N, Y(x)),$$

dove ora $Y(x)$ può non essere limitata.

Ma se si può dedurre che ogni curva C di (K_2) per il fatto che soddisfa alla (3) appartiene a un campo limitato, cioè che è per ogni curva di (K_2)

$$(4) \qquad |y(x)| \leq M_1,$$

allora il minimo di $I(C)$ in (K) coincide col minimo di $I(C)$ in (K_2) e questo esiste in quanto la classe (K_2) appartiene a un campo limitato. Si riesce così a dedurre il teorema di esistenza per campi illimitati da quello valevole se il campo è limitato.

In questo modo ottengo nel § 1 una proposizione (teorema A) che dà un largo criterio per estendere i teoremi di esistenza del Calcolo delle Variazioni da campi limitati a campi illimitati e in particolare ne deduco (teorema B) un teorema di esistenza che sostanzialmente era stato già ottenuto da S. CINQUINI.

In queste proposizioni interviene una funzione $\varphi(z)$ legata alla $f(x, y, y')$ da alcune proprietà; indico (Lemma I) un procedimento per costruire la $\varphi(z)$ in modo che abbia tutte le dette proprietà salvo una; si deciderà poi la validità del teorema d'esistenza se la $\varphi(z)$ così costruita verifica quest'ultima condizione.

È essenziale in questo procedimento di dimostrazione la deduzione della (4) dalla (3), ciò che ottengo con un lemma che chiamo *lemma di Gronwall generalizzato*, in quanto estende ed affina un notevole lemma di GRONWALL⁽³⁾ che è di grande utilità in molte questioni.

⁽³⁾ T. H. GRONWALL: *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*. Ann. of Math., (2), 20, (1919), pp. 292, 296.

Nel § 2, per mostrare la portata generale del mio ragionamento, do una nuova larghissima estensione del lemma di GRONWALL.

Con $A[x, y_a^x]$, si indichi un funzionale reale, cioè un numero reale dipendente secondo una data legge dal numero reale x e dai valori della funzione continua $y(t)$ nell'intervallo (a, x) .

L'estensione del lemma di GRONWALL consiste in *una proposizione che permette di dedurre una limitazione superiore per tutte le funzioni che verificano la disuguaglianza*

$$y(x) \leq A[x, y_a^x].$$

Da questa formulazione generale del lemma di GRONWALL si potrebbero dedurre teoremi d'esistenza per campi illimitati più larghi di quelli dati nel § 1. Per mostrare come questi procedimenti abbiano carattere generale preferisco far vedere che si possono ottenere rapidamente teoremi di unicità per l'equazione funzionale

$$y(x) = A[x, y_a^x]$$

e in particolare per l'equazione

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \int_0^x K(x, u, v, y(u), y(v)) du dv.$$

Per questa via si potrebbero riottenere rapidamente i più noti criteri di unicità per le equazioni differenziali ordinarie ⁽⁴⁾, cioè che ometto di fare per ragioni di brevità.

§ 1.

1. - Indichiamo con $A^{(n)}$ ⁽⁵⁾ un insieme di uno spazio cartesiano $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ad $n+1$ dimensioni, che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito. Per ogni punto di $A^{(n)}$ ed ogni valore finito di $y^{(n)}$ è definita una funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, continua insieme alla derivata parziale $f_{y^{(n)}}(x, y, \dots, y^{(n)})$.

Se

$$C^{(n)} : y = y(x) \quad a \leq x \leq b$$

è tale che $y^{(n-1)}(x)$ sia assolutamente continua in (a, b) , tutti i punti

$$[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)] \quad a \leq x \leq b,$$

⁽⁴⁾ Cfr. G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*. Vol. 2°, pp. 85-100.

⁽⁵⁾ Per le definizioni relative ai problemi di Calcolo delle Variazioni d'ordine n , V. S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n* . Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II^a, Vol. V^o, 1936.

appartengano ad $A^{(n)}$ ed $f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)]$ sia integrabile in (a, b) , indichiamo con $I(C^{(n)})$ l'integrale

$$I(C^{(n)}) = \int_{C^{(n)}} f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] dx.$$

Dimostriamo anzitutto il

LEMMA I: *Se*

a) esiste un numero finito h tale che in tutti i punti di $A^{(n)}$ sia $-h \leq x \leq h$;

β) esiste una costante $l > 0$ per cui sia, in ogni punto di $A^{(n)}$,

$$(5) \quad \lim_{|y^{(n)}| \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x, y, \dots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| \geq l;$$

γ) $I(C^{(n)})$ è quasi regolare positivo;

allora, fissata una costante $L > 0$, si può costruire una funzione $\varphi_L(Y)$, finita, non negativa e non decrescente, definita per $0 \leq Y < +\infty$, tale che se è

$$\begin{aligned} |y^{(n)}| &\geq \varphi_L(|y^{(n-1)}|), \\ |y^{(r)}| &\leq (2h)^{n-r-1} |y^{(n-1)}| + L \sum_{i=0}^{n-r-2} (2h)^i \quad \left(\begin{array}{l} r=0, 1, \dots, n-2 \\ Y^{(0)} \equiv Y \end{array} \right), \end{aligned}$$

risulti

$$f[x, y, y', \dots, y^{(n)}] \geq \frac{l}{2} |y^{(n)}|.$$

Indichiamo con $A^{(n)}$ la parte limitata di $A^{(n)}$ per cui è

$$(6) \quad \begin{cases} |y^{(n-1)}| \leq Y, \\ |y^{(r)}| \leq [2h]^{n-r-1} Y + L \sum_{i=0}^{n-r-2} (2h)^i, \end{cases} \quad r=0, 1, \dots, n-2,$$

dove Y è un numero positivo prefissato.

Sia $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ un punto di $A^{(n)}$. Poichè $I(C^{(n)})$ è quasi regolare positivo

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

è una funzione non decrescente di $y^{(n)}$ e quindi, per la (5), è

$$\lim_{y^{(n)} \rightarrow +\infty} f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq l.$$

Si determini $q > 0$ in modo che se è $y^{(n)} \geq q$ sia

$$f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) \geq \frac{2l}{3} y^{(n)},$$

$$f_{y^{(n)}}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) \geq \frac{2l}{3}.$$

Per la continuità di f e $f_{y^{(n)}}$ si può determinare un intorno R di $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ in modo che, se $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ è un punto qualunque di R che appartiene ad $A_Y^{(n)}$ sia pure

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, q) \geq \frac{l}{2} q,$$

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, q) \geq \frac{l}{2}$$

e quindi, per $y^{(n)} > q$,

$$f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2}.$$

Ne segue, in un punto di R e per $y^{(n)} > q$,

$$\frac{f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, q)}{y^{(n)} - q} = f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \bar{y}^{(n)}) \geq \frac{l}{2},$$

essendo $\bar{y}^{(n)}$ un conveniente valore di $y^{(n)} > q$.

Ma allora è

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2} y^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, q) - q \frac{l}{2} \geq \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

È così provato che tutti i punti di R (che appartengono ad $A_Y^{(n)}$) godono della proprietà che per $y^{(n)} \geq q$ è

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

Si ricopra ogni punto di $A_Y^{(n)}$ con il corrispondente intorno R . Poichè $A_Y^{(n)}$ è chiuso, per il teorema di PINCHERLE - BOREL esistono un numero finito di intorni R tali che ogni punto di $A_Y^{(n)}$ è interno ad almeno uno di essi. Se φ_1 è il maggiore dei q relativi a questi R , ne segue che per $y^{(n)} \geq \varphi_1$ è, qualunque sia $[x, y, \dots, y^{(n-1)}]$ in $A_Y^{(n)}$,

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2} y^{(n)}.$$

In modo analogo si prova che si può determinare un numero $\varphi_2 > 0$ tale che, se è

$$y^{(n)} \leq -\varphi_2,$$

è

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq -\frac{l}{2} y^{(n)}.$$

Se φ è il maggiore fra φ_1 e φ_2 è, per $|y^{(n)}| \geq \varphi$

$$f(x, y, \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2} |y^{(n)}|.$$

Conveniamo di prendere per φ il numero più piccolo possibile.

Ad ogni numero positivo Y corrisponde un campo $A_Y^{(n)}$ e a questo un numero φ , che è così funzione di Y ,

$$\varphi_L(Y).$$

Dal modo in cui si è costruita tale funzione è finita, positiva o nulla e non decrescente.

Si ha che se è

$$|y^{(n)}| \geq \varphi_L(|y^{(n-1)}|)$$

è

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq \frac{l}{2} |y^{(n)}|$$

purchè sia anche

$$|y^{(r)}| \leq (2h)^{n-r-1} |y^{(n-1)}| + L \sum_{i=0}^{n-r-2} (2h)^i \quad (r=0, 1, \dots, n-2).$$

2. - T. H. GRONWALL ha dato il seguente lemma:

Se per $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ la funzione continua $z(x)$ soddisfa alle disuguaglianze

$$(7) \quad 0 \leq z(x) \leq \int_{x_0}^x [Mz(x) + A] dx,$$

dove M ed A sono costanti non negative, allora sussiste la limitazione

$$0 \leq z(x) \leq Ah e^{Mh} \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + h).$$

Dimostriamo ora il

LEMMA II (di Gronwall generalizzato):

Sia $\varphi(z)$ una funzione non negativa e non decrescente definita per $-\infty < z < +\infty$ ed esistano due numeri H e K con $H < K$ per cui sia

$$(8) \quad \int_H^K \frac{dz}{\varphi(z)} \geq h;$$

allora, se per $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ la funzione continua $z(x)$ soddisfa alla disuguaglianza

$$(7') \quad z(x) \leq \int_{x_0}^x \varphi[z(x)] dx + H,$$

è anche

$$(9) \quad z(x) \leq K, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

Se è $\varepsilon > 0$ dalla (7') segue

$$(10) \quad z(x) < \int_{x_0}^x \varphi[z(x)] dx + H + \varepsilon.$$

Consideriamo la funzione $z = z_1(x)$ che soddisfa all'equazione differenziale a variabili separate

$$(11) \quad z_1' = \varphi(z_1)$$

con la condizione

$$z_1(x_0) = H + \varepsilon.$$

Per la (8) $z_1(x)$ esiste in tutto un intorno destro Γ_ε di x_0 , che per $\varepsilon \rightarrow 0$ contiene $(x_0, x_0 + h)$. In tale intorno Γ_ε è

$$(12) \quad z(x) < z_1(x).$$

Infatti, per $x = x_0$ è per la (8')

$$z(x_0) \leq H < z_1(x_0)$$

e quindi c'è tutto un intorno destro di x_0 in cui è verificata la (12).

Sia x_1 il primo punto di Γ_ε in cui è

$$z(x_1) = z_1(x_1).$$

Si avrebbe

$$(13) \quad z(x_1) = z_1(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi[z_1(x)] dx + H + \varepsilon \geq \int_{x_0}^{x_1} \varphi[z(x)] dx + H + \varepsilon,$$

perchè in (x_0, x_1) è $z \leq z_1$ e la funzione $\varphi(z)$ è non decrescente. Ma la (13) è in contraddizione con la (10) a cui deve soddisfare la $z(x)$. In tutto Γ_ε sussiste quindi la (12) per ogni $\varepsilon > 0$ e perciò, indicata con $\bar{z}_1(x)$ la soluzione dell'equazione (11) per cui è $\bar{z}_1(x_0) = H$, si ha per $z(x)$ la limitazione

$$(14) \quad z(x) \leq \bar{z}_1(x) \leq \bar{z}_1(x_0 + h).$$

Calcoliamo l'espressione di $\bar{z}_1(x_0 + h)$. Integrando la (11) si ottiene

$$\int_H^{\bar{z}_1} \frac{dz}{\varphi(z)} = x - x_0,$$

che definisce $\bar{z}_1(x)$; in particolare $\bar{z}_1(x_0 + h)$ è dato da

$$\int_H^{\bar{z}_1(x_0 + h)} \frac{dz}{\varphi(z)} = h.$$

È quindi, per la (8), $\bar{z}_1(x_0 + h) \leq K$ e dalla (14) segue la (9).

OSSERVAZIONE I. - Se la funzione $\varphi(z)$ è tale che sia anche

$$\int_a^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = +\infty$$

con $\varphi(a) > 0$, allora comunque grande si fissi h si può sempre determinare un numero finito K per cui è

$$\int_H^K \frac{dz}{\varphi(z)} \geq h$$

e per cui vale la (9).

OSSERVAZIONE II. - Se invece è finito

$$\int_a^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

fissato H si può sempre trovare K in modo che sia soddisfatta la (9) purchè sia

$$h < \int_H^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

OSSERVAZIONE III. - Si faccia nel lemma II

$$\varphi(z) = Mz + A \quad \text{e, posto} \quad H > -\frac{A}{M},$$

si determini $K > H$ in modo che sia

$$\int_H^K \frac{dz}{Mz + A} = h;$$

integrando si ottiene

$$K = H e^{Mh} + \frac{A}{M} (e^{Mh} - 1)$$

e quindi si ha:

Se è

$$z(x) \leq \int_{x_0}^x [Mz(x) + A] dx + z(x_0) \quad \left(M \geq 0, A \geq 0, z(x_0) > -\frac{A}{M} \right)$$

è anche

$$z(x) \leq z(x_0) e^{Mh} + \frac{A}{M} (e^{Mh} - 1) < z(x_0) e^{Mh} + Ah e^{Mh}$$

e si riottiene così, con una limitazione più forte ⁽⁶⁾ il lemma di GRONWALL.

3. - TEOREMA A. *Se sono soddisfatte le ipotesi a) β) γ) del Lemma I; δ) esiste una costante N per cui è*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq N$$

in ogni punto di A e ogni valore finito di $y^{(n)}$;

⁽⁶⁾ Cfr. E. KAMKE: *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*. (Leipzig, 1930), pag. 93.

ε) $(K^{(n)})$ è una classe completa di ordine n ⁽⁷⁾ di curve $C^{(n)} : y = y(x)$ appartenenti ad $A^{(n)}$, per ognuna delle quali esiste almeno un valore \bar{x} di x per cui è

$$(15) \quad |y^{(i)}(\bar{x})| \leq L \quad (i=0, \dots, n-1; y^{(i)} \equiv y);$$

η) posto
$$H = \frac{2}{l} [M + 2h|N|] + L \quad \text{è}$$

$$(16) \quad \int_{\bar{H}}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} > 2h,$$

essendo $\varphi(z)$ la funzione φ_L costruita nel Lemma I; allora le curve C della sottoclasse $(K_1^{(n)})$ di $(K^{(n)})$ per cui è

$$I(C^{(n)}) \leq M,$$

appartengono tutte a una parte limitata $A_1^{(n)}$ del campo $A^{(n)}$.

Sia

$$C^{(n)} : y = y(x) \quad -h \leq a \leq x \leq b \leq h$$

una qualunque curva di $(K_1^{(n)})$ e x un qualunque punto di (a, b) con $x \geq \bar{x}$ [v. (15)]. Si ottiene

$$(17) \quad |y^{(n-1)}(x)| \leq L + \int_{\bar{x}}^x |y^{(n)}(x)| dz.$$

Definiamo la funzione $z(x)$ nel modo seguente sull'intervallo (\bar{x}, b) :

Per $x = \bar{x}$ è $z(\bar{x}) = |y^{(n-1)}(\bar{x})|$,

per $\bar{x} < x' \leq b$ si ponga $z(x') = \max |y^{(n-1)}(x)|$ su (\bar{x}, x') .

Ciò premesso, dividiamo i punti dell'intervallo (\bar{x}, x) in due insiemi E_1 ed E_2 .

Un punto x starà nell'insieme E_1 se è

$$|y^{(n)}(x)| < \varphi[z(x)].$$

Se invece

$$|y^{(n)}(x)| \geq \varphi[z(x)]$$

il punto x apparterrà all'insieme E_2 . L'insieme $E_1 + E_2$ viene così a coincidere con l'intervallo (\bar{x}, x) a meno di un insieme di misura nulla.

Dalla (17) segue

$$(18) \quad |y^{(n-1)}(x)| < L + \int_{\bar{x}}^x |y^{(n)}(x)| dx = L + \int_{E_1} |y^{(n)}(x)| dx + \int_{E_2} |y^{(n)}(x)| dx \leq \\ \leq L + \int_{E_1} \varphi[z(x)] dx + \int_{E_2} |y^{(n)}(x)| dx.$$

(7) Cfr. S. CINQUINI, loc. cit. in (5).

Nei punti di E_2 , tenuto conto della (15), è:

$$\begin{aligned} |y^{(n-1)}(x)| &\leq z(x) \\ |y^{(n-2)}(x)| &\leq 2hz(x) + L \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ |y(x)| &\leq (2h)^{n-1} z(x) + L \sum_{i=0}^{n-2} (2h)^i; \end{aligned}$$

pertanto i punti di $C^{(n)}$ la cui x sta in E_2 , appartengono al campo $A_{z(x)}^{(n)}$ definito dalle limitazioni (6).

Poichè in un punto E_2 è

$$|y^{(n)}(x)| \geq \varphi[z(x)]$$

è di conseguenza

$$\begin{aligned} f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] &\geq \frac{l}{2} |y^{(n)}(x)|, \\ \int_{E_2} |y^{(n)}(x)| dx &\leq \frac{2}{l} \int_{E_2} f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] dx \leq \\ &\leq \frac{2}{l} [I(C^{(n)}) + 2h|N|] \leq \frac{2}{l} [M + 2h|N|]. \end{aligned}$$

Dalla (18), posto $L + \frac{2}{l} [M + 2h|N|] = H > L$ si ottiene

$$(19) \quad |y^{(n-1)}(x)| < \int_{\bar{x}}^x \varphi[z(x)] dx + H.$$

Sia $K > H$ un numero per cui sia

$$\int_H^K \frac{dz}{\varphi(z)} \geq 2h;$$

per la (16) K esiste finito. Dalla (19), per il Lemma II, è in tutto (\bar{x}, b)

$$|y^{(n-1)}(x)| < K,$$

in cui K non dipende dalla $C^{(n)}$ scelta nella classe $(K_1^{(n)})$; analogamente si trova una limitazione superiore per $|y^{(n-1)}(x)|$ valevole in (a, \bar{x}) , pure indipendente da $C^{(n)}$; si determina così un numero D tale che per ogni curva $C^{(n)}: y=y(x)$ di $(K_1^{(n)})$ è

$$|y^{(n-1)}(x)| < D \qquad a \leq x \leq b,$$

e quindi, per le (15), tutte le curve di $(K_1^{(n)})$ appartengono ad un campo limitato $A_{\beta}^{(n)}$ (8).

4. - Se ora si suppone che per l'integrale $I(C^{(n)})$, sussista un teorema d'esistenza del minimo per campi limitati e sono soddisfatte le condizioni del teorema A, se ne deduce che esiste il minimo di $I(C^{(n)})$ anche se il campo $A^{(n)}$ è illimitato; infatti la ricerca del minimo invece che nella classe $(K^{(n)})$ può farsi in $(K_1^{(n)})$ che appartiene a una parte limitata di $A^{(n)}$, in cui vale il teorema di esistenza.

In particolare si ha un teorema di esistenza in campi illimitati, sostituendo, nel teorema A alla condizione β) l'altra che sia per ogni punto $(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{(n)}$

$$\lim_{|y^{(n)}| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \dots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty,$$

Infatti, per i campi limitati sussiste il teorema di Mc. SHANE-CINQUINI (5):

Se $I(C^{(n)})$ è quasi regolare positivo; se in ogni punto $(x, y, \dots, y^{(n)})$ del campo limitato $A_{\beta}^{(n)}$ è

$$\lim_{|y^{(n)}| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \dots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty,$$

in ogni classe completa d'ordine n di curve $C^{(n)}$ esiste il minimo assoluto di $I(C^{(n)})$.

Ne segue:

TEOREMA B. Se sono soddisfatte le ipotesi $\alpha)$, $\gamma)$, $\delta)$, $\eta)$, e se per ogni punto $(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{(n)}$ è

$$\lim_{|y^{(n)}| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, y, \dots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty,$$

allora in ogni classe $(K^{(n)})$ soddisfacente alla condizione $\varepsilon)$ esiste il minimo assoluto di $I(C^{(n)})$ (9).

(8) Di questo teorema ho fatto una applicazione agli integrali su intervallo infinito nella Nota *Un nuovo teorema di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali su un intervallo infinito*. Boll. U. M. I., 1943. Anche in questa nota occorre supporre in modo esplicito che la funzione $\varphi(z)$ sia tale che si abbia

$$\int_H^{\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = \infty.$$

(9) S. CINQUINI: *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n* . Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VI, 1937, p. 203.

§ 2.

Il teorema A si fonda in modo essenziale sul Lemma II (di *Gronwall generalizzato*); tale Lemma si può ancora notevolmente estendere, e in tal modo si potrebbero dare più larghi teoremi di esistenza dell'estremo per campi illimitati.

Della proposizione che otterremo faremo invece altre applicazioni, per mostrarne l'interesse anche per questioni molto diverse dalle precedenti.

1. - Indichiamo con $A[x, y_a^x]$ un funzionale reale, cioè un numero reale che dipende, secondo una data legge, oltre che dalla x ($a \leq x \leq b$) anche dai valori della funzione continua $y(t)$ per $a \leq t \leq x \leq b$.

Diremo che $A[x, y_a^x]$ è *non decrescente* rispetto alla y se, per ogni coppia di funzioni continue $y(t), \bar{y}(t)$, con

$$y(t) \leq \bar{y}(t) \quad a \leq t \leq x \leq b,$$

è anche

$$A[x, y_a^x] \leq A[x, \bar{y}_a^x].$$

Supporremo inoltre che il valore

$$A[a, y_a^a] = \lim_{x \rightarrow a+0} A[x, y_a^x],$$

sia costante, cioè non dipenda da $y(a)$.

Sussiste il seguente

TEOREMA C: *Se $A[x, y_a^x]$ è un funzionale non decrescente rispetto alla y e se per la funzione continua $y(x)$ è*

$$(20) \quad y(x) < A[x, y_a^x] \quad (a \leq x \leq a+h),$$

allora è anche

$$(21) \quad y(x) < \bar{y}(x) \quad (a \leq x \leq a+h)$$

dove $\bar{y}(x)$ è una qualunque soluzione continua dell'equazione funzionale

$$\bar{y}(x) = A[x, \bar{y}_a^x].$$

Infatti la (20) dà per $x=a$

$$y(a) < A[a, y_a^a] = A[a, \bar{y}_a^a] = \bar{y}(a)$$

e la (21) è verificata per $x=a$; poichè $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ sono continue la (21) è vera in tutto un intorno destro di a ; sia \bar{x} il primo, punto, con $a < \bar{x} \leq a+h$, in cui sia

$$y(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{x}).$$

e una proposizione generale di Calcolo funzionale

Si ha

$$y(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{x}) = A[\bar{x}, \bar{y}_a^x] \geq A[\bar{x}, y_a^x],$$

perchè per $a \leq x \leq \bar{x}$ è $\bar{y}(x) > y(x)$ e A è non decrescente rispetto ad y ; ma ciò è in contraddizione con la (20).

2. - Supponiamo ora che invece della (20) sussista la

$$(20') \quad y(x) \leq A[x, y_a^x].$$

Sia $y_n(x)$ una qualunque soluzione dell'equazione

$$y_n(x) = A[x, y_a^x] + \frac{1}{n}$$

È

$$(22) \quad y_{n+1}(x) < y_n(x).$$

Infatti si ha

$$y_{n+1}(x) = A[x, y_{n+1}^x] + \frac{1}{n+1} < A[x, y_{n+1}^x] + \frac{1}{n}$$

e, per il teorema C, segue la (22). Esiste quindi il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_\infty(x)$$

ed è

$$y(x) \leq y_\infty(x),$$

essendo

$$y(x) < y_n(x),$$

per ogni $y(x)$ che soddisfa alle (20'). Si ha così il

TEOREMA D: Se $A[x, y_a^x]$ è un funzionale non decrescente rispetto alla y e se per la funzione continua $y(x)$ è

$$y(x) \leq A[x, y_a^x],$$

ne segue

$$y(x) \leq y_\infty(x),$$

essendo

$$y_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

ed

$$y_n(x) = A[x, y_n^x] + \frac{1}{n}.$$

OSSERVAZIONE I^a. Se in questo teorema si pone

$$A[x, y_a^x] = \int_a^x \varphi[y(x)] dx$$

si riottiene il Lemma di GRONWALL generalizzato.

OSSERVAZIONE II^a. Se $Y(x)$ è la massima fra le soluzioni di

$$y(x) = A[x, y_a^x],$$

è

$$Y(x) = A[x, Y_a^x] < A[x, Y_a^x] + \frac{1}{n}$$

e, per il teorema C, $Y(x) < y_n(x)$ da cui segue $Y(x) \leq y_\infty(x)$.

OSSERVAZIONE III^a. Nei teoremi C e D si presuppone la risolubilità delle equazioni funzionali ivi considerate.

3. - Sia

$$(23) \quad |A[x, y_a^x] - A[x, \bar{y}_a^x]| \leq B[x, |y - \bar{y}|_a^x],$$

con $B[x, z_a^x]$ funzionale non decrescente rispetto a z e

$$z_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x), \quad \text{con } z_n(x) = B[x, z_n^x] + \frac{1}{n}.$$

Siano $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ due distinte soluzioni della equazione funzionale

$$(24) \quad y(x) = A[x, y_a^x].$$

Si ha

$$|y(x) - \bar{y}(x)| = |A[x, y_a^x] - A[x, \bar{y}_a^x]| \leq B[x, |y - \bar{y}|_a^x] \leq z_\infty(x)$$

e si ha così una limitazione per il divario fra due distinte soluzioni della (24).

Per avere un teorema di unicità per la (24) basta dare condizioni perchè sia $z_\infty(x) \equiv 0$. Perciò è sufficiente assicurarsi che $z_\infty(x)$ sia una soluzione dell'equazione

$$z = B[x, z_a^x],$$

che sia $B(x, 0) = 0$ e che per l'equazione

$$z = B[x, z_a^x]$$

sussista un teorema di unicità.

Se il funzionale $A[x, y_a^x]$ ha la proprietà che se $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ sono due soluzioni dell'equazione (24) è in tutto un intorno destro di a $y(x) \geq \bar{y}(x)$ (oppure $y(x) \leq \bar{y}(x)$), allora per giungere a teoremi di unicità basta supporre in luogo della (23) la disuguaglianza meno restrittiva

$$A[x, y_a^x] - A[x, \bar{y}_a^x] \leq B[x, (y - \bar{y})_a^x].$$

4. - Come applicazione consideriamo l'equazione funzionale

$$(25) \quad y(x) = f(x) + \int_0^x \int_0^x K[x, u, v, y(u), y(v)] du dv$$

nella funzione incognita $y(x)$, dove $f(x)$ è una funzione assegnata e il nucleo $K[x, u, v, y_1, y_2]$ è definito in un campo R .

TEOREMA: Se esistono un numero $\delta > 0$ e due funzioni non negative $\psi(u)$ e $\varphi(z)$ con $\psi(u)$ sommabile in $(0, \delta)$ e $\varphi(z)$ non decrescente per $z > 0$ con

$$(26) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{z\varphi(z)} = +\infty$$

e tali inoltre che per ogni coppia $(x, u, v, y_1, y_2), (x, u, v, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ di punti di R sia sempre

$$(27) \quad |K[x, u, v, y_1, y_2] - K[x, u, v, \bar{y}_1, \bar{y}_2]| \leq \psi(u)\psi(v)\varphi(|y_1 - \bar{y}_1|)\varphi(|y_2 - \bar{y}_2|),$$

allora l'equazione (25) possiede al più una soluzione nell'intervallo $(0, \delta)$.

Supponiamo che si abbiano in $(0, \delta)$ due distinte soluzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ della (25). Segue dalla (27), posto $z(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$,

$$0 \leq z(x) \leq \left(\int_0^x \psi(u)\varphi[z(u)] du \right)^2,$$

$$0 \leq z(x) < \left(\int_0^x \psi(u)\varphi[z(u)] du + \frac{1}{n} \right)^2.$$

Indicata con $z_n(x)$ una soluzione continua dell'equazione

$$z_n(x) = \left(\int_0^x \psi(u)\varphi[z_n(u)] du + \frac{1}{n} \right)^2,$$

per il Teorema C è $z(x) < z_n(x)$. Ma è

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{z_n(x)} \frac{dz}{z\varphi(z)} = 2 \int_0^x \psi(u) du.$$

Ne segue, per $0 \leq x \leq \delta$, $z_n(x) \leq z_n(\delta)$ ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(\delta) = 0$ per la (26) e perchè $\psi(u)$ è sommabile in $(0, \delta)$. Perciò è $z(x) \equiv 0$ in tutto $(0, \delta)$ ed è provata l'asserita unicità.