ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Sul teorema d'esistenza per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 3-4 (1947), p. 135-145

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_135_0>

SUL TEOREMA D' ESISTENZA PER LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

1. - INTRODUZIONE. - È classico il seguente teorema d'esistenza [1] per le equazioni alle derivate parziali:

Se l'equazione:

$$p=f(x, y, z, q), \tag{1}$$

definita nel campo $|x-\xi|<a$, y, z, q *qualunque, ammette le derivate* f_x, f_y f_z, f_q; $f_{yy}, f_{yz}, f_{yq}, f_{zz}, f_{zq}, f_{qq}$, *continue, e se la funzione e le derivate predette si mantengono in valore assoluto minori d'un numero* A *maggiore di uno*; *se* $\omega(\eta)$ *è una funzione definita per ogni* η *con derivate continue dei primi due ordini tali che*:

$$1+|\omega'(\eta)|+|\omega''(\eta)|\leqslant B,$$

dove B *è una costante*; *se infine è* $3aAB\leqslant 1$, *allora l'equazione* (1) *nel campo* $|x-\xi|<a$, y *qualunque, ha un integrale* $z=\psi(x, y)$ *che contiene la curva* $x=\xi$, $z=\omega(y)$ *e che possiede derivate parziali continue.*

Le condizioni ammesse da questo teorema sono evidentemente molto restrittive e si è tentato di dare dei teoremi più generali.

Il primo contributo effettivo a questa questione è stato portato dal SEVERINI [2] in una nota del 1916. Il teorema di SEVERINI presuppone soltanto le derivate f_x, f_y, f_z, f_q lipschitziane rispetto a tutti gli argomenti e la funzione $\omega(y)$ anche essa lipschitziana. Il procedimento di SEVERINI si basa sull'approssimazione delle funzioni f e ω mediante polinomi e sul teorema d'esistenza della soluzione per i sistemi d'equazioni alle derivate ordinarie.

Un ulteriore tentativo è stato fatto dal WAŻEWSKI [3]; Egli segue esattamente le stesse idee esposte dal SEVERINI molti anni prima, eliminando però dalle

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) Vedi per es. E. KAMKE: *Differenzialgleichungen reeller Funktionen*, 1930.

(2) C. SEVERINI: *Sul Problema di Cauchy*. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania, serie V, vol. X (1916).

(3) T. WAŻEWSKI: *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. Math. Zeitschrift, 43 Bd. Tanto il WAŻEWSKI quanto il DIGEL non citano il lavoro e il risultato di SEVERINI.

ipotesi tutte quelle fatte su f_x e intendendo le funzioni f, f_y, f_z, f_q lipschitziane solo rispetto a y, z, q. Poco tempo dopo E. DIGEL (4), seguendo le idee del KAMKE, ha ripreso il teorema del WAŻEWSKI dimostrandolo direttamente senza fare uso di polinomi d'approssimazione. Innanzi tutto va osservato che tutte le dimostrazioni date si basano essenzialmente sulla risoluzione d'un sistema di equazioni alle derivate ordinarie, così che la teoria delle equazioni alle derivate parziali viene a dipendere da quella delle equazioni alle derivate ordinarie. Inoltre le dimostrazioni date sono alquanto delicate, come notò anche il CARATHEODORY in un suo libro (5) nel quale dovette occuparsi di questa questione.

Era naturale tentare di trattare direttamente questo problema di esistenza senza adoperare la teoria delle curve caratteristiche e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Si poteva, per esempio, pensare all'idea delle approssimazioni successive di PICARD - PEANO, già adoperata con tanto successo in molte questioni, tra le quali la risoluzione stessa dell'equazione differenziale ordinaria. Questa via è stata tentata (6); ma se non viene seguita coi dovuti riguardi richiede l'analiticità delle funzioni f e ω.

In queste pagine ci proponiamo di arrivare al teorema di esistenza con un metodo d'approssimazioni successive facendo solo uso di considerazioni elementari e senza mai adoperare nessun risultato relativo alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie. La striscia sulla quale sarà costruito l'integrale risulterà d'ampiezza maggiore di quelle conosciute precedentemente.

Nelle considerazioni che seguono è fatto uso d'un importante lemma dovuto all'ARZELÀ (7) e dimostrato anche dal SEVERINI (8). Il lemma è il seguente:

LEMMA. - *Data una successione di funzioni*:

$$S, \qquad u_i(x, y), \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

definite in un campo C, equilimitate, affinchè esista almeno una funzione d'accumulazione continua è necessario e sufficiente che si possano assegnare

---

(4) E. DIGEL: *Über die Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. Math. zeitschrift, 44 Band (1939), pp. 445-457.

(5) C. CARATHEODORY: *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. (1935), nota a piè di pagina 36.

(6) Vedi per es. GERMAY: *Sur une méthode d'intégration par approximations successives*. C. R., 180. Un tentativo è stato anche fatto dall'ARZELÀ dopo una indagine molto accurata, ma il metodo d'approssimazione seguito non era appropriato e il tentativo rimase infruttuoso. Da queste ricerche rimase però il lemma sulle successioni di funzioni adoperato, dal SEVERINI nella nota indicata, e anche qui nel seguito.

(7) C. ARZELÀ: *Sull'esistenza degli integrali....* Memorie Accademia di Bologna (1896). - *Sulle serie di funzioni* (1899). - *Sulle serie di funzioni di variabile reale* (1902). - *Esistenza degli integrali....* (1906).

(8) C. SEVERINI, memoria citata.

numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero :

$$\sigma_n, \qquad (n=1, 2, 3....),$$

ed in corrispondenza successioni parziali della S :

$$S_{\sigma_n}, \qquad (n=1, 2....),$$

ognuna delle quali sia contenuta nella precedente e composta d'infinite funzioni equioscillanti per meno di σ_n $(n=1, 2....)$.

Osserviamo inoltre che dalla successione S possiamo estrarne un'altra che converge uniformemente alla funzione accumulazione.

2. - Sia :

$$p=f(x, y, z, q), \tag{1}$$

in cui la f indica una funzione definita per $\xi \leqslant x \leqslant \xi+a$, y, z, q qualunque. Questa funzione sia, nel campo di definizione, continua rispetto a (x, y, z, q) e abbia derivate parziali f_y, f_z, f_q lipschitziane rispetto a y, z, q con costante K. Le derivate f_y, f_z, f_q siano in valore assoluto minori d'una costante L.

Sia $\omega(y)$ una funzione definita per ogni y, continua e con derivate continue dei primi due ordini e queste derivate siano tali che :

$$|\,\omega'(y)\,| < N, \qquad |\,\omega''(y)\,| < M,$$

dove N, M sono costanti.

Risolvere l'equazione (1) significa trovare una funzione $z(x, y)$ tale che :

1°) $z(\xi, y)=\omega(y)$.

2°) $z(x, y)$ sia continua con derivate parziali $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ continue rispetto a (x, y).

3°) z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ siano tali che per $\xi \leqslant x \leqslant \xi+a$ e y qualunque, sia identicamente :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left[x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right].$$

3. - Operiamo la sostituzione :

$$x=mX,$$

dove m è una costante positiva. Poniamo :

$$\mathfrak{z}(X, y)=z(mX, y)=z(x, y),$$

avremo :

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(X, y)}{\partial X}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot m,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}(X, y)=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Quindi, se $z(x, y)$ è soluzione della (1) sarà :

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial X} = m \cdot f\left[mX, y, \mathfrak{z}(X, y), \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right],$$

dove :

$$\frac{1}{m} \cdot \xi \leqslant X \leqslant \frac{1}{m}(\xi + a).$$

Ponendo :

$$f^*(X, y, z, q) = m \cdot f(mX, y, z, q),$$

l'equazione alle derivate parziali :

$$(1') \qquad p = f^*(X, y, z, q),$$

ammetterà la soluzione :

$$\mathfrak{z}(X, y) = z(mX, y),$$

tale che :

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\xi}{m}, y\right) = z(\xi, y) = \omega(y).$$

Quindi, risolta la (1) la sua soluzione dà una soluzione della (1') e viceversa.

La funzione f^* gode di tutte le proprietà della funzione f, però potremo fare in modo, scegliendo opportunamente la costante m ed eventualmente riducendo la costante a [9], che le costanti L^*, K^*, che sono le analoghe per la f^* delle costanti L, K relative alla f, soddisfino alle disuguaglianze :

$$(2) \qquad \begin{cases} K^*(1+M+N+2a)^2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ L^*(M+a) \leqslant \frac{1}{2}, \\ L^* \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Faremo la convenzione che la funzione f stessa e la costante a soddisfino già alle (2) visto che ci si può sempre, rimpicciolendo convenientemente la striscia $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a$, ricondurre a questo caso.

4. - Suddividiamo l'intervallo $(\xi, \xi+a)$ in n parti uguali di ampiezza :

$$\delta = \frac{a}{n},$$

e costruiamo la funzione :

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}\omega\left(y + \frac{x-\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega\left(y - \frac{x-\xi}{2}\right) + \int_{y-\frac{x-\xi}{2}}^{y+\frac{x-\xi}{2}} f(\xi, y, \omega(y), \omega'(y))\, dy,$$

con $\xi \leqslant x \leqslant \xi + \delta$;

---

[9] Vedere l'osservazione II e III, § 8.

questa funzione nella sua striscia di definizione è continua rispetto a (x, y) e per la continuità della funzione f è:

$$\varphi^{(1)}(\xi, y) = \omega(y),$$

cioè la superficie che la rappresenta esce dalla curva iniziale $x=\xi$, $z=\omega(y)$. La curva intersezione di questa superficie con il piano $x=\xi+\delta$ ha poi l'equazione

$$z=\varphi^{(1)}(\xi+\delta, y) = \frac{1}{2}\omega\left(y+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega\left(y-\frac{\delta}{2}\right) + \int_{y-\frac{\delta}{2}}^{y+\frac{\delta}{2}} f(\xi, y, \omega(y), \omega'(y))\, dy.$$

La funzione $\varphi^{(1)}(x, y)$ ammette derivata parziale rispetto alla x continua rispetto a (x, y) dove $\xi \leqslant x < \xi+\delta$, y qualunque, e derivata a destra continua anche per $x=\xi$; ciò in virtù della continuità della f rispetto ai suoi argomenti e della continuità di $\omega(y)$ e $\omega'(y)$.

Avremo così:

$$\varphi_x^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4}\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right) - \frac{1}{4}\omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{ f\left(\xi, y+\frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\right) + f\left(\xi, y-\frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right)\right\}.$$

Osserviamo allora che:

$$[\varphi_x^{(1)}(x, y)]_{x=\xi} = f(\xi, y, \omega(y), \omega'(y)).$$

Cioè questa superficie soddisfa per $x=\xi$ (intendendo per derivata rispetto alla x solo la derivata a destra) alla equazione alle derivate (1).

5. - Osserviamo ora che la funzione $\varphi^{(1)}$ ammette anche derivate parziali rispetto alla y, del primo ordine, continua rispetto a (x, y), e del secondo ordine. Avremo:

$$\varphi_y^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right) + \tag{3}$$
$$+ f\left[\xi, y+\frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\right] - f\left[\xi, y-\frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right],$$

da cui si vede subito che:

$$[\varphi_y^{(1)}(x, y)]_{x=\xi} = \omega'(y),$$

inoltre, ponendo per semplificare le scritture:

$$f_i\left[\xi, y \pm \frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y \pm \frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y \pm \frac{x-\xi}{2}\right)\right] = f_i\left(y \pm \frac{x-\xi}{2}\right), \quad \text{dove } (i=y, z, q),$$

avremo:

$$\varphi_{yy}^{(1)}(x, y)=\frac{1}{2}\omega''\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)+\frac{1}{2}\omega''\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)+f_y\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_y\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)+$$
$$+f_z\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_z\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)$$
$$+f_q\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\omega''\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_q\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\omega''\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right).$$

Potremo anche scrivere:

$$\varphi_{yy}^{(1)}(x, y)=\omega''\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}+f_q\left(y+\frac{x-\xi}{3}\right)\right\}+\omega''\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}-f_q\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)\right\}+$$
$$+\left\{f_z\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_z\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right\}\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)+f_z\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\left\{\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-\omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right\}+$$
$$+f_y\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_y\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right).$$

Siccome per le ipotesi ammesse è $|f_q|\leqslant\frac{1}{2}$, avremo:

$$|\varphi_{yy}^{(1)}(x, y)|\leqslant M\left\{1+f_q\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_q\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right\}+N\left|f_z\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_z\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right|+$$
$$+L\left|\omega'\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-\omega'\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right|+\left|f_y\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_y\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right|.$$

ora per le ipotesi di LIPSCHITZ precedentemente introdotte è

$$\left|f_i\left(y+\frac{x-\xi}{2}\right)-f_i\left(y-\frac{x-\xi}{2}\right)\right|\leqslant K|x-\xi|\{1+M+N\}=K|x-\xi|R,$$

per $i=y, z, q$ e dove abbiamo posto

$$R=1+M+N.$$

Avremo così:

$$|\varphi_{yy}^{(1)}|\leqslant M+KR^2|x-\xi|+LM|x-\xi|,$$

e siccome $|x-\xi|\leqslant\delta$ nella striscia considerata, avremo

$$|\varphi_{yy}^{(1)}(z, y)|\leqslant M+KR^2\delta+LM\delta=M^{(1)},$$

e di conseguenza anche

$$|\varphi_{yy}^{(1)}(\delta, y)|\leqslant M^{(1)},$$

dove è

$$M^{(1)}=M+KR^2\delta+LM\delta.$$

Abbiamo inoltre facilmente dalla (3)

$$|\varphi_y^{(1)}(x, y)|\leqslant N+K|x-\xi|R\leqslant N+KR\delta=N^{(1)},$$

dove:

$$N^{(1)}=N+KR\delta,$$

ossia anche:

$$|\varphi_y^{(1)}(\delta, y)| < N^{(1)}.$$

In virtù delle ipotesi (2) avremo però:

$$(4) \qquad \begin{cases} M^{(1)} \leqslant M + \delta, \\ N^{(1)} \leqslant N + \delta, \end{cases}$$

e, ponendo,

$$R_1 = 1 + M^{(1)} + N^{(1)},$$

avremo:

$$R_1 \leqslant 1 + M + N + 2\delta = R + 2\delta.$$

6. - Operando a partire dalla curva $x = \xi + \delta$, $z = \varphi^{(1)}(\delta, y)$ come abbiamo operato sulla curva $x = \xi$, $z = \omega(y)$, definiremo sulla striscia $\xi + \delta < x \leqslant \xi + 2\delta$ una superficie di equazione:

$$z = \varphi^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}\varphi^{(1)}\left(\delta, y + \frac{x - \xi - \delta}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi^{(1)}\left(\delta, y - \frac{x - \xi - \delta}{2}\right) + \\ + \int_{y - \frac{x-\xi-\delta}{2}}^{y + \frac{x-\xi-\delta}{2}} f[\xi + \delta, y, \varphi^{(1)}(\delta, y), \varphi_y^{(1)}(\delta, y)]\, dy.$$

Con calcoli analoghi a quelli svolti nel paragrafo precedente ci assicuriamo che questa superficie, continua e con derivate parziali prime rispetto a x e a y continue rispetto a (x, y), ammette anche derivata parziale seconda rispetto alla y. Essa, inoltre, per $x = \xi + \delta$ passa per la curva $x = \xi + \delta$, $z = \varphi^{(1)}(\delta, y)$ e soddisfa per $x = \xi + \delta$ alla equazione alle derivate parziali (1).

Sono inoltre verificate le seguenti disuguaglianze:

$$|\varphi_{yy}^{(2)}(x, y)| \leqslant M^{(1)} + \delta K(1 + M^{(1)} + N^{(1)})^2 + LM^{(1)}\delta = M^{(1)} + \delta K R_1^2 + LM^{(1)}\delta,$$

e sempre in virtù delle (2) sarà:

$$|\varphi_{yy}^{(2)}(x, y)| \leqslant M^{(2)},$$

dove

$$M^{(2)} = M^{(1)} + \delta = M + 2\delta.$$

Analogamente sarà:

$$|\varphi_y^{(2)}(x, y)| \leqslant N^{(1)} + \delta K R_1,$$

cioè:

$$|\varphi_y^{(2)}(x, y)| \leqslant N^{(2)},$$

dove

$$N^{(2)} = N^{(1)} + \delta = N + 2\delta.$$

Ripetendo questa operazione sino ad arrivare alla striscia $a + \xi - \delta < x \leqslant \xi + a$ inclusa otterremo una superficie $z = S_n(x, y)$ dipendente esclusivamente dalla suddivisione di $(\xi, \xi+a)$ in n parti e definita sulla striscia $\xi \leqslant x \leqslant \xi+\delta$ dalla $\varphi^{(1)}(x, y)$, sulla striscia $\xi+\delta \leqslant x \leqslant \xi+2\delta$ dalla $\varphi^{(2)}(x, y)$ e così via. Questa superficie è continua rispetto a (x, y) con derivate parziali rispetto a x e a y. La derivata parziale rispetto a y è continua rispetto a (x, y) e con derivata rispetto alla y limitata in valore assoluto con costante $M+a$ indipendente da n. La derivata rispetto alla x è continua rispetto alla y e discontinua tutt' al più in un numero finito di rette parallele all' asse y. Inoltre la derivata parziale rispetto alla y è minore in valore assoluto di $N+a$, costante indipendente da n.

7. - Studiamo ora il comportamento di $\varphi_y^{(m)}$ e di $\dfrac{\partial}{\partial y} S_n$ rispetto alla x. Notiamo che è

$$\varphi_y^{(1)}(x, y) - \omega'(y) = \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y + \frac{x-\xi}{2}\right) - \omega'(y)\right] + \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y - \frac{x-\xi}{2}\right) - \omega'(y)\right] +$$

$$+ f\left[\xi, y + \frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y + \frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y + \frac{x-\xi}{2}\right)\right] - f\left[\xi, y - \frac{x-\xi}{2}, \omega\left(y - \frac{x-\xi}{2}\right), \omega'\left(y - \frac{x-\xi}{2}\right)\right];$$

quindi, per un calcolo già fatto, è

$$|\,\varphi_y^{(1)} - \omega'(y)\,| \leqslant \frac{1}{2} M\delta + K\delta R.$$

Analogamente avremo:

$$|\,\varphi_y^{(2)} - \varphi_y^{(1)}(\delta, y)\,| \leqslant \frac{1}{2} M^{(1)}\delta + K\delta R_1,$$

e in generale:

$$|\,\varphi_y^{(m+1)} - \varphi_y^{(m)}(\delta, y)\,| \leqslant \frac{1}{2} M^{(m)}\delta + K\delta R_m.$$

Siccome poi tanto $M^{(m)}$, quanto R_m sono superiormente limitate, per quanto si è visto precedentemente, avremo che la successione delle derivate parziali $\dfrac{\partial}{\partial y} S_n(x, y)$ soddisfa alle condizioni del lemma di ARZELÀ del paragrafo 1.

Siccome ora:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n(\xi + m\delta, y) = \varphi_x^{(m)}(\delta, y) = f[\xi + m\delta, y, \varphi^{(m)}(\delta, y), \varphi_y^{(m)}(\delta, y)],$$

dove $\delta = \dfrac{a}{n}$ e m è intero minore uguale ad n, avremo che le funzioni $\dfrac{\partial}{\partial x} S_n(x, y)$ soddisfano al lemma di ARZELÀ, ma soltanto relativamente ai punti del tipo $(\xi + m\delta, y)$.

Osserviamo, però, ora che:

$$|\,\varphi_x^{(1)}(x, y) - \varphi_x^{(1)}(\xi, y)\,| \leqslant \frac{1}{4} M\delta + \frac{1}{2} K\delta R,$$

in generale:

$$|\varphi_x^{(m+1)}(x, y)-\varphi_x^{(m+1)}(\xi+m\delta, y)| \leqslant \frac{1}{4} M^{(m)}\delta+\frac{1}{2}K\delta R_m.$$

Così che, anche la successione delle funzioni $\frac{\partial}{\partial x}S_n(x, y)$ soddisfa alle ipotesi del lemma di ARZELÀ.

8. - Per quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti e con considerazioni immediate, dalla successione di funzioni:

$$S_1(x, y), \quad S_2(x, y), \ldots, \quad S_n(x, y), \ldots$$

possiamo estrarne un'altra:

$$S_1'(x, y), \quad S_2'(x, y), \ldots, \quad S_n'(x, y), \ldots \tag{4}$$

che converge uniformemente per $\xi \leqslant x \leqslant \xi+a$, y qualunque; essa è inoltre tale che le successioni:

$$\frac{\partial}{\partial y}S_1'(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}S_2'(x, y), \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial y}S_n'(x, y), \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}S_1'(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}S_2'(x, y), \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x}S_n'(x, y), \ldots$$

convergono uniformemente a delle funzioni continue, che con considerazioni immediate risultano essere le derivate parziali rispettivamente rapporto a y e a x di $S(x, y)$, limite della (4).

Siccome d'altra parte la funzione $S_n'(x, y)$ soddisfa su n rette parallele all'asse y uniformemente distribuite, all'equazione (1), la funzione limite soddisferà identicamente alla (1). Inoltre, siccome è sempre:

$$S_n'(\xi, y)=\omega(y),$$

sarà pure:

$$S(\xi, y)=\lim_{n\to\infty} S_n'(\xi, y)=\omega(y).$$

OSSERVAZIONE I. - Tutte le considerazioni svolte precedentemente rimangono inalterate, fuorchè piccole variazioni di forma, se la $\omega'(y)$ si suppone soltanto lipschitziana con costante M.

OSSERVAZIONE II. - Riprendiamo le considerazioni svolte al § 3 e supponiamo $K \geqslant L$ come è sempre possibile pensare. È allora facile rendersi conto che le (2) si possono sostituire con l'unica disuguaglianza meno restrittiva seguente:

$$K(1+M+N+a)^2 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2'}$$

e quindi anche:

$$K(M+a)+K(1+M+N+a)\leqslant \frac{1}{2}.$$

Le (4) del § 5 diventano:

$$M^{(1)}+N^{(1)}\leqslant M+NKR^2\delta+LM\delta+KR\delta\leqslant M+N+\delta;$$

cosichè avremo lo stesso:

$$R^{(1)}\leqslant R+\delta.$$

Viene così ad essere giustificata la disuguaglianza (2'), la quale, ricordando quanto è stato detto al § 3, si scriverà:

$$mK\left(R+\frac{a}{m}\right)^2\leqslant \frac{1}{2},$$

oppure, supposto $m>0$,

$$m^2KR^2+m\left(2aKR-\frac{1}{2}\right)+a^2K\leqslant 0; \tag{5}$$

questa disuguaglianza ammette soluzioni positive se è

$$a\leqslant \frac{1}{4KR},$$

che è il risultato ottenuto da KAMKE - DIGEL.

OSSERVAZIONE III. - Nulla ci vieta, se ci mettiamo per esempio nel caso dell'osservazione II, di prolungare la soluzione trovata per l'equazione nella striscia $\xi\leqslant x\leqslant \xi+a$, al di fuori della striscia stessa; si prenderà per curva iniziale la $z=S(\xi+a, y)$, operando analogamente a quanto è stato fatto per la striscia $\xi\leqslant x\leqslant\xi+a$, ammesso naturalmente che la funzione f sia definita e soddisfi alle varie ipotesi già enunciate fuori della striscia $\xi\leqslant x\leqslant\xi+a$ e nel campo che andremo ora a considerare.

Se indichiamo con R_1 il corrispondente di R per questa seconda striscia, sarà:

$$R_1\leqslant R+\frac{a}{m}.$$

Ora dalla (5) la maggiore delle radici positive è:

$$\frac{-aKR+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}-aKR}}{KR^2},$$

cosichè:

$$\frac{a}{m}=\frac{aKR^2}{\frac{1}{4}-aKR+\sqrt{\frac{1}{4}-aKR}}.$$

Se prendiamo per ampiezza della prima striscia su cui è costruita la soluzione il numero a_1 tale che:

$$a_1KR=\frac{1}{4}-b^2,$$

con $0 < b < \frac{1}{2}$, avremo:

$$\frac{a_1}{m} = \frac{R\left(\frac{1}{4} - b^2\right)}{b^2 + b},$$

cosichè:

$$R_1 = R\,\frac{b + \frac{1}{4}}{b^2 + b}.$$

Per la seconda striscia prenderemo quella di ampiezza a_2, con a_2 tale che:

$$a_2 K R_1 = \frac{1}{4} - b^2,$$

e, valendo le stesse considerazioni di sopra, sarà:

$$R_2 = R_1\,\frac{b + \frac{1}{4}}{b^2 + b}.$$

Sarà quindi:

$$R_n = R\left[\frac{b + \frac{1}{4}}{b^2 + b}\right]^n.$$

Andiamo ora a calcolare l'ampiezza totale delle strisce così definite su cui sono costruibili soluzioni dell'equazione alle derivate parziali (1). Avremo:

$$\sum_1^\infty {}_n\, a_n = \sum \frac{\frac{1}{4} - b^2}{KR_n} = \frac{\frac{1}{4} - b^2}{K} \sum_1^\infty {}_n\, \frac{1}{R_n},$$

ossia ancora:

$$\sum_1^\infty {}_n\, a_n = \frac{\frac{1}{4} - b^2}{KR} \sum_0^\infty {}_n \left[\frac{b^2 + b}{b + \frac{1}{4}}\right]^n = \frac{\frac{1}{4} - b^2}{KR\left[1 - \dfrac{b^2 + b}{b + \frac{1}{4}}\right]}.$$

Ora, siccome possiamo scegliere b vicino a $\frac{1}{2}$ quanto vogliamo, la striscia massima su cui possiamo costruire la soluzione avrà ampiezza:

$$A = \frac{3}{4KR},$$

che è tre volte maggiore di quella ottenuta nell'osservazione precedente.