ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ARNO PREDONZAN

Sulle vibrazioni forzate di un sistema non dissipativo a due gradi di libertà

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 3-4 (1947), p. 173-183

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_173_0>

SULLE VIBRAZIONI FORZATE DI UN SISTEMA NON DISSIPATIVO A DUE GRADI DI LIBERTÀ (*)

di ARNO PREDONZAN (Pisa).

SUNTO. - Si studia il moto forzato di un sistema a due gradi di libertà, soggetto a due sollecitazioni esterne di carattere sinusoidale, con particolare riguardo al variare delle ampiezze della vibrazione forzata in dipendenza della frequenza e delle ampiezze delle forze esterne.

Considerati poi due oscillatori accoppiati, soggetti a due sollecitazioni sinusoidali di frequenza variabile nell'intorno di una frequenza media, si determinano i valori dei coefficienti di accoppiamento e dei coefficienti e dell'ampiezza della sollecitazione esterna d'uno di essi in modo che la vibrazione forzata dell'altro risulti minima.

Premessa.

Si considerano sistemi a due gradi di libertà, olonomi ed a vincoli indipendenti dal tempo; le forze interne derivano da una funzione potenziale mentre quelle esterne sono di carattere sinusoidale con frequenze uguali ed ampiezze diverse. Il moto avviene nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile definita da $q_1=q_2=0$, essendo q_1 e q_2 le coordinate lagrangiane del sistema.

L'energia potenziale $-V$ e l'energia cinetica T assumono, rispettivamente, la forma

$$-V=\frac{1}{2}(a_{11}q_1^2+2a_{12}q_1q_2+a_{22}q_2^2),$$
$$T=\frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2+2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+b_{22}\dot{q}_2^2),$$

dove le costanti a_{rs} e b_{rs} $(r, s=1, 2)$ soddisfano alle condizioni

$$a_{11}>0, \quad a_{22}>0, \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,$$
$$b_{11}>0, \quad b_{22}>0, \quad b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0,$$

essendo $-V$ e T forme quadratiche definite positive.

Dette k_1 sen ωt e k_2 sen ωt le forze esterne relative alle coordinate q_1 e q_2, rispettivamente, le equazioni del moto nell'intorno della configurazione $q_1=q_2=0$ possono scriversi

$$(1) \qquad \begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1+b_{12}\ddot{q}_2+a_{11}q_1+a_{12}q_2=k_1 \operatorname{sen} \omega t, \\ b_{12}\ddot{q}_1+b_{22}\ddot{q}_2+a_{12}q_1+a_{22}q_2=k_2 \operatorname{sen} \omega t. \end{cases}$$

(*) Tesi di laurea discussa nell'Università di Pisa nel giugno del 1941.

Lo studio del moto si riduce, quindi, alla ricerca dell'integrale generale di questo sistema di equazioni differenziali lineari con i coefficienti delle q e $\ddot{q}$ costanti.

§ 1. - Integrale generale del sistema differenziale.

L'integrale generale del sistema (1) si può ottenere aggiungendo un suo integrale particolare qualsiasi all'integrale generale del sistema omogeneo

$$\left\{\begin{array}{l} b_{11}\ddot{q}_1+b_{12}\ddot{q}_2+a_{11}q_1+a_{12}q_2=0, \\ b_{12}\ddot{q}_1+b_{22}\ddot{q}_2+a_{12}q_1+a_{22}q_2=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Quest'ultimo ammette soluzioni particolari del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} q_1=u_1^{(\varrho)} \operatorname{sen}(\sigma_\varrho t-\gamma_\varrho), \\ q_2=u_2^{(\varrho)} \operatorname{sen}(\sigma_\varrho t-\gamma_\varrho), \end{array}\right.$$

dove γ_ϱ è arbitrario mentre $u_1^{(\varrho)}$ e $u_2^{(\varrho)}$ sono dati, a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, dal sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11}-\sigma_\varrho^2 b_{11})\,u_1^{(\varrho)}+(a_{12}-\sigma_\varrho^2 b_{12})\,u_2^{(\varrho)}=0, \\ (a_{12}-\sigma_\varrho^2 b_{12})\,u_1^{(\varrho)}+(a_{22}-\sigma_\varrho^2 b_{22})\,u_2^{(\varrho)}=0, \end{array}\right.$$

essendo σ_ϱ^2 $(\varrho=1, 2)$ radice dell'equazione, detta *caratteristica* o *delle frequenze*,

$$\left|\begin{array}{ll} a_{11}-\sigma^2 b_{11}, & a_{12}-\sigma^2 b_{12} \\ a_{12}-\sigma^2 b_{12}, & a_{22}-\sigma^2 b_{22} \end{array}\right|=0. \tag{3}$$

Per quanto si sa dalla teoria generale, le radici σ_1^2 e σ_2^2 $(\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2)$ della (3) sono reali, positive e, se $\bar{\sigma}_1^2 \neq \bar{\sigma}_2^2$, esterne all'intervallo $(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2)$ o una di esse coincidente con un estremo di questo, avendo posto

$$\bar{\sigma}_1^2=\frac{a_{11}}{b_{11}}, \qquad \bar{\sigma}_2^2=\frac{a_{22}}{b_{22}}.$$

L'integrale generale del sistema (2) assume allora la forma

$$\left\{\begin{array}{l} q_1=u_1^{(1)} \operatorname{sen}(\sigma_1 t-\gamma_1)+u_1^{(2)} \operatorname{sen}(\sigma_2 t-\gamma_2), \\ q_2=u_2^{(1)} \operatorname{sen}(\sigma_1 t-\gamma_1)+u_2^{(2)} \operatorname{sen}(\sigma_2 t-\gamma_2), \end{array}\right.$$

dove γ_1, γ_2 e le due costanti a meno delle quali risultano definite le u possono determinarsi una volta che siano assegnati i valori iniziali delle q e $\dot{q}$.

Il moto libero del sistema vibrante risulta, quindi, dalla sovrapposizione di due moti vibratori di carattere armonico, di frequenze $\sigma_1/2\pi$ e $\sigma_2/2\pi$, rispettivamente.

Un integrale particolare del sistema (1) si determina nel modo consueto ponendo

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= f_1 \operatorname{sen} \omega t, \\ q_2 &= f_2 \operatorname{sen} \omega t, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

con f_1 e f_2 costanti definite dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \frac{(a_{22}-\omega^2 b_{22})k_1 - (a_{12}-\omega^2 b_{12})k_2}{(a_{11}-\omega^2 b_{11})(a_{22}-\omega^2 b_{22}) - (a_{12}-\omega^2 b_{12})^2}, \\ f_2 &= \frac{(a_{11}-\omega^2 b_{11})k_2 - (a_{12}-\omega^2 b_{12})k_1}{(a_{11}-\omega^2 b_{11})(a_{22}-\omega^2 b_{22}) - (a_{12}-\omega^2 b_{12})^2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Le (4) rappresentano la vibrazione forzata del sistema mentre le (5) ci danno i valori dell'ampiezza di detta vibrazione in funzione della frequenza e delle ampiezze delle forze esterne.

§ 2. - Studio delle ampiezze.

Riprendiamo le (5) e scriviamole nella forma

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \frac{b_{12}k_2 - b_{22}k_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{\omega^2 - \overline{\sigma}_2^2 \nu}{\omega^4 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\,\omega^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \\ f_2 &= \frac{b_{12}k_1 - b_{11}k_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \cdot \frac{\omega^2 - \overline{\sigma}_1^2 \mu}{\omega^4 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\,\omega^2 + \sigma_1 \sigma_2^2}, \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

dove si è posto

$$\overline{\sigma}_2^2 \nu = \frac{a_{22}k_1 - a_{12}k_2}{b_{22}k_1 - b_{12}k_2}, \qquad \overline{\sigma}_1^2 \mu = \frac{a_{12}k_1 - a_{11}k_2}{b_{12}k_1 - b_{11}k_2}.$$

Andiamo ora ad esaminare il comportamento di $|f_1|$ al variare di ω^2 e $\overline{\sigma}_2 \nu$ A tale scopo ci varremo della rappresentazione grafica tracciando la famiglia di curve di parametro $\overline{\sigma}_2^2 \nu$ i cui punti avranno per ascissa ω^2 e per ordinata $|f_1|$.

Due casi si debbono considerare a seconda che la condizione $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \overline{\sigma}_2^2$ sia o no soddisfatta.

1° Caso : $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \overline{\sigma}_2^2$.

Dalla prima delle (5') si deduce che f_1 soddisfa alle condizioni

$$\lim_{\omega^2 \to \sigma_1^2} f_1 = \lim_{\omega^2 \to \sigma_2^2} f_1 = \infty. \tag{6}$$

Dalla stessa (5′) si ricava inoltre

$$f_1(\overline{\sigma}_2^2\nu)=0 \quad \text{per} \quad \overline{\sigma}_2^2\nu \neq \sigma_1^2 \quad \text{e} \quad \overline{\sigma}_2^2\nu \neq \sigma_2^2, \tag{7}$$

dato che per i valori σ_1^2 e σ_2^2 di $\overline{\sigma}_2^2\nu$ si ha, rispettivamente,

$$f_1=\frac{b_{12}k_2-b_{22}k_1}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\cdot\frac{1}{\omega^2-\sigma_2^2}\neq 0, \tag{$5_1'$}$$

$$f_1=\frac{b_{12}k_2-b_{22}k_1}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\cdot\frac{1}{\omega^2-\sigma_1^2}\neq 0. \tag{$5_2'$}$$

Affinchè f_1 presenti dei massimi o dei minimi è necessario che esistano e siano reali le radici ω_1^2 e ω_2^2 del numeratore di

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)}=\frac{b_{22}k_1-b_{12}k_2}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\cdot\frac{\omega^4-2\overline{\sigma}_2^2\nu\,\omega^2+\overline{\sigma}_2^2\nu\,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1^2\sigma_2^2}{[\omega^4-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\omega^2+\sigma_1^2\sigma_2^2]^2},$$

o meglio che sia

$$(\overline{\sigma}_2^2\nu)^2-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\overline{\sigma}_2^2\nu+\sigma_1^2\sigma_2^2>0. \tag{8}$$

Dalla (8) è stato escluso il caso di uguaglianza perchè da esso segue $\overline{\sigma}_2^2\nu=\sigma_1^2$ o $\overline{\sigma}_2^2\nu=\sigma_2^2$ e quindi, rispettivamente,

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)}=\frac{b_{22}k_1-b_{12}k_2}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\sigma_2^2)^2}\neq 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)}=\frac{b_{22}k_1-b_{12}k_2}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\sigma_1^2)^2}\neq 0.$$

Ove si osservi che, quando ω^2 passa attraverso i valori reali ω_1^2 e ω_2^2, cambia il segno di $\dfrac{\partial f_1}{\partial(\omega^2)}$, si viene a concludere che la (8) rappresenta non solo la condizione necessaria ma anche sufficiente per l'esistenza di massimi o minimi di f_1.

Ci resta ancora da confrontare i valori delle radici ω_1^2 e ω_2^2 $(\omega_1^2<\omega_2^2)$ con i numeri 0, σ_1^2 e σ_2^2. Ci serviremo a tale scopo del metodo elementare del FOURIER.

Ponendo

$$\varphi(\omega^2)=\omega^4-2\overline{\sigma}_2^2\nu\omega^2+\overline{\sigma}_2^2\nu(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1^2\sigma_2^2,$$

dalla stessa si ricava

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\omega^2)}=2(\omega^2-\overline{\sigma}_2^2\nu),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial(\omega^2)^2}=2.$$

In virtù delle precedenti si deducono le seguenti condizioni che ci definiscono, quando sia soddisfatta la (8), la posizione di ω_1^2 e ω_2^2 (e quindi delle ascisse dei punti di massimo o minimo di f_1) sull'asse delle ω^2, relativamente ai punti 0, σ_1^2 e σ_2^2:

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{array}{lll}
\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial(\omega^2)^2}\right]_0 = 2>0, & & \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\omega^2)}\right]_0 = -2\,\bar\sigma_2^2\nu \lesseqgtr 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \gtreqless 0\,, \\[2ex]
\varphi(0) = \bar\sigma_2^2\nu(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1^2\sigma_2^2 \lesseqgtr 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \lesseqgtr \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,; \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial(\omega^2)^2}\right]_{\sigma_1^2} = 2>0\,, & & \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\omega^2)}\right]_{\sigma_1^2} = 2(\sigma_1^2-\bar\sigma_2^2\nu) \lesseqgtr 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \gtreqless \sigma_1^2\,, \\[2ex]
\varphi(\sigma_1^2) = \bar\sigma_2^2\nu(\sigma_2^2-\sigma_1^2)-\sigma_1^2(\sigma_2^2-\sigma_1^2) \gtreqless 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \gtreqless \sigma_1^2\,; \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial(\omega^2)^2}\right]_{\sigma_2^2} = 2>0\,, & & \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial(\omega^2)}\right]_{\sigma_2^2} = 2(\sigma_2^2-\bar\sigma_2^2\nu) \gtreqless 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \lesseqgtr \sigma_2^2\,, \\[2ex]
\varphi(\sigma_2^2) = \bar\sigma_2^2\nu(\sigma_1^2-\sigma_2^2)-\sigma_2^2(\sigma_1^2-\sigma_2^2) \gtreqless 0 & \text{per} & \bar\sigma_2^2\nu \lesseqgtr \sigma_2^2\,.
\end{array}\right.
$$

Da quanto precede, tenendo presente che $f_1(\omega^2)$ è una funzione definita solo per gli ω^2 positivi, si possono trarre le seguenti conclusioni:

a) $\bar\sigma_2^2\nu<0$. - Valgono le (6), (8) e dalle (9) si deduce $\omega_1^2<0$, $\sigma_1^2<\omega_2^2<\sigma_2^2$: $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2 e due minimi in 0 e ω_2^2 (fig. 1).

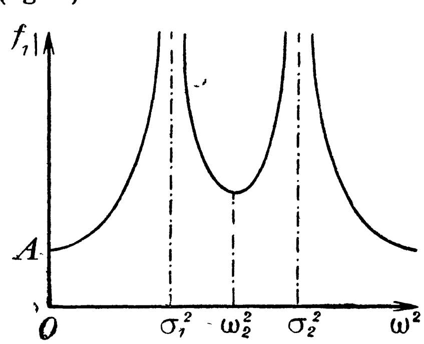

Fig. 1.

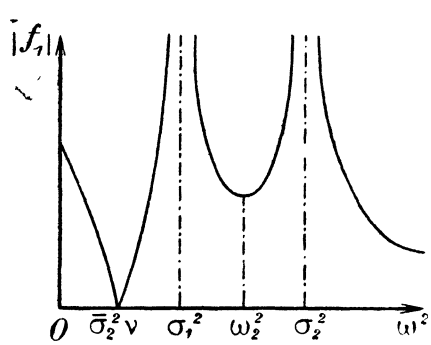

Fig. 2.

b) $\bar\sigma_2^2\nu=0$. - Valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente: basta trasportare il punto A in 0.

c) $0<\bar\sigma_2^2\nu<\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. - Valgono pure considerazioni analoghe a quelle del caso *a*) e vale inoltre la (7): $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2, un massimo in 0 e due minimi in $\bar\sigma_2^2\nu$ e ω_2^2 (fig. 2).

d) $\overline{\sigma}_2^2\,\nu = \dfrac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce $\omega_1^2=0$, $\sigma_1^2<\omega_2^2<\sigma_2^2$: $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2, un massimo

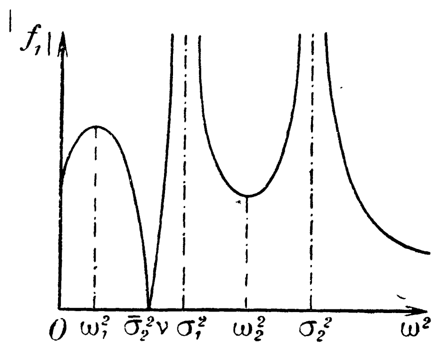

Fig. 3.

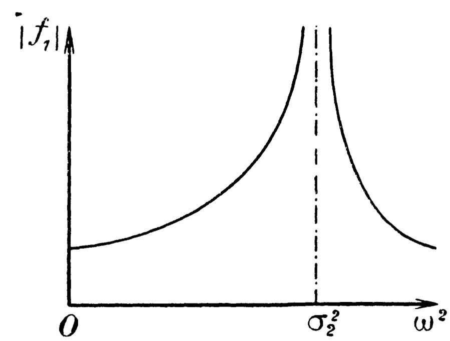

Fig. 4.

n 0 e due minimi in $\dfrac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ e ω_2^2 (fig. 2 dove $\dfrac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ prende il posto di $\overline{\sigma}_2^2\,\nu$).

e) $\dfrac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} < \overline{\sigma}_2^2\,\nu < \sigma_1^2$. - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce $0<\omega_1^2<\sigma_1^2$, $\sigma_1^2<\omega_2^2<\sigma_2^2$: $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2, un massimo in ω_1^2 e tre minimi in 0, $\overline{\sigma}_2^2\,\nu$ e ω_2^2 (fig. 3).

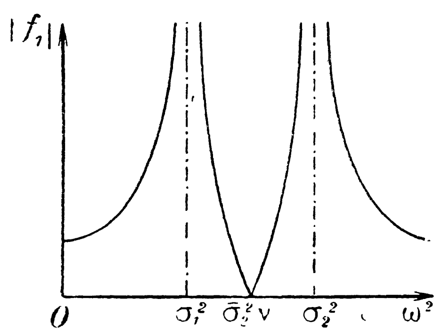

Fig. 5.

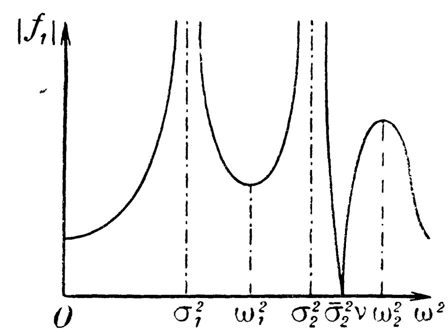

Fig. 6.

f) $\overline{\sigma}_2^2\,\nu=\sigma_1^2$. - La prima delle (5′) assume la forma ($5_1'$) : $|f_1|$ presenta, quindi, un massimo (infinito) in σ_2^2 e un minimo in 0 (fig. 4).

g) $\sigma_1^2<\overline{\sigma}_2^2\,\nu<\sigma_2^2$. - Valgono le (6), (7), ma non è soddisfatta la (8) : $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2 e due minimi in 0 e $\overline{\sigma}_2^2\,\nu$ (fig. 5).

h) $\overline{\sigma}_2^2\,\nu=\sigma_2^2$. - La prima delle (5′) assume la forma ($5_2'$) : $|f_1|$ presenta, quindi, un massimo (infinito) in σ_1^2 e un minimo in 0 (fig. 4 dove σ_1^2 prende posto di σ_2^2).

i) $\bar{\sigma}_2^2 \nu > \sigma_2^2$. - Valgono le (6), (7), (8) e dalle (9) si deduce $\sigma_1^2 < \omega_1^2 < \sigma_2^2$, $\sigma_2^2 < \omega_2^2$: $|f_1|$ presenta, quindi, due massimi (infiniti) in σ_1^2 e σ_2^2, un massimo in ω_2^2 e tre minimi in 0, ω_1^2 e $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ (fig. 6).

2° CASO : $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}_2^2$.

La prima delle (5) diviene

$$f_1 = \frac{b_{22} k_1 - b_{12} k_2}{b_{11} b_{22} (\bar{\sigma}_1^2 - \omega^2) - b_{12}^2 (\bar{\sigma}_2^2 - \omega^2)},$$

dalla quale, osservando che in questo caso si ha $\sigma_2^2 \equiv \bar{\sigma}_2^2$, si deduce che $|f_1|$ presenta un massimo (infinito) in σ_1^2 e un minimo in 0 (fig. 4 dove σ_1^2 prende il posto di σ_2^2).

Per lo studio di $|f_2|$ si debbono pure considerare due casi a seconda che la condizione $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_1^2$ sia o no soddisfatta.

1° CASO : $\frac{a_{12}}{b_{12}} \neq \bar{\sigma}_1^2$.

Si traggono conclusioni analoghe a quelle del precedente 1° caso : basta sostituire $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ con $\bar{\sigma}_1^2 \mu$.

2° CASO : $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}_1^2$.

La seconda delle (5) diviene

$$f_2 = \frac{b_{11} k_2 - b_{12} k_1}{b_{11} b_{22} (\bar{\sigma}_2^2 - \omega^2) - b_{12}^2 (\bar{\sigma}_1^2 - \omega^2)},$$

dalla quale, osservando che in questo caso si ha $\sigma_1^2 \equiv \bar{\sigma}_1^2$, si deduce che $|f_2|$ presenta un massimo (infinito) in σ_2^2 e un minimo in 0 (fig. 4).

§ 3. - Un caso particolare.

Si supponga verificata la condizione

$$\bar{\sigma}_1^2 = \bar{\sigma}_2^2 = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \bar{\sigma}^2 .$$

Per la precedente la (3) diviene

$$(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2)^2 = 0,$$

dalla quale risulta che le due radici σ_1^2 e σ_2^2 vengono ad assumere il comune valore $\bar{\sigma}^2$.

Pertanto i sistemi (1) e (2) divengono, rispettivamente,

$$(1') \quad \begin{aligned} b_{11}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{12}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= k_1 \operatorname{sen} \omega t, \\ b_{12}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{22}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= k_2 \operatorname{sen} \omega t; \end{aligned}$$

$$(2') \quad \begin{aligned} b_{11}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{12}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= 0, \\ b_{12}(\ddot{q}_1 + \bar{\sigma}^2 q_1) + b_{22}(\ddot{q}_2 + \bar{\sigma}^2 q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema (2′), in virtù della condizione $b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$, necessariamente diviene

$$\begin{cases} \ddot{q}_1+\bar{\sigma}^2 q_1=0, \\ \ddot{q}_2+\bar{\sigma}^2 q_2=0, \end{cases}$$

il cui integrale generale, che rappresenta il moto libero del sistema vibrante, è dato da

$$\begin{cases} q_1=u_1 \operatorname{sen}(\bar{\sigma}t-\gamma_1), \\ q_2=u_2 \operatorname{sen}(\bar{\sigma}t-\gamma_2), \end{cases}$$

con u_1, u_2, γ_1, γ_2 costanti arbitrarie.

Il moto forzato invece è rappresentato dall'integrale particolare del sistema (1′)

$$\begin{cases} q_1=f_1 \operatorname{sen}\omega t, \\ q_2=f_2 \operatorname{sen}\omega t, \end{cases}$$

dove f_1 e f_2 sono definite dalle formole

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{b_{12}k_2-b_{22}k_1}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\,\dfrac{1}{\omega^2-\bar{\sigma}^2}, \\[2ex] f_2=\dfrac{b_{12}k_1-b_{11}k_2}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\,\dfrac{1}{\omega^2-\bar{\sigma}^2}. \end{cases}$$

Quest'ultime ci dicono che $|f_1|$ e $|f_2|$ presentano un massimo (infinito) in $\bar{\sigma}^2$ e un minimo in 0 (fig. 4).

§ 4. - Ammortizzazione di vibrazioni.

Siano le (1) le equazioni del moto di un sistema a due gradi di libertà derivante dall'accoppiamento di due sistemi sollecitati S_1 ed S_2 ad un grado di libertà, di frequenze $\bar{\sigma}_1/2\pi$ e $\bar{\sigma}_2/2\pi$, rispettivamente.

Supposto che la frequenza $\omega/2\pi$ delle sollecitazioni esterne $k_1 \operatorname{sen}\omega t$ e $k_2 \operatorname{sen}\omega t$, agenti rispettivamente su S_1 ed S_2, non si mantenga fissa ma vari nell'intorno di una frequenza media $\omega_m/2\pi$, ci proponiamo di determinare i valori dei coefficienti di S_2, dell'ampiezza della sollecitazione esterna ad esso relativa e dei coefficienti di accoppiamento in modo che risulti minima la vibrazione forzata della coordinata q_1.

Per soddisfare alla condizione del problema postoci occorre che si abbia

$$\omega_m^2=\bar{\sigma}_2^2\nu=\frac{a_{22}k_1-a_{12}k_2}{b_{22}k_1-b_{12}k_2}. \tag{10}$$

Inoltre, perchè l'ampiezza f_1 si mantenga limitata al variare di ω nell'intorno di ω_m, occorre che il massimo valore della differenza $|\omega^2-\omega_m^2|$ risulti, quando sia verificata la (10), minore di $|\sigma^{*2}-\bar{\sigma}_2^2\nu|$, intendendo per σ^{*2} quella delle due radici della (3) che è più prossima a $\bar{\sigma}_2^2\nu$.

Si presenta quindi il problema di determinare i coefficienti a_{22}, b_{22}, a_{12}, b_{12} in modo che la differenza $|\sigma^{*2}-\bar{\sigma}_2^2\nu|$ sia la più grande possibile.

A tale scopo riprendiamo la (3) e scriviamola nella forma

$$(\sigma^2-\bar{\sigma}_1^2)(\sigma^2-\bar{\sigma}_2^2)-(\alpha-\beta\sigma^2)^2=0,$$

dove si è posto

$$\alpha=\frac{a_{12}}{\sqrt{b_{11}b_{22}}}, \qquad \beta=\frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11}b_{22}}}. \tag{11}$$

Ponendo inoltre

$$m=\frac{\bar{\sigma}_1^2-\bar{\sigma}_2^2-2\beta(\alpha-\beta\bar{\sigma}_2^2)}{2(1-\beta^2)}, \qquad n=\frac{(\alpha-\beta\bar{\sigma}_2^2)^2}{1-\beta^2},$$

la precedente può scriversi

$$(\sigma^2-\bar{\sigma}_2^2)^2-2m(\sigma^2-\bar{\sigma}_2^2)-n=0,$$

dalla quale si ricava

$$\sigma^2-\bar{\sigma}_2^2\nu=m-\bar{\sigma}_2^2(\nu-1)\pm\sqrt{m^2+n}.$$

Indicando con y^* il valore di $\sigma^2-\bar{\sigma}_2^2\nu$ corrispondente a σ^{*2}, si ha:

$$y^*=m-\bar{\sigma}_2^2(\nu-1)\pm\sqrt{m^2+n} \quad \text{per} \quad m\lessgtr\bar{\sigma}_2^2(\nu-1).$$

Si suppongano ora fissati a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}, k_1, k_2 e si faccia variare $\bar{\sigma}_1^2$: ciò equivale a fissare n e ν e far variare m.

Derivando y^* rispetto ad m si ottiene

$$\frac{\partial y^*}{\partial m}=1\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n}}>0 \quad \text{per} \quad m\lessgtr\bar{\sigma}_2^2(\nu-1),$$

dalla quale si rileva che y^* è sempre crescente.

Osservando inoltre che y^* soddisfa alle condizioni

$$\lim_{m\to\bar{\sigma}_2^2(\nu-1)\mp} y^*=\pm\sqrt{\bar{\sigma}_2^4(\nu-1)^2+n},$$

$$y^*\gtrless-\bar{\sigma}_2^2(\nu-1) \quad \text{per} \quad m\lessgtr\bar{\sigma}_2^2(\nu-1),$$

si viene a concludere che si ha il massimo valore di $|y^*|$ per

$$m=\bar{\sigma}_2^2(\nu-1),$$

o meglio per

$$(12) \qquad \overline{\sigma}_2^2\,\nu = \frac{\overline{\sigma}_1^2 - 2\alpha\beta + \overline{\sigma}_2^2}{2(1-\beta^2)} = \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,.$$

Dalla precedente si può trarre un valore di $\overline{\sigma}_2^2$ compatibile con la condizione $\overline{\sigma}_1^2\,\overline{\sigma}_2^2 > \alpha^2$ solamente quando α e β sono scelti in modo tale che si abbia

$$(13) \qquad \overline{\sigma}_2^2\,\nu > \frac{\overline{\sigma}_1^4 - 2\alpha\beta\,\overline{\sigma}_1^2 + \alpha^2}{2\,\overline{\sigma}_1^2(1-\beta^2)}\,,$$

il che può avvenire sempreché risulti

$$\overline{\sigma}_2^2\,\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\sigma}_1^2\,,$$

dove $\overline{\sigma}_2^2\,\nu$ s'intende fissato.

Nel caso in cui sia $\overline{\sigma}_2^2\,\nu \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{\sigma}_1^2$ è sufficiente, per rendere massimo il divario $|\,\sigma^{*2} - \overline{\sigma}_2^2\,\nu\,|$, far coincidere σ_1^2 con $\overline{\sigma}_1^2$ — il che avviene per $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \overline{\sigma}_1^2$ — ed assegnare a $\overline{\sigma}_2^2$ un valore maggiore di $\overline{\sigma}_1^2$. Da $\overline{\sigma}_1^2$ e $\overline{\sigma}_2^2$ si possono poi trarre i valori di a_{12}, b_{12} e a_{22}, b_{22}, rispettivamente, tenendo presente che gli stessi debbono soddisfare alle condizioni $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$ e $b_{11}b_{22} > b_{12}^2$.

Resta ancora da vedere quale influenza hanno i coefficienti a_{12} e b_{12} sul valore della differenza $|\,\sigma^{*2} - \overline{\sigma}_2^2\,\nu\,|$ nel caso in cui sia $\overline{\sigma}_2^2\,\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\sigma}_1^2$.

A tale scopo osserviamo che, per la (12), si ha:

$$|\,\sigma^{*2} - \overline{\sigma}_2^2\,\nu\,| = \frac{1}{2}\,(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\,,$$

o meglio

$$|\,\sigma^{*2} - \overline{\sigma}_2^2\,\nu\,| = \frac{\sqrt{(\overline{\sigma}_1^2 - \overline{\sigma}_2^2)^2 + 4(\alpha - \beta\,\overline{\sigma}_1^2)(\alpha - \beta\,\overline{\sigma}_2^2)}}{2(1-\beta^2)}\,.$$

Dalla precedente risulta che, per rendere il valore di $|\,\sigma^{*2} - \overline{\sigma}_2^2\,\nu\,|$ il più grande possibile, occorre che sia $\alpha\beta < 0$ e $|\,\alpha\,|$ e $|\,\beta\,|$ assumano valori possibilmente grandi.

Da quanto precede si possono pertanto trarre le seguenti conclusioni in virtù delle quali risulta minima, nel sistema $S_1 + S_2$ considerato, la vibrazione forzata della coordinata q_1 nell'ipotesi che siano assegnati i valori dei coefficienti di S_1 e dell'ampiezza e della frequenza della forza esterna ad esso relativa:

a) $\omega_m^2 > \frac{1}{2}\,\overline{\sigma}_1^2$. - Scegliere α e β in modo che sia $\alpha\beta < 0$ e $|\,\alpha\,|$ e $|\,\beta\,|$ assumano valori possibilmente grandi, ma tali che risultino soddisfatte la (13), dove $\bar{\sigma}_2^2 \nu$ s'intende sostituito con ω_m^2, e la condizione $|\beta| < 1$; trarre dalla (12), dove ω_m^2 prende il posto di $\bar{\sigma}_2^2 \nu$, il valore di $\bar{\sigma}_2^2$ e da esso, a meno di una costante moltiplicativa positiva arbitrariamente assegnabile, i valori di a_{22} e b_{22}; assegnare a k_2 il valore dato dalla (10) dopo aver ricavato dalle (11) i valori di a_{12} e b_{12}.

b) $\omega_m^2 \leqslant \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2$. - Scegliere per a_{22}, b_{22}, a_{12}, b_{12} valori tali da soddisfare alle condizioni $\bar{\sigma}_2^2 > \bar{\sigma}_1^2 = \frac{a_{12}}{b_{12}}$, $a_{22} > 0$, $b_{22} > 0$, $a_{11} a_{22} > a_{12}^2$, $b_{11} b_{22} > b_{12}^2$; assegnare a k_2 il valore dato dalla (10).

BIBLIOGRAFIA

G. KRALL: *Meccanica Tecnica delle Vibrazioni*. Nicola Zanichelli, Bologna, 1940.

P. E. DANIELE: *Lezioni di Fisica-Matematica*. R. Università di Pisa, 1925-26.