ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Sul problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 3-4 (1947), p. 185-188
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_185_0>

SUL PROBLEMA DI CAUCHY
PER LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI (*)

di EMILIO BAIADA (Pisa).

Il problema di CAUCHY per le equazioni alle derivate ordinarie è stato risolto in modo brillante dal PEANO e dall'ARZELÀ, ammettendo come unica condizione per assicurare l'esistenza della soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, la continuità della funzione f rispetto alla coppia (x, y). Naturalmente se ne deduce immediatamente che questa soluzione è continua con derivata continua.

Il problema di CAUCHY, formulato per le equazioni alle derivate parziali, servendosi dell'analogia con quelle alle derivate ordinarie e tenendo conto delle necessità delle applicazioni, può essere enunciato in un caso particolare, ma espressivo, nel modo seguente:

Data una funzione $f(x, y, z, q)$ definita per $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, z, q qualunque, data inoltre una funzione $\omega(y)$ definita nel campo $y_0 \leqslant y \leqslant y$, quali sono le condizioni che bisogna imporre, tanto alla f quanto alla ω, perchè esista un numero a' con $0 < a' \leqslant a$ tale che l'equazione alle derivate parziali:

$$p = f(x, y, z, q),$$

ammetta una soluzione $z = z(x, y)$, con derivate parziali $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ continue nel campo $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a'$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, e tale inoltre che $z(\xi, y) = \omega(y)$?

Sono state date alcune risposte (1) alla domanda precedente, ma la meno restrittiva deve ammettere tra l'altro che le derivate parziali f_y, f_z, f_q siano Lipschitziane rispetto alle variabili y, z, q, il numero a' dipendendo tra l'altro dal valore di questa costante di LIPSCHITZ.

Tutti i tentativi (tra cui uno dell'ARZELÀ) di ridurre fortemente queste condizioni hanno avuto esito negativo. Molti sono tuttavia coloro a cui sembra

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) Vedere E. KAMKE: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, 1930. — C. SEVERINI: *Sul Problema di Cauchy*. Atti dell'Accademia Gioenia, serie 5, vol. X (1916). — T. WAZEWSKI: *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. Math. Zeitschrift, 43, bd., 1938. — E. DIGEL: *Über des Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. Math. Zeitschrift, 44 bd., 1939, pp. 445-451· — E. BAIADA: *Il Teorema d'esistenza per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, nota precedente.

possibile ridurre (basandosi sull'analogia con quanto accade per il problema analogo relativo alle equazioni differenziali ordinarie) tutte le condizioni alla sola continuità della funzione f e della funzione ω' (2).

Scopo di questa Nota è di fare vedere come questa idea sia fondamentalmente erronea, l'analogia fra i due problemi di CAUCHY diventando così più apparente che reale. Risulterà pure che le condizioni già date per l'esistenza della soluzione del problema di CAUCHY sono tutt'altro che molto restrittive ed anzi appaiono non troppo lontane dalle condizioni minime per l'esistenza stessa della soluzione con derivate parziali continue.

1. - Consideriamo la funzione definita nel quadrante Q : $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} z = x^2 y^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{(x+y)^3} & \text{per} \quad x+y>0, \\ z=0 & \text{per} \quad x+y=0 ; \end{array} \right. \tag{1}$$

questa funzione è continua rispetto a (x, y) nel quadrante Q compresi i semiassi positivi x ed y. La funzione è continua anche nell'origine (0, 0).

La funzione (1) ammette derivata parziale rispetto a x. Avremo:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(x+y)^3} - 3 \frac{x^2 y^2}{(x+y)^4} \cos \frac{1}{(x+y)^3} \quad \text{per ogni} \quad x+y>0,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{per} \quad x=0,\ y=0.$$

Osserviamo facilmente che questa derivata parziale risulta continua su tutto il quadrante escluso il punto (0, 0) in cui essa risulta discontinua. Infatti, supposti $x=y$ quando il punto (x, y) tende all'origine lungo la bisettrice del quadrante il secondo addendo della derivata in questione oscilla infinite volte tra i valori $-\frac{3}{16}$ e $+\frac{3}{16}$, mentre il primo addendo tende a zero.

Le stesse considerazioni si possono svolgere per la derivata parziale rispetto alla y, vista la simmetria nella definizione (1) della z rispetto alle variabili x ed y. Avremo:

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y \operatorname{sen} \frac{1}{(x+y)^3} - 3 \frac{x^2 y^2}{(x+y)^4} \cos \frac{1}{(x+y)^3} \quad \text{per} \quad x+y>0,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad x=0,\ y=0.$$

---

(2) Vedere: Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni della R. Università di Roma e del R. Istituto N. di Alta Matematica, serie V, vol. 3, fasc. I (1942), Problema n. 131: « Il problema di CAUCHY per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$ nel caso reale » (G. SANSONE).

È facile ora verificare che la funzione (1) soddisfa nel quadrante Q all'equazione alle derivate parziali:

$$(2)\qquad \begin{cases} p=q-2x^2y \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+y)^3}+2xy^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+y)^3} & \text{per}\quad x+y>0, \\ p=q & \text{per}\quad x+y=0. \end{cases}$$

Inoltre essa soddisfa alla condizione iniziale:

$$z(0, y)=0 \quad \text{qualunque sia} \quad y \geqslant 0.$$

2. - Facciamo ora vedere che l'equazione (2) non ammette nessuna soluzione con derivate parziali continue sul campo Q, che per $x=0$ prenda il valore 0.

Sia $z=\bar{z}(x, y)$ una soluzione dell'equazione (2) con derivate parziali $\bar{p}$, $\bar{q}$ continue su tutto il quadrante Q e sia tale inoltre che $\bar{z}(0, y)=0$, qualunque sia $y \geqslant 0$.

Avremo per ipotesi:

$$\begin{cases} \bar{p}=\bar{q}-2x^2y \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+y)^3}+2xy^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+y)^3} & \text{per}\quad x+y>0, \\ \bar{p}=\bar{q} & \text{per}\quad x=0,\ y=0. \end{cases}$$

Se indichiamo con p^* e q^* le derivate parziali della funzione (1) avremo:

$$p^*-\bar{p}=q^*-\bar{q}.$$

La funzione

$$(3)\qquad \begin{cases} z=\bar{z}(x, y)-x^2y^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+y)^3} & \text{per}\quad x+y>0, \\ z=0 & \text{per}\quad x=0,\ y=0, \end{cases}$$

è continua su Q, assume il valore 0 per $x=0$ ed ammette derivate parziali p, q rispetto a x e rispetto ad y su tutto Q, continue su Q esclusa l'origine.

La funzione (3) soddisfa su tutto Q all'equazione: $p=q$.

Facciamo ora vedere che la funzione (3) è identicamente nulla. Operiamo una sezione con il piano $x+y=k>0$. Otterremo una curva continua: $z=z(x, k-x)$ e siccome, viste le ipotesi, vale il teorema di derivazione delle funzioni composte su tutto Q escluso se mai il punto (0, 0), avremo: $\dfrac{dz}{dx}=p-q=0$ su tutto il segmento di parallela alla seconda bisettrice compreso fra i due assi x ed y e quindi su questo segmento stesso ed in virtù della condizione iniziale imposta è $z=0$.

Per la continuità ammessa deve essere anche $z(x, y)=0$ su tutto Q compresa l'origine.

3. - Risulta così dimostrato che se l'equazione (2) ammette su Q una soluzione che si annulli per $x=0$, con derivate parziali continue, essa non può dif-

ferire dalla (1), cosa evidentemente impossibile non ammettendo la (1) derivate parziali continue.

Risulta così dimostrato che l'equazione alle derivate parziali (2) non ammette nessuna soluzione con derivate parziali continue sul quadrante Q e che si annulli per $x=0$.

Osserviamo ora che la funzione :

$$f(x, y, z, q) \equiv q - 2x^2y \operatorname{sen} \frac{1}{(x+y)^3} + 2xy^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(x+y)^3} \quad \text{per} \quad x+y \neq 0,$$

$$f(x, y, z, q) \equiv q \quad \text{per} \quad x=0,\ y=0,$$

è continua rispetto a tutti i suoi argomenti sul quadrante Q ed ammette derivate parziali rispetto a tutte le variabili. Le derivate rispetto a x ed a y sono discontinue nell'origine.

CONCLUSIONE. - Non può esistere un teorema generale che affermi l'esistenza della soluzione, con derivate parziali continue, d'un'equazione alle derivate parziali

$$p = f(x, y, z, q), \tag{4}$$

su tutto un campo chiuso, quando non si ammetta qualche condizione ancora più restrittiva della semplice esistenza delle derivate parziali della f rispetto ai suoi argomenti. La stessa conclusione permane a maggior ragione se si ammette soltanto l'ipotesi della continuità della $f(x, y, z, q)$.

Osservazione. - Questa conclusione negativa non tiene assolutamente conto delle condizioni eventualmente da imporsi alla curva iniziale $z(\xi, y) = \omega(y)$ da cui deve uscire la superficie $z = z(x, y)$ soluzione della (4) perchè sia verificata la condizione di continuità delle derivate parziali della soluzione stessa.