

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CESARI

Sulla moltiplicazione delle serie doppie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 12, n° 3-4 (1947), p. 189-204

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_189_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA MOLTIPLICAZIONE DELLE SERIE DOPPIE

di LAMBERTO CESARI (Bologna) ⁽¹⁾

§ 1.

1. - Sia

$$(1) \quad \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}$$

una serie doppia e siano

$$S_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n a_{rt}, \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n s_{rt}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

rispettivamente le sue somme parziali e le sue medie del CESARO. Secondochè esistono finiti i limiti

$$\lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} s_{mn}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn}), \quad \lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} \sigma_{mn},$$

si dice che la (1) è *convergente in senso ordinario* (secondo STOLZ e PRINGSHEIM), *per righe, per colonne*, oppure che la (1) è *sommabile* $(C, 1, 1)$ ⁽²⁾. Si dice infine che la (1) è *sommabile* $(C, 1, 1)_l$, se per ogni coppia di numeri l, L , $0 < l < L < +\infty$, esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} \sigma_{mn} \quad (3).$$

$$l < \frac{m}{n} < L$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ In ogni caso detti limiti diconsi *somma* della serie. Ricordiamo che una serie può convergere per righe e per colonne e non essere convergente in senso ordinario. Di più la somma per righe e quella per colonne non sono necessariamente uguali. Una serie può convergere in senso ordinario e non convergere per righe e per colonne. Tuttavia se una serie doppia converge in senso ordinario, per righe e per colonne, le tre somme risultano fra loro uguali. Per quanto riguarda i legami fra la convergenza ordinaria e la sommabilità $(C, 1, 1)$ vedasi L. CESARI: *Sulla convergenza delle serie doppie*. Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. XI (1942), pp. 135-150.

⁽³⁾ Detto limite, che risulta indipendente da l ed L , dicesi *somma generalizzata* della (1). Per i legami fra questa nozione di sommabilità e le precedenti, vedi L. CESARI, loc. cit. in ⁽²⁾. Cfr. inoltre i miei precedenti lavori: *Sulle serie doppie*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa,

2. - Siano

$$(1) \quad \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}, \quad (2) \quad \sum_{m, n=0}^{\infty} b_{mn},$$

due serie doppie. Si dice prodotto delle due serie (1) e (2) la nuova serie doppia

$$(3) \quad \sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn}, \quad c_{mn} = \sum_{r+u=m}^{\infty} \sum_{s+v=n}^{\infty} a_{rs} b_{uv}, \quad m, n=0, 1, 2, \dots, \quad (4).$$

È noto che se (1) e (2) convergono ⁽⁵⁾ la (3) è non necessariamente convergente e neppure sommabile $(C, 1, 1)$ o $(C, 1, 1)_r$ e ciò accade anche se una delle due serie (1) e (2) converge assolutamente.

Ciò mostra il seguente esempio:

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -1 & n=1, \\ 0 & n>1 \end{cases} \quad b_{mn} = \begin{cases} b_n \neq 0, & m=0, \\ 0, & m>0, \end{cases}$$

ove $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una serie convergente assolutamente.

Si ha

$$c_{mn} = \begin{cases} a_{m0} b_{00}, & n=0, \\ a_{m0} (b_{0n} - b_{0, n-1}), & n>0, \end{cases}$$

e quindi

$$c_{mn} = b_n - b_{n-1}, \quad s_{mn} = (m+1)b_n, \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{2} \frac{m+2}{n+1} (b_0 + b_1 + \dots + b_n),$$

e queste ultime formule dimostrano che la serie $\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn}$ è non convergente, non sommabile $(C, 1, 1)$ e non sommabile $(C, 1, 1)_r$.

Serie II, Vol. I (1932), pp. 297-314; *Su un tipo di condizioni necessarie per la convergenza dei polinomi di Fourier e di Fejer e su altre questioni concernenti le serie doppie di Fourier*, Mem. Accad. Italia, n. 10, Vol. VIII (1937), pp. 445-531; Recensione al lavoro di L. AMERIO: *Sulla convergenza delle serie doppie*, sul Zentralblatt für Math., Vol. 25 (1942), p. 155; *Sul campo totale di convergenza delle serie doppie di potenze*, Mem. Accad. Italia, n. 21, Vol. XIV (1943), pp. 603-616; *Sulle serie doppie di Fourier*, Rend. Accad. Lincei, Ser. VIII, Vol. I (1946), pp. 1173-1175.

(4) Questa definizione di *prodotto* è utilissima nella teoria delle serie doppie di potenze di due variabili.

(5) Se le due serie (1) e (2) convergono assolutamente, anche la (3) converge assolutamente. Ricordiamo che la serie doppia (1) si dice convergente assolutamente se converge la serie doppia $\sum_{m, n=0}^{\infty} |a_{mn}|$. Una serie doppia convergente assolutamente, converge in senso ordinario, per righe, per colonne ed è sommabile $(C, 1, 1)$.

3. - Queste singolarità nel comportamento della serie prodotto spariscono non appena si assoggettino le serie (1) e (2) a deboli condizioni, di solito soddisfatte nelle applicazioni.

Io dimostrerò precisamente (§ 2) le seguenti proposizioni:

TEOREMA I. - *Se le serie (1) e (2) convergono ed A e B sono le loro somme, se*

$$(4) \quad \lim_{m+n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0, \quad \lim_{m+n \rightarrow \infty} b_{mn} = 0,$$

allora la serie (3) è sommabile $(C, 1, 1)_r$ e la sua somma è $C=AB$ ⁽⁶⁾.

TEOREMA II. - *Se, per ogni coppia di numeri $0 < l' < L' < +\infty$, esistono i limiti*

$$(5) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ l' < \frac{m}{n} < L'}} s'_{mn} = A, \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ l' < \frac{m}{n} < L'}} s''_{mn} = B, \quad (7)$$

ove s'_{mn} e s''_{mn} sono rispettivamente le somme parziali delle serie (1) e (2); se esistono cinque costanti positive P, Q, R, σ, τ , tali che per ogni m, n ,

$$\left| \begin{array}{l} s'_{mn} \\ s''_{mn} \end{array} \right\} < P + Q \left(\frac{m+1}{n+1} \right)^\sigma + R \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^\tau, \quad \sigma < 1, \tau < 1;$$

allora la serie (3) è sommabile $(C, 1, 1)_r$ e la sua somma è $C=AB$.

TEOREMA III. - *Se la (1) converge in senso ordinario, per righe e per colonne, se la (2) converge assolutamente, allora la (3) converge in senso ordinario, per righe e per colonne e la sua somma è $C=AB$, ove A e B sono le somme delle serie (1) e (2) ⁽⁸⁾.*

⁽⁶⁾ Ricordiamo che le serie doppie di FOURIER verificano in ogni punto la condizione (4).

⁽⁷⁾ La (5) rappresenta una nozione di convergenza generalizzata che può talora essere utile. Vedi C. N. MOORE: *On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions*. Math. Ann., Bd. 74, pp. 555-572 (1913); *Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier*. Comptes rendus, t. 154, pp. 126-128 (1912); E. C. TITCHMARSH: *The double Fourier series of a discontinuous function*. Proc. Royal Society, S. A., Vol. 106 (1924), pp. 299-314; L. CESARI: *Su un tipo di condizioni necessarie per la convergenza dei polinomi di Fourier e di Fejer e su altre questioni concernenti le serie doppie di Fourier*. Memorie della Accademia d'Italia, vol. VIII, n. 10 (1937), pp. 445-531.

⁽⁸⁾ Questo teorema estende alle serie doppie il ben noto teorema di MERTENS relativo al prodotto delle serie semplici. Come si vede si avrebbe un enunciato particolarmente semplice ed elegante se si dicessero « convergenti » le sole serie doppie convergenti in senso ordinario, per righe e per colonne.

§ 2.

4. - LEMMA I. - Se $a_{mn}, b_{mn}, m, n=0, 1, 2, \dots$ sono due doppie successioni e

$$c_{mn} = \sum_{r+u=m} \sum_{t+v=n} a_{rt} b_{uv},$$

$$s_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n a_{rt}, \quad S_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n c_{rt},$$

allora vale la seguente identità :

$$(7) \quad S_{mn} = \sum_{r+u=m} \sum_{t+v=n} s_{rt} b_{uv}.$$

Basta dimostrare questa identità nella ipotesi che per dati u e v si abbia

$$b_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=u, n=v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ma in questo caso il Lemma è ridotto alla seguente evidente proposizione :
Se $a_{mn}, m, n=0, 1, 2, \dots$, è una doppia successione e

$$s_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n a_{rt}, \quad c_{mn} = \begin{cases} a_{m-u, n-v} & \text{se } m \geq u, n \geq v, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$S_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^n a_{rt},$$

allora

$$S_{mn} = \begin{cases} s_{m-u, n-v}, & \text{se } m \geq u, n \geq v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

5. Dimostrazione del Teorema I. - Diciamo $s'_{mn}, \sigma'_{mn}, s''_{mn}, \sigma''_{mn}, s'''_{mn}, \sigma'''_{mn}$ rispettivamente le somme parziali e le medie del CESARO delle serie (1), (2), (3). Dalla (4) segue che le successioni $a_{nt}, a_{tn}, b_{nt}, b_{tn}, t=0, 1, 2, \dots$, tendono a zero e quindi esistono finite le quantità :

$$\varepsilon'_n = \max_{t=0,1,2,\dots} [|a_{nt}| + |a_{tn}|], \quad \varepsilon''_n = \max_{t=0,1,2,\dots} [|b_{nt}| + |b_{tn}|].$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon''_n = 0.$$

Si ha intanto

$$|a_{mn}| < \begin{cases} \varepsilon'_m \\ \varepsilon'_n \end{cases}, \quad |b_{mn}| < \begin{cases} \varepsilon''_m \\ \varepsilon''_n \end{cases},$$

e quindi:

$$|s'_{mn}| < \begin{cases} (m+1) \sum_{t=0}^n \varepsilon'_t \\ (n+1) \sum_{r=0}^m \varepsilon'_r \end{cases}, \quad |s''_{mn}| < \begin{cases} (m+1) \sum_{t=0}^n \varepsilon''_t \\ (n+1) \sum_{r=0}^m \varepsilon''_r \end{cases}.$$

D'altra parte osserviamo che, applicando il Lemma alle somme che definiscono $s'''_{\mu\nu}$ e $\sigma'''_{\mu\nu}$, si trova

$$\begin{aligned} s'''_{\mu\nu} &= \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{r+u=m} \sum_{t+v=n} a_{rt} b_{uv} = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} s'_{rt} b_{uv} = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} b_{rt} s'_{uv}, \\ (\mu+1)(\nu+1) \sigma'''_{\mu\nu} &= \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{r+u=m} \sum_{t+v=n} b_{rt} s'_{uv} = \\ &= \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} s'_{rt} s'_{uv} = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} s'_{rt} s''_{uv}. \end{aligned}$$

Infine, posto $C=AB$, si ha

$$\begin{aligned} (8) \quad \sigma'''_{\mu\nu} - C &= \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} (s'_{rt} s''_{uv} - AB) = \\ &= \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} \{ (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B) + B(s'_{rt} - A) + A(s''_{uv} - B) \} = \\ &= \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B) + B(\sigma'_{\mu\nu} - A) + A(\sigma''_{\mu\nu} - B) = I_{\mu\nu} + I'_{\mu\nu} + I''_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Osserviamo che le serie (1) e (2) convergono in senso ordinario alle somme A e B e verificano la (4). Da un mio teorema ⁽⁹⁾ segue che le serie (1) e (2) sono sommabili $(C, 1, 1)_r$ e le loro somme generalizzate coincidono rispettivamente con A e B .

Siano $0 < l < L < +\infty$ due numeri arbitrari. Si ha intanto

$$(9) \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \\ l < \frac{\mu}{\nu} < L}} I'_{\mu\nu} = 0 = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \\ l < \frac{\mu}{\nu} < L}} I''_{\mu\nu}.$$

⁽⁹⁾ L. CESARI: loc. cit. in ⁽²⁾, Teor. I, pag. 137. Cfr. inoltre L. CESARI, loc. cit. in ⁽⁷⁾, pag. 454.

Sia $0 < \varepsilon < 1$ un numero arbitrario e sia N un numero tale che per ogni $m, n > N$ si abbia :

$$|s'_{mn} - A| < \varepsilon, \quad |s''_{mn} - B| < \varepsilon.$$

Per ogni $\mu, \nu > 2N$ si ha ora

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \left\{ \sum_{r,t,u,v > N} + \sum_{\substack{r \leq N \\ t,u,v > N}} + \sum_{\substack{t \leq N \\ r,u,v > N}} + \sum_{\substack{u \leq N \\ r,t,v > N}} + \sum_{\substack{v \leq N \\ r,t,u > N}} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{r,t \leq N \\ u,v > N}} + \sum_{\substack{r,v \leq N \\ u,t > N}} + \sum_{\substack{u,t \leq N \\ r,v > N}} + \sum_{\substack{u,v \leq N \\ r,t > N}} \right\} (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B) = \sum_{i=1}^9 \mathfrak{J}_i,$$

le sommatorie essendo estese a tutte le quaterne di numeri interi e non negativi r, t, u, v , che verificano le disuguaglianze indicate e inoltre le relazioni :

$$r + u = \mu, \quad t + v = \nu.$$

Per ogni $\mu, \nu > 2N$ si ha $|\mathfrak{J}_1| < \varepsilon^2$. Inoltre

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}_2| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t+v=\nu} |s'_{rt} - A| |s''_{\mu-r, \nu-t} - B| \leq \\ &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^{\nu} \left[|A| + (r+1) \sum_{\tau=0}^t \varepsilon'_\tau \right] \varepsilon \leq \\ &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^{\nu} \left[|A| + (N+1) \sum_{\tau=0}^{\nu} \varepsilon'_\tau \right] \varepsilon \leq \\ &\leq (N+1)^2 \varepsilon \cdot \frac{\nu+1}{\mu+1} \cdot \frac{1}{\nu+1} \left[|A| + \sum_{\tau=0}^{\nu} \varepsilon'_\tau \right]. \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\substack{\mu, \nu \rightarrow \infty \\ l < \frac{\mu}{\nu} < L}} \mathfrak{J}_2 = 0.$$

Analoghe relazioni valgono per $\mathfrak{J}_3, \mathfrak{J}_4, \mathfrak{J}_5$.

Si ha ora

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}_6| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^N |s'_{rt} - A| |s''_{\mu-r, \nu-t} - B| \leq \\ &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^N \left[|A| + (r+1) \sum_{\tau=0}^t \varepsilon'_\tau \right] \varepsilon \leq \\ &\leq (N+1)^3 \varepsilon \cdot \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1}{\nu+1} \left[|A| + \sum_{\tau=0}^{\nu} \varepsilon'_\tau \right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_6 = 0.$$

Analoga relazione vale per \mathfrak{J}_9 .

Infine:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}_7| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{v=0}^N |s'_{r, \nu-v} - A| |s''_{\mu-r, v} - B| \leq \\ &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{v=0}^N \left[|A| + (r+1) \sum_{\tau=0}^{\nu-v} \varepsilon'_\tau \right] \left[|B| + (v+1) \sum_{\tau=0}^{\mu-r} \varepsilon''_\tau \right] \leq \\ &\leq (N+1)^4 \cdot \frac{1}{\nu+1} \left[|A| + \sum_{\tau=0}^{\nu} \varepsilon'_\tau \right] \cdot \frac{1}{\mu+1} \left[|B| + \sum_{\tau=0}^{\mu} \varepsilon''_\tau \right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_7 = 0.$$

Analoga relazione vale per \mathfrak{J}_8 . Esiste perciò un $M > 2N$ tale che per ogni $\mu > M$, $\nu > M$, $l < \mu/\nu < L$, si ha:

$$|I_{\mu\nu}| \leq \sum_{i=1}^9 |\mathfrak{J}_i| < \varepsilon^2 + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha, in definitiva,

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} I_{\mu\nu} = 0.$$

$$l < \frac{\mu}{\nu} < L$$

Ma l ed L sono numeri arbitrari, $0 < l < L < +\infty$, e quindi, ricordando la (8) e la (9), segue senz'altro l'asserto.

6. Dimostrazione del teorema II. - Anche qui diciamo s'_{mn} , σ'_{mn} , s''_{mn} , σ''_{mn} , s'''_{mn} , σ'''_{mn} rispettivamente le somme parziali e le medie del CESARO delle serie (1), (2), (3). Abbiamo già visto nel n. precedente che

$$\begin{aligned} (10) \quad \sigma_{\mu\nu} - AB &= \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r+u=\mu} \sum_{i+v=\nu} (s'_{ri} - A)(s''_{uv} - B) + \\ &+ B(\sigma'_{\mu\nu} - A) + A(\sigma''_{\mu\nu} - B) = I_{\mu\nu} + I'_{\mu\nu} + I''_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Osserviamo che le serie (1) e (2) verificano le (5) e le (6) e quindi per un mio teorema ⁽¹⁰⁾, le serie (1) e (2) sono sommabili $(C, 1, 1)_r$ e le loro somme generalizzate coincidono rispettivamente con A e B .

Siano $0 < l' < L' < +\infty$ due numeri arbitrari. Si ha intanto:

$$(11) \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \\ l' < \frac{\mu}{\nu} < L'}} I'_{\mu\nu} = 0 = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \\ l' < \frac{\mu}{\nu} < L'}} I''_{\mu\nu}.$$

Sia ora $0 < \varepsilon < 1/2$ un numero arbitrario e siano $0 < l < L < +\infty$ due numeri tali che

$$\begin{aligned} l &\leq 1, & l &\leq l', & l &\leq \varepsilon l', & l &\leq (\varepsilon l')^{\frac{1}{1-\tau}}, \\ L &\geq 1, & L &\geq L', & L &\geq \frac{L'}{\varepsilon}, & L &\geq \left(\frac{L'}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}, \\ & & & & l &\leq l'(\varepsilon L'^{\sigma-\tau})^{\frac{1}{1-\tau}}. \end{aligned}$$

Sia poi N un intero tale che, per ogni coppia di numeri m, n , con $m > N$, $n > N$, $l < \frac{m+1}{n+1} < L$, si abbia:

$$|s'_{mn} - A| < \varepsilon, \quad |s''_{mn} - B| < \varepsilon.$$

Per ogni μ, ν si ha ora, posto $\alpha = \frac{r+1}{t+1}$, $\beta = \frac{u+1}{v+1}$,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} = \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} &\left\{ \sum_{\substack{l < \alpha < L \\ l < \beta < L}} + \sum_{\substack{\alpha < l \\ l < \beta < L}} + \sum_{\substack{\alpha > L \\ l < \beta < L}} + \sum_{\substack{l < \alpha < L \\ \beta < l}} + \sum_{\substack{\alpha < l \\ \beta < l}} + \sum_{\substack{\alpha > L \\ \beta < l}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{l < \alpha < L \\ \beta \geq L}} + \sum_{\substack{\alpha < l \\ \beta \geq L}} + \sum_{\substack{\alpha > L \\ \beta \geq L}} \right\} (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B) = B \sum_{i=1}^9 \mathcal{J}_i, \end{aligned}$$

le sommatorie essendo estese a tutte le quaterne di numeri interi non negativi r, t, u, v che verificano le disuguaglianze indicate e inoltre le relazioni

$$r+u=\mu, \quad t+v=\nu.$$

Occupiamoci di \mathcal{J}_2 . Per ogni $\mu \geq 2L(N+1)$, $\nu \geq 2L(N+1)$, $l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$,

⁽¹⁰⁾ L. CESARI, loc. cit. in ⁽²⁾, Teor. II, pag. 137. Cfr. inoltre L. CESARI, loc. cit. in ⁽⁷⁾, pag. 456.

si ha ora $r+1 \leq l(t+1)$, $r \leq l(t+1)-1$ e quindi

$$\begin{aligned} u = \mu - r &\geq \mu - l(t+1) + 1 \geq (\mu+1) - l(v+1) > (\mu+1) - \frac{l}{v}(\mu+1) > \\ &> (1-\varepsilon)(\mu+1) > \frac{1}{2} 2L(N+1) > N, \\ v+1 &> \frac{1}{L}(u+1) \geq \frac{1}{L} L(N+1) = N+1. \end{aligned}$$

Dunque in tutti i termini di \mathcal{J}_2 è $u > N$, $v > N$, $l < \frac{u+1}{v+1} < L$ e perciò $|s''_{uv} - B| < \varepsilon$. Ne risulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_2| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(v+1)} \sum_{\substack{r+u=\mu, \quad t+v=\nu \\ \frac{r+1}{t+1} \geq L, \quad l < \frac{u+1}{v+1} < L}} |s'_{rt} - A| |s''_{uv} - B| = \\ &= \frac{1}{(\mu+1)(v+1)} \sum_{t=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{[\mu-t]} |s'_{rt} - A| |s''_{\mu-r, \nu-t} - B| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(\mu+1)(v+1)} \sum_{t=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{[\mu-t]} \left[P + |A| + Q \left(\frac{r+1}{t+1} \right)^{\sigma} + R \left(\frac{t+1}{r+1} \right)^{\tau} \right] \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(\mu+1)(v+1)} \left\{ [P + |A| + Q l^{\sigma}] l(v+1) \cdot (v+1) + R \cdot d(v+1)^{1+\tau} \cdot d' l^{1+\tau} (v+1)^{1-\tau} \right\} \leq \\ &\leq \varepsilon [P + |A| + Q] \frac{l}{l'} + \varepsilon R d d' \frac{l^{1-\tau}}{l'} \leq [P + |A| + Q + R d d'] \varepsilon \quad (4^1). \end{aligned}$$

Analoga relazione vale per \mathcal{J}_4 .

Occupiamoci di \mathcal{J}_3 . Per ogni $\mu \geq \frac{2}{l}(N+1)$, $\nu \geq \frac{2}{l'}(N+1)$, $l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$ si ha $t+1 \leq \frac{r+1}{L}$, $t \leq \frac{r+1}{L} - 1$ e quindi

$$\begin{aligned} v = \nu - t &\geq \nu - \frac{r+1}{L} + 1 \geq \nu + 1 - \frac{\mu+1}{L} > (v+1) - \frac{L'}{L} (v+1) > \\ &> (1-\varepsilon)(v+1) > \frac{1}{2} \frac{2}{l'} (N+1) > N, \\ u+1 &> l(v+1) > l \frac{N+1}{l} = N+1. \end{aligned}$$

(4¹) Qui ed in seguito diciamo c, c', d, d' costanti positive per le quali, qualunque sia n , accade che

$$\sum_{r=1}^n n^{\sigma} \leq c n^{1+\sigma}, \quad \sum_{r=1}^n n^{\tau} \leq d n^{1+\tau}, \quad \sum_{r=1}^n n^{-\sigma} \leq c' n^{1-\sigma}, \quad \sum_{r=1}^n n^{-\tau} \leq d' n^{1-\tau}$$

Dunque in tutti i termini di \mathcal{J}_3 è $u > N$, $v > N$, $l < \frac{u+1}{v+1} < L$ e perciò $|s''_{uv} - B| < \varepsilon$. Ne risulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_3| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{\substack{r+u=\mu, t+v=\nu \\ \frac{r+1}{t+1} \geq L, l < \frac{u+1}{v+1} < L}} |s'_{rt} - A| |s''_{uv} - B| = \\ &= \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{\substack{t=0 \\ l < \frac{\mu-r+1}{\nu-t+1} < L, 0 \leq t \leq \nu}}^{\left[\frac{r+1}{L}\right]-1} |s'_{rt} - A| |s''_{uv} - B| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{t=0}^{\left[\frac{r+1}{L}\right]-1} \left[P + |A| + Q \left(\frac{r+1}{t+1}\right)^{\sigma} + R \left(\frac{t+1}{r+1}\right)^{\tau} \right] \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(\mu+1)(\nu+1)} \left\{ [P + |A| + RL^{-\tau}] \frac{\mu+1}{L} (\mu+1) + Q \cdot c \left(\frac{\mu+1}{L}\right)^{1+\sigma} \cdot c' (\mu+1)^{1-\sigma} \right\} \leq \\ &\leq \varepsilon [P + |A| + R] \frac{L'}{L} + \varepsilon Qcc' \frac{L'}{L^{1+\sigma}} \leq [P + |A| + Qcc' + R] \varepsilon. \end{aligned}$$

Analoga relazione vale per \mathcal{J}_7 .

Si osservi ora che

$$\mathcal{J}_5 = \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{\substack{r+u=\mu, t+v=\nu \\ \frac{r+1}{t+1} \leq l, \frac{u+1}{v+1} \leq l}} (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B)$$

e che questa sommatoria non contiene alcun termine per $l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$. Infatti se questa sommatoria contenesse almeno un termine, allora si avrebbe:

$$\begin{aligned} \mu+1 &\leq r+u+1 \leq [l(t+1)]-1 + [l(v+1)]-1 + 1 \leq \\ &\leq l(t+1) + l(v+1) - 1 \leq l(t+v+1) + l - 1 \leq l(\nu+1) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\mu+1}{\nu+1} \leq l \leq l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$$

ciò che è assurdo. Si ha quindi $\mathcal{J}_5 = 0$ e analogamente $\mathcal{J}_9 = 0$.

Occupiamoci ora di \mathcal{J}_6 . Si ha

$$(12) \quad |\mathcal{J}_6| \leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{\substack{r+u=\mu, t+v=\nu \\ \frac{r+1}{t+1} \geq L, \frac{u+1}{v+1} < l}} |s'_{rt} - A| |s''_{uv} - B|.$$

Supponiamo al solito $l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$ e quindi

$$\frac{\mu+1}{L'} < \nu+1 < \frac{\mu+1}{l'}.$$

Supponiamo inoltre $\mu > 2N$, $\nu > 2N$, $\mu+1 > \frac{l'}{l}$.

Si ha ora $u = \mu - r$, $v = \nu - t$ e quindi

$$\frac{u+1}{v+1} = \frac{\mu-r+1}{\nu-t+1} \leq l,$$

ossia

$$\begin{aligned} \mu - r + 1 &\leq l\nu - lt + l, \\ r &\geq (\mu + 1) - l(\nu + 1) + lt. \end{aligned}$$

Infine

$$r \geq (\mu + 1) - l(\nu + 1) \geq (\mu + 1) - \frac{l}{l'}(\mu + 1) = \left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu + 1).$$

D'altra parte nella (12) è

$$\begin{aligned} |s'_{rt} - A| |s'_{uv} - B| &\leq \left[P + |A| + Q \left(\frac{r+1}{t+1} \right)^\sigma + RL^{-\tau} \right] \left[P + |B| + Ql^\sigma + R \left(\frac{\nu-t+1}{\mu-r+1} \right)^\tau \right] < \\ &< [P + |A| + |B| + 2Q + 2R]^2 \left(\frac{r+1}{t+1} \right)^\sigma \left(\frac{\nu-t+1}{\mu-r+1} \right)^\tau. \end{aligned}$$

Ne segue

$$|J_\delta| < \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} [P + |A| + |B| + 2Q + 2R]^2 \sum_{r = \left[\left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu+1) \right]}^{\mu} \sum_{t=0}^{\nu} \frac{(r+1)^\sigma}{(\mu-r+1)^\tau} \frac{(\nu-t+1)^\tau}{(t+1)^\sigma}.$$

Si osservi anzitutto che

$$\mu - \left[\left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu+1) \right] \leq \mu - \left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu+1) + 1 = \frac{l}{l'}(\mu+1)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{r = \left[\left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu+1) \right]}^{\mu} \frac{(r+1)^\sigma}{(\mu-r+1)^\tau} &< (\mu+1)^\sigma \sum_{n=1}^{\mu - \left[\left(1 - \frac{l}{l'}\right)(\mu+1) \right] + 1} n^{-\tau} \leq \\ &\leq (\mu+1)^\sigma d' \left[\frac{l}{l'}(\mu+1) + 1 \right]^{1-\tau} < 2d'(\mu+1)^{1+\sigma-\tau} \left(\frac{l}{l'} \right)^{1-\tau}. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\sum_{t=0}^{\nu} \frac{(\nu-t+1)^t}{(t+1)^\sigma} < k(\nu+1)^{1+\tau-\sigma} \quad (12)$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_6| &< 2k d' [P+|A|+|B|+2Q+2R]^2 \left(\frac{\mu+1}{\nu+1}\right)^{\sigma-\tau} \left(\frac{l}{\bar{l}}\right)^{1-\tau} < \\ &< 2kd' [P+|A|+|B|+2Q+2R]^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente vale per \mathcal{J}_8 .

Si ha ora, per ogni $\mu, \nu > 2N$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_1| = \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} &\left\{ \sum_{r,t,u,v > N} + \sum_{\substack{r \leq N \\ t,u,v > N}} + \sum_{\substack{t \leq N \\ r,u,v > N}} + \sum_{\substack{u \leq N \\ r,t,v > N}} + \sum_{\substack{v \leq N \\ r,t,u > N}} + \sum_{\substack{r,t \leq N \\ u,v > N}} + \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{r,v \leq N \\ t,u > N}} + \sum_{\substack{u,t \leq N \\ r,v > N}} + \sum_{\substack{u,v \leq N \\ r,t > N}} \right\} (s'_{rt} - A)(s''_{uv} - B) = \sum_{i=1}^9 T_i, \end{aligned}$$

le sommatorie essendo estese a tutte le quaterne di numeri interi non negativi r, t, u, v , che verificano le disuguaglianze indicate e inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} r+u &= \mu, & t+v &= \nu, \\ l &< \frac{r+1}{t+1} < L, & l &< \frac{u+1}{v+1} < L. \end{aligned}$$

Si ha intanto $|T_i| < \varepsilon$. Inoltre

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^{\nu} |s'_{rt} - A| |s''_{\mu-r, \nu-t} - B| < \\ &\quad l < \frac{r+1}{t+1} < L, \quad l < \frac{\mu-r+1}{\nu-t+1} < L \\ &\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^{\nu} [P+|A|+QL^\sigma+Rl^{-\tau}] \varepsilon < \\ &\leq \frac{1}{\mu+1} \cdot (N+1) \varepsilon \cdot [P+|A|+QL+Rl^{-1}] \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} T_2 = 0.$$

(12) Si osservi infatti che:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\nu+1)^{-1-\tau+\sigma} \sum_{t=0}^{\nu} \frac{(\nu-t+1)^t}{(t+1)^\sigma} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\nu} \frac{1}{\nu+1} \left(1 - \frac{t}{\nu+1}\right)^\tau \left(\frac{t+1}{\nu+1}\right)^{-\sigma} = \\ &= \int_0^1 (1-x)^\tau x^{-\sigma} dx. \end{aligned}$$

Analoghe relazioni valgono per T_3, T_4, T_5 .

Si ha ora

$$|T_6| \leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^N |s'_{rt} - A| \cdot |s''_{\mu-r, \nu-t} - B| \leq$$

$$l < \frac{r+1}{t+1} < L, l < \frac{\mu-r+1}{\nu-t+1} < L$$

$$\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \cdot (N+1)^2 \varepsilon \cdot [P + |A| + QL + RL^{-1}]$$

e quindi $\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} T_6 = 0$.

Analogha relazione vale per T_9 .

Infine

$$T_7 \leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} \sum_{r=0}^N \sum_{v=0}^N |s'_{r, \nu-v} - A| |s''_{\mu-r, v} - B| \leq$$

$$l < \frac{r+1}{\nu-v+1} < L, l < \frac{\mu-r+1}{v+1} < L$$

$$\leq \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)} (N+1)^2 [P + |A| + |B| + QL + RL^{-1}]^2$$

e quindi

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} T_7 = 0.$$

ed analogha relazione vale per T_8 .

Concludendo esiste un intero $M > 2N$ abbastanza grande affinchè per ogni $\mu > M, \nu > M$ si abbia $|J_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ e, per ogni $\mu > M, \nu > M, l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L', |J_i| < K\varepsilon, i = 2, 3, \dots, 9$; dunque, per ogni $\mu, \nu > M, l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L',$ anche $|I_{\mu\nu}| < K\varepsilon$, ove K è una costante che non dipende da ε .

Risulta così

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} I_{\mu\nu} = 0.$$

$$l' < \frac{\mu+1}{\nu+1} < L'$$

Ricordando le (10) e le (11) ed il fatto che l' ed L' sono due numeri arbitrari, $0 < l' < L' < +\infty$, segue che la serie (3) è sommabile $(C, 1, 1)_r$ e la sua somma generalizzata è AB . Il teorema II è così dimostrato.

7. LEMMA II. - Sia $\sigma_n, n=0, 1, 2, \dots,$ una successione ed esista finito il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S$. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una serie assolutamente convergente e sia B la sua somma. Allora esiste finito anche il limite seguente e si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n b_0 + \sigma_{n-1} b_1 + \dots + \sigma_0 b_n) = BS.$$

Intanto esiste una costante M tale che $|\sigma_n| < M$, $n=0, 1, 2, \dots$. Poniamo inoltre $K = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N un intero tale che, per ogni $n > N$,

$$\sum_{r=n}^{\infty} |b_r| < \varepsilon, \quad |\sigma_n - S| < \varepsilon.$$

Per ogni $n > 2N$ si ha ora

$$\sum_{r=0}^n \sigma_{n-r} b_r - SB = \sum_{r=0}^n (\sigma_{n-r} - S) b_r + S \left(\sum_{r=0}^n b_r - B \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=0}^n \sigma_{n-r} b_r - SB \right| &\leq \sum_{r=0}^{n-N} |\sigma_{n-r} - S| |b_r| + \sum_{r=n-N+1}^n |\sigma_{n-r} - S| |b_r| + |S| \left| \sum_{r=0}^n b_r - B \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} |b_r| + [M + |S|] \sum_{r=n-N+1}^{\infty} |b_r| + |S| \sum_{r=n+1}^{\infty} |b_r| \leq (K + M + 2|S|) \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \sigma_{n-r} b_r = SB.$$

8. Dimostrazione del teorema III. - Ci serviremo delle stesse notazioni adoperate nei numeri precedenti. Intanto esiste una costante M tale che

$$|s'_{mn}| \leq M, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Poniamo inoltre

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{mn}|.$$

Intanto come già sappiamo

$$s''_{\mu\nu} = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} s'_{rt} b_{uv}.$$

Ma

$$As''_{\mu\nu} = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} Ab_{uv}$$

e quindi

$$s''''_{\mu\nu} - AB = \sum_{r+u=\mu} \sum_{t+v=\nu} (s'_{rt} - A) b_{uv} - A(s''_{\mu\nu} - B) = I_1 + I_2.$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia N un intero tale che, per ogni $m, n > N$, si abbia $|s'_{mn} - A| < \varepsilon$ e inoltre

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{mn}| - \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N |b_{mn}| < \varepsilon.$$

Intanto, per ogni $\mu, \nu > N$, è $|I_2| < |A| \varepsilon$. Inoltre, per ogni $\mu, \nu > 2N$,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left\{ \sum_{r=0}^N \sum_{t=0}^N + \sum_{r=N+1}^{\mu} \sum_{t=0}^N + \sum_{r=0}^N \sum_{t=N+1}^{\nu} + \sum_{r=N+1}^{\mu} \sum_{t=N+1}^{\nu} \right\} |s'_{rt} - A| |b_{\mu-r, \nu-t}| \\ &\leq (M + |A|) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} |b_{rt}| - \sum_{r=0}^{\mu-N} \sum_{t=0}^{\nu-N} |b_{rt}| \right\} + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} |b_{rt}| \leq (M + |A| + K) \varepsilon. \end{aligned}$$

Infine, per ogni $\mu, \nu > 2N$,

$$|s''''_{\mu\nu} - AB| < (M + 2|A| + K) \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε segue che la serie (3) converge in senso ordinario e la sua somma è AB .

Dobbiamo ora dimostrare che la (3) converge per righe e per colonne. Per questo basta dimostrare che esistono gli infiniti limiti:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s''''_{\mu\nu}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} s''''_{\mu\nu} \quad (4^3), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Si ha infatti

$$s''''_{\mu\nu} = \sum_{r=0}^{\mu} \left(\sum_{t=0}^{\nu} s'_{rt} b_{\mu-r, \nu-t} \right).$$

(4³) Ricordiamo che se esistono finiti i limiti

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s''''_{\mu\nu} = s, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} s''''_{\mu\nu} = s_{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots,$$

allora esiste anche il limite seguente e si ha:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} s_{\mu} = s.$$

In altre parole se una serie doppia converge in senso ordinario e tutte le sue righe sono convergenti, allora essa converge anche per righe e le due somme coincidono.

Ma per ogni r e μ , la successione s'_{rt} , $t=0, 1, 2, \dots$, converge e la serie $\sum_{t=0}^{\infty} b_{\mu-r, t}$ converge assolutamente. In forza del Lemma esistono i $\mu+1$ limiti

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{\nu} s'_{rt} b_{\mu-r, \nu-t}, \quad r=0, 1, 2, \dots, \mu,$$

e quindi esiste pure il limite

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s''_{\mu\nu}.$$

Ma ciò vale per ogni $\mu=0, 1, 2, \dots$. La serie (3) converge dunque per righe. Analogamente si dimostra che la (3) converge per colonne.