

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

LÁSZLÓ FEJES

**Über einige Extremaleigenschaften der regulären Polyeder  
und des gleichseitigen Dreiecksgitters**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 13,  
n° 1-4 (1948), p. 51-58

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1948\\_2\\_13\\_1-4\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_13_1-4_51_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

ÜBER EINIGE EXTREMALEIGENSCHAFTEN  
DER REGULÄREN POLYEDER  
UND DES GLEICHSEITIGEN DREIECKSGITTERS

von LÁSZLÓ FEJES (Koložsvár).

1. - Betrachten wir auf einer Kugelfläche dasjenige Punktsystem aus  $n$  Punkten, in dem jeder Punkt möglichst weit von den anderen absteht. Es lässt sich zeigen <sup>(1)</sup>, dass für  $n=4, 6$  und  $12$  die kleinste konvexe Hülle dieses Systems das reguläre Tetraeder, Oktaeder bzw. Ikosaeder ist <sup>(2)</sup>. Für grosse Werte von  $n$  ist die obige Extremalaufgabe mit dem Problem der dichtesten ebenen Kreislagerung gleichwertig. Wie bekannt gehören die Kreismittelpunkte der dichtesten ebenen Kreislagerung einem gleichseitigen Dreiecksgitter an. Unsere Extremalaufgabe führt daher ausser den regulären Dreieckspolyedern zum gleichseitigen Dreiecksgitter.

Bequemerer Sprachweise halber bezeichnen wir das gleichseitige Dreiecksgitter als das uneigentliche reguläre Dreieckspolyeder. Um diesen Begriff der Anschauung näher zu bringen betrachten wir ein Polyeder mit grosser Eckenzahl das einer grossen Kugel einbeschrieben ist und deren Flächen angenähert gleichseitige Dreiecke sind. Das uneigentliche reguläre Dreieckspolyeder lässt sich als Grenzfall eines derartigen Polyeders auffassen.

Wir sprechen daher im Folgenden von vier regulären Dreieckspolyedern, die je 3-, 4-, 5- und 6-kantige Ecken besitzen. Gleichzeitig betrachten wir die dualen Gebilde, d. h. die vier regulären Dreikantspolyeder mit je 3-, 4-, 5- und 6-eckigen Flächen.

In diesem Aufsatz betrachten wir einige weitere Extremalaufgaben für Polyeder, die zu den regulären Dreiecks-, bzw. Dreikantspolyedern führen.

2. - Das in 1. ausgesprochene Ergebniss lässt sich im folgenden allgemeineren Satz zusammenfassen <sup>(3)</sup>. Es lässt sich von  $n$  ( $\geq 3$ ) Punkten, die auf der

---

<sup>(1)</sup> FEJES L.: *Die regulären Polyeder, als Lösungen von Extremalaufgaben.* (Ungarisch mit deutschem Auszug) Mat. és. Term.-tud. Értesítő 61 (1942) 471-478.

<sup>(2)</sup> Das reguläre Hexaeder und Dodekaeder erweist sich dagegen nicht als Lösung der gestellten Extremalaufgabe.

<sup>(3)</sup> FEJES L.: *Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems.* Jahresbericht der D. M. V. 53 (1943) 66-68.

Oberfläche einer Einheitskugel liegen, ein Punktpaar mit dem Abstand

$$d_n \leq \left( 3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}}$$

herausgreifen.

Diese Ungleichung ist für  $n=4, 6$  und  $12$  genau und ergibt für grosse Werte von  $n$  die genaue asymptotische Abschätzung. Dasselbe gilt auch für sämtliche hier folgenden Abschätzungen. Um dieselbe deutlicher fassen zu können schicken wir zunächst eine Bemerkung voraus.

Im folgenden fassen wir jedes Polyeder mit vorgegebener Eckenzahl als Grenzfall eines Dreieckspolyeders, und jedes Polyeder mit vorgegebener Flächenzahl als Grenzfall eines Dreikantspolyeders auf und zählen die Flächen, bzw. die Ecken der Multiplizität nach. In diesem Sinn besitzt ein Polyeder mit  $n$  Ecken genau  $2n-4$  Flächen, und ein Polyeder mit  $n$  Flächen genau  $2n-4$  Ecken. Nach dieser Bemerkung beweisen wir den

SATZ 1. - *Betrachten wir ein Polyeder mit  $n$  Ecken, das einer Einheitskugel vom Mittelpunkt  $O$  einbeschrieben ist und das  $O$  enthält; dann gilt für den harmonischen Mittel der Flächenabstände  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{2n-4}$  des Polyeders von  $O$ :*

$$\frac{1}{\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \dots + \frac{1}{\varrho_{2n-4}}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}.$$

Bezeichnen wir die Polyederecken mit  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , den Abstand der Fläche  $C_i C_j C_k$  von  $O$  mit  $\varrho_{ijk}$  und schliesslich den Inhalt des sphärischen Dreiecks  $C_i C_j C_k$  mit  $t_{ijk}$ . Wir machen von der Tatsache Gebrauch, dass unter den sphärischen Dreiecken, die einem Kreis einbeschrieben sind, das gleichseitige Dreieck den grösstmöglichen Flächeninhalt besitzt. Dies bedeutet nämlich - wie eine einfache Rechnung zeigt - dass

$$\frac{1}{\varrho_{ijk}} \geq \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{t_{ijk} + \pi}{6}$$

ausfällt. Nun ist aber  $\sum t_{ijk} = 4\pi$ , wobei die Summation auf sämtliche  $2n-4$  Indextripel  $ijk$  zu erstrecken ist für die  $\Delta C_i C_j C_k$  eine Polyederfläche ist. Da ferner  $\operatorname{tg} \frac{t + \pi}{6}$  für  $0 \leq t < 2\pi$  eine von unten konvexe Funktion von  $t$  ist, so können wir die Jensensche Ungleichung (4) anwenden:

$$\sum \frac{1}{\varrho_{ijk}} \geq \sqrt{3} \sum \operatorname{tg} \frac{t_{ijk} + \pi}{6} \geq \sqrt{3} (2n-4) \operatorname{tg} \frac{\frac{4\pi}{2n-4} + \pi}{6},$$

w. z. b. w.

(4) JENSEN J. L. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta math. 30 (1906) 175-193.

3. - Der soeben bewiesene Satz ist gleichwertig mit dem dualen

SATZ 2. - Ist ein  $n$ -Flach einer Einheitskugel vom Mittelpunkt  $O$  umschrieben, so gilt für die Eckenabstände  $P_1, P_2, \dots, P_{2n-4}$  des  $n$ -Flachs von  $O$

$$\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{2n-4}}{2n-4} \geq \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}.$$

Aus diesen Sätzen folgt als

KOROLLARIUM. - Enthält ein konvexes Polyeder mit  $n$  Ecken, oder ein konvexes Polyeder mit  $n$  Flächen eine Kugel vom Halbmesser  $r_n$  und liegt innerhalb einer konzentrischen Kugel vom Halbmesser  $R_n$ , so ist

$$\frac{R_n}{r_n} \geq \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}.$$

Erinnern wir an eine in der Literatur gebräuchliche Abweichungsdefinition<sup>(5)</sup> von zwei konvexen Körpern  $G$  und  $H$ :  $\eta(G, H)$  heisse Abweichung zwischen  $G$  und  $H$ , wenn sie die kleinste positive Zahl ist mit der Eigenschaft, dass die Umgebung vom Halbmesser  $\eta$  eines beliebigen Punktes von  $G$  einen Punkt von  $H$  enthält und umgekehrt in der Umgebung vom Halbmesser  $\eta$  eines beliebigen Punktes von  $H$  wenigstens ein Punkt von  $G$  liegt. Mit Hilfe dieses Begriffes lässt sich unser Korollarium folgendermassen aussprechen:

Es bedeute  $K$  eine Einheitskugel,  $P_n$  bzw.  $T_n$  je ein beliebiges konvexes Polyeder mit  $n$  Ecken, bzw.  $n$  Flächen. Dann gilt

$$\eta(K, P_n) \geq \frac{\sin \frac{2}{n-2} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{n-4}{n-2} \frac{\pi}{6}}, \quad \eta(K, T_n) \geq \frac{\sin \frac{2}{n-2} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{n-4}{n-2} \frac{\pi}{6}}.$$

Dies bedeutet, dass die regulären Dreiecks-, bzw. Dreikantspolyeder die Eigenschaft besitzen, dass sie unter sämtlichen Polyedern von ihrer Ecken-, bzw. Flächenzahl am besten eine vorgegebene Kugel approximieren.

Wir wollen aus dem obigen Korollarium noch eine weitere Folgerung ziehen: Wird die Oberfläche einer Einheitskugel von  $n$  gleichgrossen Kugelkalotten vom Flächeninhalt  $s_n$  bedeckt, so ist

$$s_n \geq 2\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \right).$$

Diese Abschätzung ergibt für grosse Werte von  $n$  den Kershnerschen Satz<sup>(6)</sup> über die genaue asymptotische Abschätzung der Mindestzahl der Einheits-

<sup>(5)</sup> BONNESEN - FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper*. Berlin 1934, S. 34.

<sup>(6)</sup> KERSHNER R.: *The number of circles covering a set*. Amer. J. Math. 61 (1939) 665-671.

kreise, die eine genügend grosse ebene Figur vorgegebener Gestalt überdecken (<sup>7</sup>).

Im Anschluss an diese Bemerkung wollen wir noch daran hinweisen, dass unser Korollarium sich aus dem Beweisgang des Satzes 1 auch ohne die Heranziehung der Jensenschen Ungleichung unmittelbar herleiten lässt. Beschränkt man sich ferner lediglich für grosse Werte von  $n$ , so genügt es statt der erwähnten Extremaleigenschaft des gleichseitigen sphärischen Dreiecks nur die völlig elementare Tatsache in Betracht zu ziehen, dass unter den einem Kreis einbeschriebenen Dreiecken das reguläre Dreieck den grössten Inhalt besitzt. Dadurch erhalten wir einen überaus einfachen Beweis der Kershnerschen Abschätzung.

4. - Wir beweisen hier den

SATZ 3. - *Für den Inhalt  $V_n$  eines Polyeders mit  $n$  Ecken, das einer Einheitskugel einbeschrieben ist, gilt*

$$V_n \leq \frac{n-2}{6} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \left( 3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \right).$$

Es bedeute  $v_{ijk}$  -mit Behaltung der obigen Bezeichnungen- den Inhalt des Tetraeders  $OC_i C_j C_k$ ; dann gilt  $V_n = \sum v_{ijk}$ . Wir zeigen, dass  $v_{ijk}$  bei festem  $t_{ijk}$  sein Maximum in demjenigen Fall erreicht in dem  $\triangle C_i C_j C_k$  gleichseitig ist.

$v_{ijk}$  besitzt offenkundig ein Maximum. Es genügt daher zu zeigen, dass  $v_{ijk}$  nur dann sein Maximum erreichen kann falls  $\triangle C_i C_j C_k$  gleichseitig ist. Betrachten wir um dies einzusehen z. B. die  $C_k$  enthaltende Halbkugel mit der Grundfläche  $OC_i C_j$ . Bezeichnen wir die den Punkten  $C_i$  und  $C_j$  diametral gegenüberliegenden Punkte mit  $C'_i, C'_j$  und bewegen  $C_k$  auf den um  $C'_i C'_j C_k$  geschlagenen Lexellschen Kreis, so bleibt  $t_{ijk}$  unverändert. Dabei erreicht aber  $v_{ijk}$  sein Maximum im Falle  $\overline{C_i C_k} = \overline{C_k C_j}$ , denn die von  $C_k$  gefällte Höhe des Tetraeders  $OC_i C_j C_k$  in allem anderen Fall kleiner ist.

Aus der soeben bewiesenen Maximaleigenschaft ergibt sich mit Hilfe einer einfachen Rechnung

$$v_{ijk} \leq \frac{1}{12} \operatorname{ctg} \frac{t_{ijk} + \pi}{6} \left( 3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{t_{ijk} + \pi}{6} \right).$$

Wir können uns durch Differentiation leicht überzeugen, dass die rechtstehende Funktion von  $t_{ijk}$  -die kurz mit  $v(t_{ijk})$  bezeichnet werden soll- für  $0 \leq t_{ijk} < 2\pi$  von unten konkav ist. Der Jensensche Satz ergibt daher

$$\sum v_{ijk} \leq \sum v(t_{ijk}) \leq (2n-4) v\left(\frac{4\pi}{2n-4}\right),$$

w. z. b. w.

(<sup>7</sup>) Die zuletzt ausgesprochene Abschätzung habe ich bereits früher auf einem direkteren Weg bewiesen in meinem Aufsatz: *Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten*. (Ungarisch mit deutschem Auszug.) Mat. és. Fiz. Lapok 50 (1943), 40-46.

5. - Der duale des soeben bewiesenen Satzes lautet :

SATZ 4. - Der Inhalt eines einer Einheitskugel umbeschriebenen  $n$ -Flachs ist

$$J_n \geq (n-2) \sin \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{3} \left( 3 \operatorname{tg}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} - 1 \right).$$

Bezeichnen wir zum Beweis die Inhalte der Polyederflächen mit  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , die Inhalte der Projektionen dieser Flächen vom Kugelmittelpunkt  $O$  auf die Kugel mit  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Wir behaupten, dass falls die Fläche vom Index  $k$   $\nu_k$  Ecken hat

$$t_k \geq \frac{\nu_k}{2} \sin \frac{2\pi}{\nu_k} \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\nu_k} \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi - p_k}{2\nu_k} - 1 \right)$$

ausfällt.

Diese Ungleichung ist mit der Tatsache gleichwertig, dass eine Fläche  $t$  vom festen Inhalt und Eckenzahl dann die grösstmögliche Projektion  $p$  besitzt, falls  $t$  ein mit dem Berührungspunkt  $B$  konzentrisches reguläres Vieleck ist. Bezeichnen wir um dies in Evidenz zu setzen die Seiten von  $t$  mit  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ , ihre Mittelpunkte bzw. ihre Abstände von  $B$  mit  $M_1, M_2, \dots, M_\nu$  bzw.  $q_1, q_2, \dots, q_\nu$ . Für das mit  $B$  konzentrisches reguläres Vieleck gilt  $a_i \perp BM_i, q_i = q_{i+1}$  ( $i=1, 2, \dots, \nu; q_{\nu+1} = q_1$ ). Es genügt zu zeigen, dass wenn eine dieser Beziehungen nicht besteht  $p$  sich vergrössern lässt.

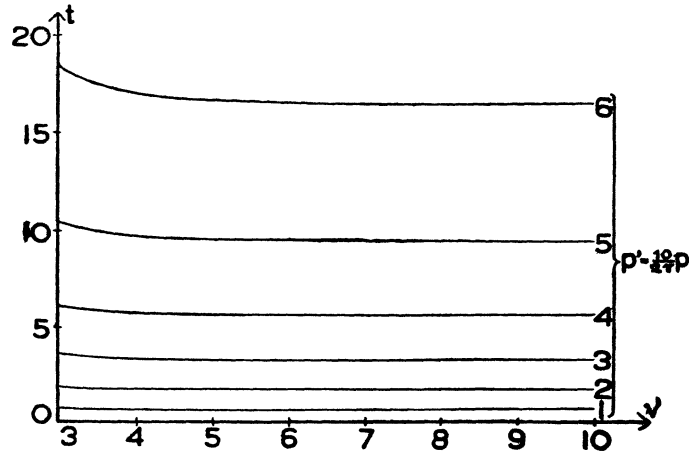
Setzen wir z. B. voraus, dass  $BM_1$  nicht senkrecht auf  $a_1$  ist. Werfen wir  $a_1$  einer infinitesimalen Drehung um  $M_1$  unter, so bleibt der Flächeninhalt  $t$  unverändert. Da aber die Projektion  $M_1'$  von  $M_1$  kein Mittelpunkt der Projektion  $a_1'$  von  $a_1$  ist so verändert sich  $p$  durch diese Drehung. Bei einem geeigneten Drehungssinn nimmt daher  $p$  zu.

Nehmen wir nun an, dass  $a_1 \perp BM_1$  und  $a_2 \perp BM_2$ , aber z. B.  $q_1 < q_2$  ist. Werfen wir  $a_1$  und  $a_2$  je einer infinitesimalen Parallelverschiebung unter so, dass für die einzelnen Inhaltsveränderungen  $\Delta_1 t$  und  $\Delta_2 t$  von  $t$ :  $\Delta_1 t + \Delta_2 t = \Delta t = 0$  sei, so gilt für die entsprechenden Projektionen:  $|\Delta_1 p| > |\Delta_2 p|$ . Die Trapeze  $\Delta_1 t$  und  $\Delta_2 t$  lassen sich nämlich so in elementare Teile zerlegen, dass jedem Teil von  $\Delta_1 t$  ein flächengleicher Teil in  $\Delta_2 t$  entspricht, der aber wegen der Annahme  $q_1 < q_2$  weiter von  $B$  liegt. Wehlt man nun  $\Delta_1 t > 0$ , so ist  $\Delta p = \Delta_1 p + \Delta_2 p > 0$ , womit unsere Ungleichung bewiesen ist.

Wir haben jetzt die Funktion  $t(\nu, p) = \frac{\nu}{2} \sin \frac{2\pi}{\nu} \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\nu} \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi - p}{2\nu} - 1 \right)$  für  $3 \leq \nu, 0 \leq p < 2\pi$  zu studieren. Bemerken wir zunächst, dass  $t(\nu, p)$  für ein festes  $\nu$  eine von unten konvexe Funktion von  $p$  ist. Umgekehrt lässt es sich zeigen, dass sie für ein festes  $p$  eine von unten konvexe Funktion von  $\nu$  ist. Wir behaupten, dass sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Achsen  $\nu, p, t$  eine von unten -d. h. von der Ebene  $\nu p$ - konvexe Fläche darstellt.

Begnügen wir uns hier um langwierige Rechnungen zu vermeiden mit der Darstellung einiger Schnittkurven der Fläche mit aequidistanten Ebenen  $p = \text{Konst}$ . Die Konvexität der Fläche kommt dadurch zum Ausdruck, dass der Mittelpunkt

einer beliebigen Strecke, die je einen Punkt der zum Parameterwert  $p=p_1$  und  $p=p_2$  gehörigen Kurven der Kurvenschar  $t(\nu, p)$  verbindet oberhalb der zu  $p = \frac{p_1+p_2}{2}$  gehörigen Kurve liegt. Diese Eigenschaft der Kurvenschar lässt sich aus der beigelegten Figur festsetzen.



Bedenken wir noch, dass  $\sum_{k=1}^n \nu_k = 6(n-2)$  und  $\sum_{k=1}^n p_k = 4\pi$  ist, so können wir die Jensensche Ungleichung über konvexe Funktionen mehrerer Veränderlichen anwenden :

$$J_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n t_k \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n t(\nu_k, p_k) \geq \frac{n}{3} t\left(\frac{6n-12}{n}, \frac{4\pi}{n}\right),$$

womit der Satz 4. bewiesen ist.

In diesem Beweis haben wir uns teilweise auf die Anschauung gestützt. Es fehlt der exakte Beweis der Konvexität von  $t(\nu, p)$ . Eins kann aber jedenfalls festgesetzt werden : unsere Überlegungen zeigen ganz streng, dass die regulären Dreikantspolyeder unter den einer Kugel umschriebenen isomorphen Polyedern den kleinstmöglichen Inhalt haben. Um dies einzusehen genügt es nämlich nur die Konvexität von  $t(\nu, p)$  in  $p$  -d. h. für ein festes  $\nu$ - in Betracht zu ziehen. Da ferner  $t(\nu, p)$  für ein festes  $p$  mit wachsendem  $\nu$  monoton abnimmt, so können wir noch mehr behaupten : das reguläre Dodekaeder hat z. B. unter sämtlichen umschriebenen Zwölfflächen, die höchstens fünfeckige Flächen besitzen den kleinstmöglichen Inhalt <sup>(8)</sup>.

<sup>(8)</sup> In meinem Aufsatz : *Über die dichteste Kugellagerung* [Math. Zeitschrift 48 (1942-1943) 676-684] habe ich die Minimaleigenschaft des regulären Dodekaeders mit der Annahme nachgewiesen, dass die Berührungspunkte mit der Einheitskugel der zum Vergleich zugelassenen umschriebenen Zwölfflächen von einander einen Abstand  $\geq 1$  besitzen.

6. - Zum Schluss wollen wir aus unserem letzten Ergebnis eine besonders bemerkenswerte Folgerung bezüglich der isepiphanen Probleme für Polyeder ziehn.

Die räumlichen Analoga der isoperimetrischen Probleme, die sogenannten isepiphanen Aufgaben, können so formuliert werden: Es sind diejenigen Körper eines vorgelegten Systems zu ermitteln, für welche der Quotient  $\frac{V^2}{F^3}$  ein Maximum wird, wobei  $V$  das Volumen,  $F$  die Oberfläche des Körpers bezeichnet. Bezüglich dieses Problems schreibt E. STEINITZ <sup>(9)</sup>: « Während das isoperimetrische Problem bei Polygonen... erledigt ist, gestalten sich die entsprechenden Aufgaben im Raume mannigfaltiger und begegnen grossen Schwierigkeiten. Die Untersuchungen sind auch über die ersten Anfänge noch nicht hinausgekommen ».

Es bieten sich verschiedene Aufgaben dar, je nachdem 1. Polyeder von gegebener Flächenzahl, 2. Polyeder von gegebener Eckenzahl und 3. zu demselben Eulerschen Polyedertypus gehörige -kurz isomorphe- Polyeder zum Vergleich zugelassen werden. Bezüglich der dritten Frage zitieren wir die Steinersche Vermutung: die fünf regulären Polyeder wahren unter allen Polyedern von je ihrem Typus die Extremalen. Dies stand bisher nur für Tetraeder und Oktaeder fest.

Wir bemerken nun, dass *unser Ergebnis in 5. die Steinersche Vermutung auch für Würfel und Dodekaeder bestätigt*. Der Satz 4. bringt sogar das isepiphane Problem für Polyeder von gegebener Flächenzahl in gewissem Sinne zum Abschluss, denn dieses Problem erweist sich mit der Bestimmung des einer festen Kugel umbeschriebenen  $n$ -Flachs von minimalem Inhalt gleichwertig. *Die regulären Dreikantpolyeder sind daher nicht nur unter den isomorphen Polyedern, sondern unter sämtlichen konvexen Polyedern von der Flächenzahl 4, 6 bzw. 12 die bestmöglichen.*

Das isepiphane Problem für Polyeder von vorgegebener Flächenzahl besitzt nämlich stets eine Lösung und das extremale Polyeder ist der bekannten Lindelöfschen Bedingung <sup>(10)</sup> -einer Kugel umbeschrieben zu sein- Unterworfen. Wir können uns daher auf  $n$ -Flachen beschränken, die etwa der Einheitskugel umbeschrieben sind. Für solche Polyeder ist aber der Inhalt der Oberfläche proportional, woraus folgt, dass der Ausdruck  $\frac{V^2}{F^3}$  mit abnehmendem Inhalt zunimmt. Das isepiphane Problem für  $n$ -Flache reduziert sich daher zur Bestimmung des der Einheitskugel umbeschriebenen  $n$ -Flachs von minimalem Inhalt.

Wie es um die Polyeder mit gegebener Eckenzahl steht, ist noch nicht geklärt. Es ist aber überaus wahrscheinlich, dass die regulären Dreieckspolyeder die Lösungen für die entsprechenden Eckenzahlen darbieten.

---

<sup>(9)</sup> Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern. Journal f. reine u. angewandte Mathematik, 158 (1927), 120-153; 159 (1928), 133-143.

<sup>(10)</sup> Petersburg Bullet. de l'Ac. Imp. d. Sc., 14 (1870), 257.



Dass der Würfel und der Dodekaeder hierbei nicht als Lösungen in Betracht kommen, legt Steinitz durch die einfache Tatsache klar, dass der Oktaeder besser ist als der Würfel, und der Ikosaeder besser als der Dodekaeder. Wir wollen hier den tieferen Grund dieses Sachverhalts erforschen, indem wir zeigen, dass *unter den konvexen Polyedern mit vorgegebener Eckenzahl die extremalen Vielfläche notwendigerweise Dreieckspolyeder sind.*

Greifen wir um dies einzusehen eine beliebige Ecke  $E$  des als extremal vorausgesetzten Polyeders heraus und bewegen es so, dass erstens der Inhalt, zweitens die Oberfläche der kleinsten konvexen Hülle  $\mathfrak{H}$  von  $E$  und der Übrigen Ecken des Polyeders konstant bleiben. Im ersten Fall durchläuft  $E$  den Rand eines konvexen Polyeders  $\mathfrak{P}$ , im zweiten Fall dagegen den Rand eines singularitätenfreien Eikörpers  $\mathfrak{E}$  <sup>(1)</sup>, der im Falle eines Extremalen Polyeders offenkundig keinen Punkt ausserhalb  $\mathfrak{P}$  haben kann. Währe nun  $E$  die Ecke einer mehr als dreiseitigen Fläche des ursprünglichen Polyeders, so liege  $E$  -wie eine einfache Überlegung zeigt- auf einer Kante von  $\mathfrak{P}$ . Mithin könnte  $\mathfrak{P}$  nicht die singularitätenfreie Fläche  $\mathfrak{E}$  enthalten.

Wir können für das extremale Polyeder eine weitere notwendige Bedingung angeben. Bezeichnen wir die mit  $E$  benachbarten Ecken des extremalen Polyeders in zyklischer Reihenfolge mit  $E_1, E_2, \dots, E_\nu$ . Wir errichten in  $E$  die auf die Dreiecksflächen  $EE_i E_{i+1}$  senkrechte, nach aussen gerichtete Vektore  $\mathfrak{V}_i$  ( $i=1, 2, \dots, \nu$ ;  $E_{\nu+1} \equiv E_1$ ), deren Betrag dem Inhalt des betreffenden Dreiecks gleich ist, sowie die auf  $E_i E_{i+1}$  in der Ebene  $EE_i E_{i+1}$  senkrechten Vektoren  $\mathfrak{f}_i$  je vom Betrag  $\overline{E_i E_{i+1}}$ . Setzen wir  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \dots + \mathfrak{V}_\nu$ ,  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \dots + \mathfrak{f}_\nu$ , und bezeichnen das innere Produkt von zwei Vektoren  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  mit  $(\mathfrak{x} \mathfrak{y})$ , so ist die Inhaltsveränderung  $\Delta V$ , bzw. Oberflächenveränderung  $\Delta F$  des Polyeders bei einer infinitesimalen Verschiebung von  $E$  mit dem Verschiebungsvektor  $\Delta \mathfrak{V}$ :  $\Delta V = \frac{1}{3} (\mathfrak{V} \Delta \mathfrak{V})$ ,  $\Delta F = -\frac{1}{2} (\mathfrak{f} \Delta \mathfrak{V})$ . Bei einem extremalen Polyeder muss aber für ein beliebiges  $\Delta \mathfrak{V}$   $\frac{(V + \Delta V)^2}{(F + \Delta F)^3} = \frac{V^2}{F^3}$  d. h.  $2F \Delta V = 3V \Delta F$  sein. Mann schliesst daraus, dass die Vektoren  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{f}$  entgegengesetzte Richtung besitzen und  $4F \mathfrak{V} = 9V \mathfrak{f}$  ist. Die  $2\nu$  Vektoren  $4F \mathfrak{V}_i$ ,  $9V \mathfrak{f}_i$  ( $i=1, 2, \dots, \nu$ ) sind daher im Gleichgewicht. Dies muss für jede Ecke des extremalen Polyeders zutreffen.

Wie ich es während der Korrektur bemerkt habe, wurde der Satz 4. auf einer zum obigen ähnlicher Weise schon vorher von M. GOLDBERG [*The isoperimetric problem for polyhedra*, Tôhoku Math. J. 40 (1935) 226-236], gefunden worden. Neulich gelang es mir den genannten Satz exakt zu beweisen worauf wir in einem anderen Aufsatz zurückkehren wollen.

<sup>(1)</sup> Vergleiche meine Aufsätze: *Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern*. Tôhoku math. journal 46 (1939), 79-83. *Über einen extremalen Polyeder*. (Ungarisch mit deutschem Auszug) Mat. és. Term.-tud. Értesítő, 59 (1940), 476-479.