

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

DARIO DEL PASQUA

**Risoluzione, con sole integrazioni, dell'equazione differenziale di tipo parabolico, con i dati di Cauchy su una curva assegnata**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 2, n° 1-4 (1950), p. 55-61*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_3\\_2\\_1-4\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_55_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**RISOLUZIONE, CON SOLE INTEGRAZIONI,  
DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI TIPO  
PARABOLICO, CON I DATI DI CAUCHY SU UNA  
CURVA ASSEGNATA.**

di DARIO DEL PASQUA (Roma)

MI propongo di determinare, con sole integrazioni, la soluzione dell'equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico (lineare, omogenea, a coefficienti costanti):

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

quando le condizioni iniziali siano date su una curva  $\Gamma$  di equazione:

$$(2) \quad x = \psi(y), \quad [y = \bar{\psi}(x)]$$

e precisamente siano:

$$(3) \quad \begin{cases} z(\psi(y), y) = \varphi_0(y), \\ \frac{\partial z}{\partial x}(\psi(y), y) = \varphi_1(y). \end{cases}$$

Faccio uso del metodo del calcolo degli operatori funzionali del Prof. L. FANTAPPIÈ, da lui esposto quest'anno nel suo corso all'Istituto Nazionale di Alta Matematica e già applicato a risolvere la (1) e altre equazioni con i dati di Cauchy su una retta parallela all'asse  $y$ .<sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup> L. FANTAPPIÈ: a) *Soluzione con quadrature del problema di CAUCHY-KOWALEWSKI per le equazioni di tipo parabolico* (Rend Acc Naz Lincei, vol. XVII, 1<sup>o</sup> sem. 1933, p. 897); b) *Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale, a coefficienti costanti* (Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. XVIII, 2<sup>o</sup> sem. 1933, p. 266); c) *Intégration par quadratures de l'équation parabolique générale, à coefficients constants sur les caractéristiques* (C. R. Ac. de France, t. 197, 1933, p. 969).

La curva  $I$  sia analitica regolare nel campo che ci interessa, e inoltre sia incontrata in un sol punto da ogni parallela all'asse  $x$ . Le funzioni  $\varphi_0(y)$ ,  $\varphi_1(y)$  e  $\psi(y)$  siano analitiche in un certo campo  $|y - y_0| < \varrho$ .

Introduciamo l'operatore :

$$If(x, y) = \int_{\psi(y)}^x f(t, y) dt.$$

In generale questo non è permutabile con l'operatore  $\frac{\hat{c}}{\partial y}$ , poichè si ha:

$$\frac{\hat{c}}{\partial y} If = I \frac{\hat{c}f}{\partial y} - \psi'(y) f(\psi(y), y).$$

Escludendo che sia  $\psi'(y) = 0$  identicamente, e cioè che  $I$  sia una retta  $x = \text{cost.}$  (caso già studiato nei lavori citati di L. FANTAPPIÉ), per la permutabilità occorre che sia  $f(\psi(y), y) = 0$ . Ciò però non si verifica in generale per la funzione  $z(x, y)$  che dovrà risolvere la (1), a causa della prima delle (3). Effettuiamo allora la sostituzione:

$$(1) \quad z_1(x, y) = Iz(x, y) = \int_{\psi(y)}^x z(t, y) dt,$$

dalla quale si ha :

$$(5) \quad z(x, y) = \frac{\hat{c}}{\partial x} z_1(x, y).$$

Con tale sostituzione la (1) diviene :

$$(6) \quad \frac{\partial^3 z_1}{\partial x^3} - a \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = 0,$$

e le condizioni cui deve soddisfare  $z_1(x, y)$  sono :

$$(7) \quad \begin{cases} z_1(\psi(y), y) = 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} \Big|_{(\psi(y), y)} = \varphi_0(y) \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \Big|_{(\psi(y), y)} = \varphi_1(y) \end{cases}$$

L'operatore  $I$  applicato a  $z_1(x, y)$  è ora permutabile con l'operatore  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Appliciamolo alla (6). Siccome, tenendo conto delle (7), si ha :

$$I \frac{\partial^3 z_1}{\partial x^3} = \left[ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right]_{\psi(y)}^x = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \varphi_1(y),$$

$$(8) \quad I \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \left[ \frac{\partial z_1}{\partial y} \right]_{\psi(y)}^x = \left[ \int_{\psi(y)}^x \frac{\partial z}{\partial y} dt - z(\psi(y), y) \psi'(y) \right]_{\psi(y)}^x = \frac{\partial z_1}{\partial y} + \varphi_0(y) \psi'(y),$$

la (6) diviene :

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - a \frac{\partial z_1}{\partial y} = \varphi_1(y) + a \varphi_0(y) \psi'(y).$$

Applicando ancora  $I$ , si ottiene :

$$(10) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} = I \varphi_1(y) + a I \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y).$$

Consideriamo ora l'equazione che si ottiene da questa sostituendo formalmente un parametro  $\lambda$  all'operatore  $I$  :

$$(11) \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - a \lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \lambda \varphi_1(y) + a \lambda \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y),$$

con la condizione :

$$(12) \quad \bar{z}(\psi(y), y, \lambda) = 0.$$

La soluzione di questa equazione è l'integrale del secondo membro lungo la retta uscente da  $P(x, y)$  con coefficiente angolare  $-a\lambda$ , fra i punti  $Q$  (intersezione della retta con la curva  $\Gamma$ ) e  $P$ . Occorre perciò determinare l'ascissa  $\xi$  di  $Q$ . La retta lungo cui dobbiamo integrare ha equazione :

$$\eta - y = -a\lambda(\xi - x),$$

con  $\xi$  e  $\eta$  coordinate correnti. Formando sistema con l'equazione di  $\Gamma$  :

$$\eta = \bar{\psi}(\xi),$$

si ottiene l'equazione :

$$(13) \quad \bar{\psi}(\xi) - y = -a\lambda\xi + a\lambda x.$$

e risolvendo in  $\xi$ :

$$\xi = \xi(x, y, \lambda).$$

Riguardo a questa funzione  $\xi(x, y, \lambda)$  sono da notare le due seguenti proprietà:

1) per  $\lambda = 0$  risulta:

$$\xi_{\lambda=0} = \psi(y),$$

perchè la retta  $PQ$  è parallela all'asse  $x$ ;

2) per  $x = \psi(y)$  è:

$$\xi_{x=\psi(y)} = \psi(y),$$

perchè il punto  $P$  si trova su  $\Gamma$  e quindi  $Q$  coincide con esso.

La soluzione della (11) soddisfacente la (12) è data da:

$$(14) \quad \bar{z}(x, y, \lambda) = \int_{\xi(x, y, \lambda)}^x \lambda \varphi_1(y + a\lambda(x-t)) dt + \int_{\xi(x, y, \lambda)}^x \{a\lambda \psi'(y + a\lambda(x-t)) + 1\} \varphi_0(y + a\lambda(x-t)) dt.$$

Siccome nella equazione (11) il parametro  $\lambda$  compare analiticamente, la  $\bar{z}(x, y, \lambda)$  risulta funzione analitica di  $\lambda$  almeno in un intorno conveniente di  $\lambda = 0$ , e come tale ammette uno sviluppo in serie di potenze:

$$(14') \quad \bar{z}(x, y, \lambda) = \sum_0^{\infty} \lambda^n \bar{z}_n(x, y)$$

convergente uniformemente in un cerchio di centro  $\lambda = 0$ .

Sostituendo a  $\lambda$  l'operatore  $I$ , otteniamo ancora una serie totalmente convergente, che rappresenta una funzione  $z_1(x, y)$ :

$$(15) \quad z_1(x, y) = \{\bar{z}(x, y, \lambda)\}_{\lambda=I} = \sum_0^{\infty} I^n \bar{z}_n(x, y).$$

Proviamo che questa funzione soddisfa l'equazione (10).

Intanto si ha:

$$(16) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}_0(x, y)}{\partial x} + \sum_1^{\infty} I^{n-1} \bar{z}_n(x, y).$$

Siccome poi la  $\bar{z}(x, y, \lambda)$  soddisfa la (12), e perciò per  $x = \psi(y)$  sono nulli tutti i coefficienti dello sviluppo (14'), gli operatori  $I$  e  $\frac{\partial}{\partial x}$  applicati

ai coefficienti  $\bar{z}_n(x, y)$  sono permutabili, e quindi :

$$\left\{ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right\}_{\lambda=I} = \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial x} + \left\{ \sum_1^{\infty} \lambda^n \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x} \right\}_{\lambda=I} = \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial x} + \sum_1^{\infty} I^{n-1} \bar{z}_n,$$

• confrontando con la (16) ricaviamo :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right\}_{\lambda=y}.$$

Similmente, data la permutabilità, nel nostro caso, di  $I$  con  $\frac{\partial}{\partial y}$ , abbiamo:

$$I \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left\{ \lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right\}_{\lambda=I}.$$

Sottraendo membro a membro quest'ultima relazione moltiplicata per  $a$  dalla precedente, si ha :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right\}_{\lambda=I} - a \left\{ \lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right\}_{\lambda=I} = \left\{ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - a \lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right\}_{\lambda=I},$$

ed anche, poichè  $\bar{z}(x, y, \lambda)$  soddisfa la (11) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \{ \lambda \varphi_1(y) + a \lambda \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y) \}_{\lambda=I} = \\ &= I \varphi_1(y) + a I \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y), \end{aligned}$$

cioè: la funzione  $z_1(x, y)$  definita dalla (15) è soluzione dell'equazione (10).

È poi evidente che soddisfa alla condizione di annullarsi su  $\Gamma$ , poichè per  $\bar{z}(x, y, \lambda)$  vale la (12).

Derivando membro a membro la (10) rispetto a  $x$ , si ottiene la (9), che così risulta verificata dalla funzione  $z_1(x, y)$ ; e infine, derivando ancora rispetto a  $x$ , risulta soddisfatta anche la (6), la quale non è altro che la (1), quando vi si ponga  $z(x, y) = \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x}$ .

Riguardo alle condizioni (7), abbiamo già verificato la prima. La verifica della seconda si fa direttamente sulla (10), ed è immediata, poichè per  $x = \psi(y)$  si annullano tutti i termini dove compare l'operatore  $I$ , e perciò rimane :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x |_{(\psi(y), y)}} = \varphi_0(y),$$

come deve essere. La verifica della terza condizione si ottiene ponendo  $x = \psi(y)$  nella (9); dalla (8) risulta:

$$\left. \frac{\partial z_1}{\partial y} \right|_{(\psi(y), y)} = -\varphi_0(y) \psi'(y),$$

ed allora la (9) ci dà:

$$\left. \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right|_{(\psi(y), y)} = \varphi_1(y) + a \varphi_0(y) \psi'(y) - a \varphi_0(y) \psi'(y) = \varphi_1(y)$$

La espressione di  $z_1(x, y)$  si ottiene da quella di  $\bar{z}(x, y, \lambda)$  mediante la formula (2):

$$z_1(x, y) = \{\bar{z}(x, y, \lambda)\}_{\lambda=0} = \bar{z}(x, y, 0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{\psi(y)}^x e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \bar{z}(\tau, y, \lambda) d\tau,$$

dove  $C_0$  è una curva chiusa comunque piccola del piano complesso  $\lambda$ , racchiudente all'interno il solo punto singolare  $\lambda = 0$ . Dalla (14), tenendo conto che  $\xi(x, y, 0) = \psi(y)$ , si ha:

$$z(x, y, 0) = \int_{\psi(y)}^x \varphi_0(y) dt = \varphi_0(y) |x - \psi(y)|.$$

Otteniamo allora per  $z_1(x, y)$  l'espressione:

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= \varphi_0(y) |x - \psi(y)| + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \varphi_1(y + a\lambda(\tau - t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \{a\lambda\psi'(y + a\lambda(\tau - t)) + 1\} \varphi_0(y + a\lambda(\tau - t)) dt. \end{aligned}$$

Da questa espressione infine, per la (5), ricaviamo la funzione  $z(x, y)$  che risolve il problema:

$$z(x, y) = \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} = \varphi_0(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\xi(x, y, \lambda)}^x \varphi_1(y + a\lambda(x - t)) dt +$$

(\*) Cfr. L. FANTAPPÌ, nota citata in (1), a).

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \varphi_1(y + a\lambda(\tau - t)) d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{\xi(x, y, \lambda)}^x \{a\lambda\psi'(y + a\lambda(x - t)) + 1\} \varphi_0(y + a\lambda(x - t)) dt + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \{a\lambda\psi'(y + a\lambda(\tau - t)) + 1\} \varphi_0(y + a\lambda(\tau - t)) dt.
 \end{aligned}$$

A questa espressione possiamo dare una forma più semplice calcolando i residui dei termini dove non compare l'esponenziale, e si trova:

$$\begin{aligned}
 z(x, y) = & \varphi_0(y) + \varphi_1(y) [x - \psi(y)] + \frac{1}{2} a \varphi_0'(y) [x - \psi(y)]^2 + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \varphi_1(y + a\lambda(\tau - t)) dt + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} \{a\lambda\psi'(y + a\lambda(\tau - t)) + 1\} \varphi_0(y + a\lambda(\tau - t)) dt.
 \end{aligned}$$

NOTA. — Il procedimento qui seguito può applicarsi invariato al caso dell'equazione non omogenea:

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} - a \frac{\partial z^*}{\partial y} = f(x, y),$$

( $f(x, y)$  funzione analitica in  $y$  e almeno integrabile in  $x$ ), ancora con le condizioni (2). Nei risultati compariranno anche dei termini derivanti dalla  $f(x, y)$ . Precisamente si trova che:

$$z^*(x, y) = z(x, y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\psi(y)}^x d\tau \int_{\xi(\tau, y, \lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}} f(t, y + a\lambda(\tau - t)) dt,$$

dove  $z(x, y)$  è la soluzione, sopra trovata, dell'equazione omogenea.