Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Arrigo Finzi

Sulle trasformazioni conformi del piano e su due possibili estensioni del teorema di Cauchy

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 4, nº 3-4 (1950), p. 191-203

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_191_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLE TRASFORMAZIONI CONFORMI DEL PIANO E SU DUE POSSIBILI ESTENSIONI DEL TEOREMA DI CAUCHY

di ARRIGO FINZI (Roma)

1. — Espongo, in questo breve lavoro, un semplice risultato riguardante i fondamenti della teoria delle trasformazioni conformi del piano, che mi si è, per così dire, presentato da sè nello studio, più difficile, delle condizioni per la validità del teorema di LIOUVILLE.

Consideriamo una trasformazione piana conforme, di equazioni

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y), \\ y' &= y'(x, y); \end{aligned} \tag{1}$$

supponiamo dapprima che $x'(x, y)$ e $y'(x, y)$ ammettano le derivate prime continue Gli angoli fra i vettori infinitesimi uscenti da uno stesso punto sono conservati dalla trasformazione, inoltre il rapporto fra la lunghezza di un vettore infinitesimo uscente da un punto e la lunghezza del vettore infinitesimo trasformato non dipende dalla direzione del primo vettore. Per la supposta continuità delle derivate prime le due proprietà indicate, concettualmente distinte, risultano equivalenti, come si riconosce immediatamente coi mezzi ordinari del calcolo differenziale; ciascuna di esse può servire a definire il gruppo delle trasformazioni conformi.

Si può ora notare che, per poter enunciare l'una e l'altra delle due proprietà in questione, non è necessaria la continuità delle derivate prime; basta la loro esistenza, in ogni punto e secondo ogni direzione; ci si può allora chiedere se, in queste condizioni più generali, le due proprietà definiscano ancora uno stesso gruppo di trasformazioni piane. Alla questione, come mostrerò in questo lavoro, si può rispondere affermativamente, quando si suppongano limitate le derivate prime. *A posteriori,* si riconosce del resto la continuità delle derivate.

Quando si ponga $x + iy \equiv z$ e $x' + iy' \equiv z'$ e si riguarda la (1) come una corrispondenza fra due variabili complesse, si può dare, del risultato, una diversa interpretazione. È classica l'estensione che, del teorema di

CAUCHY, ha dato il GOURSAT; se z' varia con z in modo che, per ogni valore di z appartenente a una certa regione del piano, la derivata $\frac{d z'}{d z}$ esista e sia limitata [1], allora z' è funzione analitica di z. La dimostrazione originaria di CAUCHY presupponeva, in più, la continuità della derivata.

Si riconosce agevolmente che il risultato di cui sopra permette di sostituire, all'enunciato di GOURSAT, l'uno o l'altro dei due seguenti:

Se la variabile complessa z' varia con z in modo che, per ogni valore z_1 appartenente a una certa regione del piano z e per ogni direzione spiccata da z_1, esista la derivata

$$\lim_{z \to z_1} \frac{z'(z) - z'(z_1)}{z - z_1},$$

e questa risulti limitata e in modulo (oppure invece in argomento) indipendente dalla direzione, allora z' è funzione analitica di z.

La dimostrazione del risultato sopra enunciato si fa mostrando che se l'una delle due proprietà considerate è ovunque verificata in una certa regione, l'altra è pure verificata, quando si escludano eventualmente i punti di un insieme di misura nulla. Adattando convenientemente il ragionamento dovuto a GOURSAT si perviene allora a provare che z' è funzione analitica di z; si riconosce così, *a posteriori*, che entrambe le proprietà debbono essere ovunque verificate nella regione stessa.

2. — Sia P un punto, di coordinate x, y, appartenente a un dominio D, nel quale sono definite le funzioni $x'(x, y)$ e $y'(x, y)$; sia P' il punto di coordinate x', y', trasformato di P per la (1). Riguardo alla trasformazione (1) supponiamo soltanto, in questo paragrafo e nel seguente, che le funzioni $x'(x, y)$ e $y'(x, y)$, che la definiscono, ammettano le derivate prime in ogni punto e secondo ogni direzione.

---

(1) Veramente, nell'enunciato di GOURSAT, non si formula quest'ultima ipotesi; si fa invece, implicitamente, l'altra, che, in ogni punto, la convergenza del rapporto incrementale verso il valore della derivata nel punto stesso abbia luogo *in modo uniforme* rispetto alle ∞^1 direzioni. Dal punto di vista della teoria delle funzioni di variabili complesse una tale ipotesi appare abbastanza accettabile; dal punto di vista reale (e delle trasformazioni conformi) essa appare invece più forte di quella formulata nel testo. Se poi sia possibile dimostrare l'enunciato di GOURSAT (e quello del presente lavoro) senza introdurre nessuna di queste ipotesi, è questione alla quale forse non sarebbe facile rispondere.

Consideriamo un numero *finito* di vettori infinitesimi $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ uscenti da P e i loro trasformati $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2 \ldots \vec{v}'_n$ uscenti da P'; siano poi $\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_2} \ldots \overrightarrow{PP_n}$ dei vettori di lunghezza finita, aventi la direzione e il senso di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ rispettivamente, ai quali facciamo corrispondere i vettori $\overrightarrow{P'P'_1}, \overrightarrow{P'P'_2} \ldots \overrightarrow{P'P'_n}$, definiti da P' e dai trasformati $P'_1, P'_2 \ldots P'_n$ di $P_1, P_2 \ldots P_n$. Indichiamo con $|v_1|, |v_2| \ldots |v_n|, |PP_1|, |PP_2| \ldots |PP_n|$ la lunghezza di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n, \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_2} \ldots \overrightarrow{PP_n}$ rispettivamente. L'ipotesi formulata, dell'esistenza delle derivate prime, porta che, assegnati due numeri positivi ε e η, si potrà trovare un terzo numero positivo r (funzione anche di P e di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$), tale che se

$$|PP_i| < r \qquad (i = 1, 2 \ldots n$$

allora si abbia

$$\left| \frac{\dfrac{|P'P'_i|}{|PP_i|}}{\dfrac{|v'_i|}{|v_i|}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

e l'angolo formato dal vettore infinitesimo $\vec{v}'_i$ col vettore $\overrightarrow{P'P'_i}$ risulti sempre minore di η.

Fissiamo ora invece l'attenzione sulla totalità dei vettori infinitesimi uscenti da P e indichiamo con $\vec{v}$ il vettore infinitesimo generico e con $\overrightarrow{PP_1}$ un vettore finito avente la direzione di $\vec{v}$; in generale non potremo più scegliere r in funzione di ε e di η in modo che, per

$$|PP_1| < r,$$

si abbia sempre che

$$(2) \qquad \left| \frac{\dfrac{|P'P'_1|}{|PP_1|}}{\dfrac{|v'|}{|v|}} - 1 \right| < \varepsilon$$

e che l'angolo formato dal vettore $\overrightarrow{P'P'_1}$ col vettore $\vec{v}'$ risulti minore di η. Potremo però ora scegliere $r = r(P \mid \varepsilon, \eta, \delta)$ in modo che, per $|PP_1| < r$, le due condizioni assegnate risultino soddisfatte quando si supponga che

$\vec{v}$ non appartenga a un certo insieme $E(P \mid \varepsilon, \eta, \delta)$ di vettori infinitesimi, che, proiettato da P sul cerchio unitario di centro P, dà un insieme di misura lineare non superiore a δ.

3. — Da ogni punto P del dominio D spicchiamo un vettore infinitesimo $\vec{u}_1$ avente la direzione dell'asse x e orientato nel senso delle x crescenti, e un vettore infinitesimo $\vec{v}_1$ (scelto indipendentemente da P), che appartenga al primo quadrante del piano x, y e formi con $\vec{u}_1$ un angolo minore di $\frac{\pi}{8}$. Spicchiamo poi da P il vettore $\overrightarrow{PP_i}$, avente la direzione e il senso di $\vec{u}_1$ e lunghezza

$$| PP_i | = r_i,$$

e la famiglia dei vettori $\overrightarrow{PM_i}$, aventi la direzione e il senso di $\vec{v}_1$ e lunghezza

$$| PM_i | \leq 2 r_i,$$

dove r_i è un numero positivo, che ci riserbiamo ora di determinare.

Indichiamo con ε_i e η_i due successioni di numeri positivi tendenti a zero e con μ_i una successione di numeri positivi, tali che converga la serie

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots \tag{3}$$

Per ogni i potremo scegliere r_i in modo che, quando si escludano i punti P di un certo insieme U_i, di misura non superiore a μ_i, i vettori $\overrightarrow{PP_i}$ e $\overrightarrow{PM_i}$ giacciano completamente in D, e si verifichino inoltre le due condizioni che

$$\left| \frac{\dfrac{| P'P'_i |}{| P P_i |}}{\dfrac{| u'_1 |}{| u_1 |}} - 1 \right| < \varepsilon_i, \qquad \left| \frac{\dfrac{| P'M'_i |}{| P M_i |}}{\dfrac{| v'_1 |}{| v_1 |}} - 1 \right| < \varepsilon_i, \tag{4}$$

e che gli angoli formati da $\vec{u}'_1$ con $\overrightarrow{P'P'_i}$ e da $\vec{v}'_1$ con $\overrightarrow{P'M'_i}$ risultino minori di η_i (2).

(2) Contrariamente a quel che potrebbe sembrare a prima vista non si fa uso qui del postulato di ZERMELO, perchè la scelta del numero r_i e dell'insieme U_i si può effettuare con procedimento ben definito.

Fissiamo ora l'attenzione sul punto P_i, estremo del vettore $\overrightarrow{PP_i}$; quando P descrive l'insieme $D - U_i$, P_i descrive un insieme di uguale misura. *Con un cambiamento di notazioni,* indichiamo ora il punto P_i con P e indichiamo invece con P_i il punto finora indicato con P. Potremo allora asserire che, quando si escludano i punti P di un insieme di misura non superiore a μ_i, ad ogni punto P si può far corrispondere un punto P_i, un vettore $\overrightarrow{P_iP}$ e una famiglia di vettori $\overrightarrow{P_iM_i}$, che godono delle proprietà enunciate. Di qua, e dalla convergenza della serie (3), si trae che, *quando si escludano eventualmente i punti P di un insieme di misura nulla, si potrà assegnare, per ogni punto P, una successione di punti P_i* (dove i assume tutti i valori interi positivi salvo al più un numero finiti di essi) e, *con l'origine in ciascuno dei punti P_i, un vettore $\overrightarrow{P_iP}$ e una famiglia di vettori $\overrightarrow{P_iM_i}$, che godono delle proprietà enunciate.*

Assumiamo similmente un vettore infinitesimo $\overrightarrow{u_2}$, avente la direzione dell'asse y e orientato nel senso delle y crescenti, e un vettore infinitesimo $\overrightarrow{v_2}$, che appartenga al secondo quadrante e formi con $\overrightarrow{u_2}$ un angolo minore di $\frac{\pi}{8}$; poi un vettore infinitesimo $\overrightarrow{u_3}$, avente la direzione dell'asse x e orientato nel senso delle x decrescenti e un vettore infinitesimo $\overrightarrow{v_3}$, che appartenga al terzo quadrante e formi con $\overrightarrow{u_3}$ un angolo minore di $\frac{\pi}{8}$; infine un vettore infinitesimo $\overrightarrow{u_4}$, avente la direzione dell'asse y e orientato nel senso delle y decrescenti e un vettore infinitesimo $\overrightarrow{v_4}$, che appartenga al quarto quadrante e formi con u_4 un angolo minore di $\frac{\pi}{8}$. A partire da $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{v_2}$, da $\overrightarrow{u_3}$ e $\overrightarrow{v_3}$; da $\overrightarrow{u_4}$ e $\overrightarrow{v_4}$ rispettivamente, possiamo procedere in modo analogo a quello seguito a partire da $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{v_1}$.

Arriviamo a concludere che, *quando si escludano eventualmente i punti di un insieme N di misura nulla, si possano trovare, per ogni punto P, quattro successioni di infiniti punti P_i* (dove i assume tutti i valori interi salvo al più un numero finito di essi) e *con l'origine in ciascun punto P_i* un vettore $\overrightarrow{P_iP}$ e una famiglia di vettori $\overrightarrow{P_iM_i}$, *aventi rispettivamente la direzione e il senso di $\overrightarrow{u_l}$ e di $\overrightarrow{v_l}$ $(l = 1, 2, 3, 4)$* e *soddisfacenti alle condizioni analoghe a quelle sopra enunciate.*

4. — Consideriamo ancora la trasformazione definita dalle equazioni (1); in questo paragrafo *supponiamo di sapere che la trasformazione conserva gli angoli fra i vettori infinitesimi uscenti da un punto.*

Sia P un punto non appartenente all'insieme N; dico che il rapporto fra la lunghezza di un vettore infinitesimo uscente da P e la lunghezza del vettore infinitesimo trasformato non dipende dalla direzione del primo vettore. Se dunque indichiamo con $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ due vettori infinitesimi uscenti da P e con $\vec{w}_1'$ e $\vec{w}_2'$ i due vettori infinitesimi trasformati avremo

$$\frac{|w_1'|}{|w_1|} = \frac{|w_2'|}{|w_2|} .$$

Nella dimostrazione potremo evidentemente limitarci a supporre che $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ formino fra loro un angolo minore di $\frac{\pi}{4}$; supporremo inoltre, per fissare le idee, che le loro direzioni orientate siano entrambe interne all'angolo di ampiezza $\frac{3}{4}\pi$, definito dal semiasse negativo delle x e dalla bisettrice del primo quadrante del piano x, y.

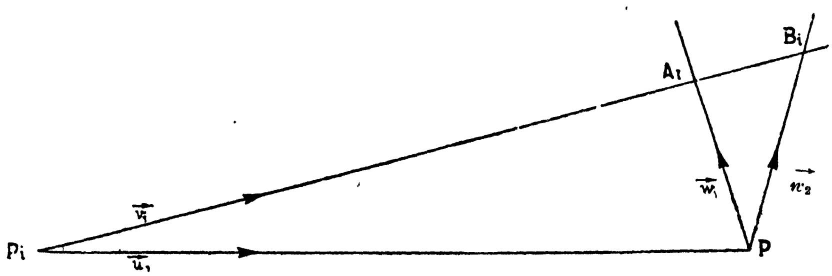

Fig. 1

Indichiamo con A_i e B_i le intersezioni della semiretta uscente da P_i e avente la direzione e il senso di $\vec{v}_1$ con le due semirette uscenti da P e aventi la direzione e il senso di $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ rispettivamente. Si avrà

$$|P_iP| = r_i , \quad |P_iA_i| < 2\,r_i , \quad |P_iB_i| < 2\,r_i .$$

Consideriamo il triangolo PP_iA_i e il triangolo $P'P_i'A_i'$, avente i vertici nei punti trasformati.

Per i infinitamente grande il vettore $\overrightarrow{P_i'P'}$ forma un angolo infinitesimo, minore di η_i, con il vettore $\overrightarrow{u_1'}$, trasformato del vettore infinitesimo $\overrightarrow{u_1}$ uscente da P_i; il vettore $\overrightarrow{P_i'M_i'}$ forma un angolo infinitesimo, minore di η_i, col vettore $\overrightarrow{v_1'}$, trasformato del vettore infinitesimo $\overrightarrow{v_1}$ uscente da P_i. Di qui, e dal fatto che gli angoli fra i vettori infinitesimi uscenti da un punto sono conservati per la (1), segue che, per i infinitamente grande, l'angolo $A_i' P_i' P'$ è uguale all'angolo $A_i P_i P$. Analogamente si riconosce che, per i infinitamente grande, l'angolo $A_i' P' P_i'$ è uguale all'angolo $A_i P P_i$. Ma allora, sempre per i infinitamente grande, il triangolo $A_i' P' P_i'$ risulta simile al triangolo $A_i P P_i$; si ha dunque

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'A_i'|}{|P\,A_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'P_i'|}{|P\,P_i|}$$

In modo analogo si trova che, per i infinitamente grande, il triangolo $B_i' P_i' P'$ è simile al triangolo $B_i P_i P$ e che si ha dunque

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'B_i'|}{|P\,B_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'P_i'|}{|P\,P_i|} .$$

Dalle due relazioni ottenute si ricava

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'A_i'|}{|P\,A_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'B_i'|}{|P\,B_i|} ,$$

dalla quale segue immediatamente l'asserto.

5. — In questo paragrafo *supporremo* invece *di sapere che il rapporto fra la lunghezza di un vettore infinitesimo uscente da un punto P di D e la lunghezza del vettore infinitesimo trasformato non dipende dalla direzione del primo vettore.* Al lemma del paragrafo precedente fa ora riscontro il seguente : *Sia P un punto non appartenente ad N; l'angolo fra due vettori infinitesimi $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ uscenti da P è conservato per la* (1).

Nella dimostrazione di questo lemma noi supporremo, come in quella del lemma del paragrafo precedente, che $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ formino fra loro un angolo minore di $\frac{\pi}{4}$ e appartengano entrambi all'angolo di ampiezza $\frac{3}{4}\pi$ definito dal semiasse negativo delle x e dalla bisettrice del primo quadrante del piano x, y; faremo inoltre riferimento alla figura utilizzata nel paragrafo precedente.

Si ha, in base all'ipotesi formulata,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'P'_i|}{|P\,P_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'A'_i|}{|P\,A_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'B'_i|}{|P\,B_i|} .$$

D'altra parte si ha, in base alla stessa ipotesi e in base a quanto asserito con le disuguaglianze (4),

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'_iP'|}{|P_iP|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'_iA'_i|}{|P_iA_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'_iB'_i|}{|P_iB_i|} ,$$

dalle quali si deduce

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'_iP'|}{|P_iP|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|A'_iB'_i|}{|A_iB_i|} .$$

Dalle prime relazioni e dall'ultima deduciamo

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|P'A'_i|}{|P\,A_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|P'B'_i|}{|P\,B_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|A'_iB'_i|}{|A_iB_i|} ,$$

queste ci mostrano che, per i infinitamente grande, il triangolo $P'A'_iB'_i$ risulta simile al triangolo PA_iB_i, ma allora l'angolo formato da $\vec{w}'_1$ e da $\vec{w}'_2$ è uguale all'angolo formato da $\vec{w}_1$ e da $\vec{w}_2$.

6. — Poniamo $x + i\,y \equiv z$ e $x' + i\,y' \equiv z'$; le (1) determinano la variabile complessa z' in funzione della variabile complessa z; indichiamo questa dipendenza con l'equazione

$$z' = f(z) .$$

Quando il punto P di ascissa z tende verso un punto P_1 di ascissa z_1 secondo la direzione di un vettore infinitesimo $\vec{w}$ spiccato da P_1, il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \frac{z' - z'_1}{z - z_1} \tag{5}$$

ha modulo uguale al rapporto fra la lunghezza del vettore infinitesimo trasformato $\vec{w}'$ e la lunghezza del vettore infinitesimo $\vec{w}$, e argomento uguale alla differenza fra l'angolo di $\vec{w}'$ con l'asse x' e l'angolo di $\vec{w}$ con l'asse x. Questo limite avrà dunque modulo indipendente da $\vec{w}$ se il rapporto fra la lunghezza di un vettore infinitesimo uscente da P_1 e la lunghezza del vettore infinitesimo trasformato uscente da P_1' non dipende dalla direzione del primo vettore; avrà argomento indipendente da $\vec{w}$ se l'angolo di due vettori infinitesimi uscenti da P_1 è sempre uguale all'angolo dei due vettori infinitesimi trasformati uscenti da P_1'. Se entrambe queste proprietà hanno luogo in P_1, la funzione $f(z)$ possiederà in questo punto la derivata $f'(z)$, eguale al limite, indipendente dalla direzione, del rapporto incrementale (5); tutte queste sono cose ben note [3].

Supponiamo ora che una delle due proprietà indicate abbia luogo ovunque in D, allora, come si è visto nei paragrafi precedenti, entrambe le proprietà hanno luogo in tutti i punti di D, quando si escluda eventualmente un insieme N di misura nulla.

7. — Facciamo l'ulteriore ipotesi che le derivate delle funzioni $x'(x, y)$ e $y'(x, y)$ siano limitate in D. Il rapporto (5) sarà allora, in valore assoluto, sempre minore di un certo numero L; in particolare, nei punti in cui $f(z)$ ammette la derivata, si avrà

$$|f'(z)| < L.$$

Si avrà inoltre, indicando con z e z_1 due punti tali che il segmento che li congiunge appartenga a D,

$$|f(z_1) - f(z)| < L\,|z_1 - z|.$$

Indichiamo ora con Γ una curva di JORDAN semplice, chiusa, rettificabile, che sia il contorno completo di una regione R, tutta interna a D. *Vogliamo mostrare che l'integrale*

$$\int f(z)\,dz, \tag{6}$$

esteso alla curva Γ, riesce necessariamente eguale a zero.

Designamo con a l'area di R e con l la lunghezza di Γ.

---

(3) Peraltro la definizione abituale di derivata in un punto è alquanto più restrittiva, implicando la convergenza uniforme del rapporto incrementale alla derivata stessa.

Scegliamo tre numeri positivi $\varepsilon, \eta, \delta$ a piacere e un numero positivo r, piccolo in modo che l'insieme dei punti P di $D - N$, nei quali non risulti

$$r(P \mid \varepsilon, \eta, \delta) < \sqrt{2}\, r \text{ [4]}, \tag{7}$$

costituisca un insieme di misura più piccola di una quantità μ prefissata.

Dividiamo mediante un reticolato il piano z in quadrati di lato r; R sarà a sua volta diviso in quadrati e (lungo il contorno) in poligoni mistilinei; l'integrale (6) esteso a Γ, percorsa, per es., in senso orario, sarà eguale alla somma degli integrali estesi al contorno, pure percorso in senso orario, di ciascuno dei quadrati e dei poligoni mistilinei, che coprono R.

All'interno di ognuno dei quadrati prendiamo un nuovo quadrato di lato $\frac{r}{3}$, avente lo stesso centro e lati paralleli; cominciamo col valutare gli integrali estesi al contorno di quei quadrati del reticolato, tali che i quadrati corrispondenti di lato $\frac{r}{3}$ contengano all'interno almeno un punto, per il quale risulti soddisfatta la (7).

Consideriamo uno determinato di questi quadrati di lato r e indichiamo con z_1 l'ascissa di un punto P_1, interno al quadrato corrispondente di lato $\frac{r}{3}$ e per il quale risulti soddisfatta la (7); designamo poi con z l'ascissa di un punto P, che percorra il contorno del quadrato di lato r.

Siccome P_1 non appartiene ad N, $f(z)$ avrà in questo punto la derivata $f'(z)$; avremo poi

$$f(z) = f(z_1) + (z - z_1) f'(z_1) + (z - z_1)\zeta,$$

avendo posto

$$\zeta = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1).$$

L'integrale (6) esteso al contorno del quadrato si può spezzare nella somma di tre integrali,

$$f(z_1)\int dz + f'(z_1)\int (z - z_1)\, dz + \int (z - z_1)\zeta\, dz;$$

di questi i primi due sono evidentemente uguali a zero, e noi avremo perciò soltanto da valutare il terzo.

---

[4] La funzione $r(P \mid \varepsilon, \eta, \delta)$ è stata introdotta al paragrafo 2

Consideriamo dapprima l'insieme dei punti P del perimetro, tali che $\overrightarrow{P_1 P}$ non appartenga, come direzione e senso, all'insieme $E(P_1 \mid \varepsilon, \eta, \delta)$ definito al paragrafo 2. In corrispondenza a tali punti, poichè

$$| P_1 P | < \sqrt{2}\, r < r(P_1 \mid \varepsilon, \eta, \delta),$$

si trae, in base a quanto asserito con la (2),

$$\left| \left| \frac{z' - z_1'}{z - z_1} \right| - | f'(z_1) | \right| < \varepsilon \, | f'(z_1) | ,$$

mentre si ha d'altra parte

$$\left| \arg \frac{z' - z_1'}{z - z_1} - \arg f'(z_1) \right| < \eta;$$

si deduce che

$$| \zeta | = \left| \frac{z' - z_1'}{z - z_1} - f'(z_1) \right| < (\varepsilon + \eta) \, | f'(z_1) | < (\varepsilon + \eta) L .$$

D'altra parte si ha $| z - z_1 | < \frac{2\sqrt{2}}{3} r < r$. L'integrale (5) esteso all'insieme considerato non supera dunque $4(\varepsilon + \eta) r^2 L$.

Consideriamo successivamente l'integrale esteso all'insieme complementare costituito dai punti P del perimetro, tali che $\overrightarrow{P_1 P}$ appartenga, come direzione e senso, a $E(P_1 \mid \varepsilon, \eta, \delta)$. Si ha intanto

$$| \zeta | = \left| \frac{z' - z_1'}{z - z_1} - f'(z) \right| < 2 L ,$$

d'altra parte, ricordando che questi punti sono visti da P_1 sotto un angolo complessivo inferiore a δ, si trova, con un'analisi elementare, che la misura dell'insieme di questi punti è inferiore $\frac{5}{3} r \operatorname{sen} \delta$. L'integrale esteso all'insieme in questione è quindi inferiore, in valore assoluto, a $\frac{10}{3} r^2 L \operatorname{sen} \delta$.

Concludiamo che che l'integrale esteso al perimetro del quadrato in questione è inferiore, in valore assoluto, a

$$4(\varepsilon + \eta) L r^2 + \frac{10}{3} L r^2 \operatorname{sen} \delta .$$

Il numero complessivo dei quadrati considerati, di area r^2 e compresi nella regione R di area a, non può superare $\frac{a}{r^2}$; il contributo dell'integrale esteso al perimetro di tutti questi quadrati è dunque inferiore, in valore assoluto, a

$$a\, L \left(4\, \varepsilon + 4\, \eta + \frac{10}{3} \operatorname{sen} \delta\right).$$

Valutiamo ora il contributo dell'integrale (6) esteso al perimetro dei rimanenti quadrati del reticolato e dei poligoni mistilinei. Sia P_1 un punto interno ad uno determinato dei quadrati e dei poligoni in questione; si ha, per l'integrale esteso al contorno,

$$\int f(z)\, d\, z = \int f(z_1)\, d\, z + \int (f(z) - f(z_1))\, d\, z\, .$$

Il primo integrale al secondo membro è nullo; si ha poi

$$|\, f(z) - f(z_1)\, | < |\, z - z_1\, |\, L < \sqrt{2}\, r\, L\, ;$$

l'integrale da calcolare non può dunque superare, in valore assoluto, $\sqrt{2}\, r\, L$ moltiplicato per il perimetro.

Notiamo ora che l'area complessiva dei quadrati di lato $\frac{r}{3}$, che non contengono nessun punto P_1 per il quale sia soddisfatta la (7), non può evidentemente superare μ; dunque l'area dei quadrati corrispondenti del reticolato non può superare $9\, \mu$. Il perimetro totale dei quadrati in questione non può allora superare $36 \frac{\mu}{r}$.

Il perimetro totale dei poligoni mistilinei è d'altra parte inferiore a $6\, l$ (5).

Si conclude che l'integrale (6) esteso al perimetro dei quadrati e dei poligoni considerati è inferiore, in valore assoluto, a

$$36 \sqrt{2}\, \mu\, L + 6 \sqrt{2}\, l\, r\, L\, .$$

---

(5) Tralascio per brevità la facile dimostrazione di questa affermazione; l'essenziale, del resto, per la deduzione, è che il perimetro totale dei poligoni mistilinei non superi una certa funzione lineare di l.

Si trova in definitiva che l'integrale (6) esteso al contorno Γ di R è inferiore, in valore assoluto, a

$$\left(4\,a\,\varepsilon + 4\,a\,\eta + \frac{10}{3}\,\mathrm{sen}\,\delta + 36\sqrt{2}\,\mu + 6\sqrt{2}\,l\,r\right) L\,;$$

disponendo di $\varepsilon, \eta, \delta, r$ si può rendere questa quantità arbitrariamente piccola. Si conclude, come nell'enunciato, che l'integrale (6) esteso a Γ è necessariamente eguale a zero.

Applicando allora il teorema di MORERA si deduce infine che $z' \equiv f(z)$ è funzione analitica di z.

[*Pervenuto alla Redazione il 20-6-1950*]