ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GABRIELE DARBO

Una estensione del secondo teorema della media

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 151-160
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_151_0>

UNA ESTENSIONE DEL SECONDO TEOREMA DELLA MEDIA

di Gabriele Darbo (Pisa)

Nel corso di alcune ricerche di Calcolo delle Variazioni mi si è presentata l'opportunità di estendere il secondo teorema della media e poichè ritengo che detta estensione possa aver qualche interesse di per sè, mi sono proposto di esporla nel presente lavoro. L'estensione in proposito è data dal seguente

Teorema. — « *Se* $Q(x, y)$ *è una funzione definita nel rettangolo* $R \equiv \{a \leq x \leq b\,; c \leq y \leq d\}$, *monotona non decrescente rispetto ad* x *per quasi ogni* y *di* $c \vdash\!\dashv d$, *sommabile rispetto ad* y *in* $c \vdash\!\dashv d$ *per ogni* x *di* $a \vdash\!\dashv b$; *se* $y(x)$ *è una funzione assolutamente continua in* $a \vdash\!\dashv b$ *ed è* $c \leq y(x) \leq d$ *per ogni* x *di* $a \vdash\!\dashv b$; *se infine risulta quasi continua sommabile in* $a \vdash\!\dashv b$ *la funzione* $Q[x, y(x)]\, y'(x)$, *esiste in* $a \vdash\!\dashv b$ *almeno un punto* ξ *per cui vale l'uguaglianza*

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx = \int_{y(a)}^{y(\xi)} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y(\xi)}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta \tag{1}$$

In particolare, se la $Q(x,y)$ non dipende dalla y, posto $Q(x,y) = Q(x)$ nella (1), si ricade nel secondo teorema della media avendosi in tal caso

$$\int_a^b Q(x)\, y'(x)\, dx = Q(a)\,[y(\xi) - y(a)] + Q(b)\,[y(b) - y(\xi)]$$

§ 1. — Prima di passare alla dimostrazione del teorema enunciato premettiamo alcune considerazioni sulla funzione assolutamente continua $y(x)$.

DEFINIZIONE. — *Per ogni $\alpha \in a \vdash\!\dashv b$ indichiamo con E_α l'insieme dei punti x di $a \vdash\!\dashv b$ per cui si ha $y(x') \leq y(x)$ qualunque sia x' compreso tra α ed x (estremi inclusi).*

Dimostriamo che:

I) *L'insieme E_α è chiuso.* A tale scopo basta dimostrare che il complementare di E_α è aperto (relativamente ad $a \vdash\!\dashv b$). Infatti se $\bar{x}$ è un punto di $a \vdash\!\dashv b - E_\alpha$ (e quindi distinto da α), esiste tra $\bar{x}$ e α almeno un punto x' tale che $y(x') > y(\bar{x})$ e per la continuità di $y(x)$ esiste pure un intorno σ di $\bar{x}$ escludente x', tale che per ogni $x \in \sigma . a \vdash\!\dashv b$ sia ancora $y(x') > y(x)$. Ogni punto di $\sigma . a \vdash\!\dashv b$ appartiene quindi ad $a \vdash\!\dashv b - E_\alpha$ che risulta con ciò aperto.

II) *Se $x' \frown x''$ è un intervallo contiguo di E_α i cui estremi appartengano ad E_α si ha $y(x') = y(x'')$.* Si osservi che $\alpha \in E_\alpha$ e quindi $x' \frown x''$ si troverà tutto alla destra o tutto alla sinistra di α. Se è $\alpha \leq x' < x'' \leq b$, sarà $y(x') \leq y(x'')$. Non potrà essere $y(x') < y(x'')$, poichè in tal caso scelto Y tale che $y(x') < Y < y(x'')$ esisterà in $x' \frown x''$ una prima soluzione dell'equazione

$$y(x) = Y$$

che dovrebbe appartenere ad E_α contro l'ipotesi che $x' \frown x''$ sia intervallo contiguo di E_α.

Analoga è la dimostrazione nel caso che si abbia $a \leq x' < x'' \leq \alpha$.

DEFINIZIONE. — *Per ogni $\alpha \in a \vdash\!\dashv b$ definiamo la funzione $y_\alpha(x)$, ponendo $y_\alpha(x) = y(x)$ per tutti gli x di E_α e costante in ciascun intervallo contiguo di E_α in modo da risultare continua in $a \vdash\!\dashv b$.*

III) *La funzione $y_\alpha(x)$ è funzione assolutamente continua di x in $a \vdash\!\dashv b$.* Indichiamo con $\omega(\delta)$ il modulo di assoluta continuità [1] della $y(x)$ e sia $x_1' \frown x_1'', x_2' \frown x_2'', \ldots, x_n' \frown x_n''$ un sistema di intervalli disgiunti tali che $\sum_{r=1}^{n} |x_r' - x_r''| \leq \delta$. Chiamiamo $\xi_r' \vdash\!\dashv \xi_r''$ l'intervallo $x_r' \vdash\!\dashv x_r''$ medesimo se questo non contiene punti di E_α, e, se ne contiene qualcuno, sia $\xi_r' \vdash\!\dashv \xi_r''$ il minimo subintervallo di $x_r' \vdash\!\dashv x_r''$ che contiene la parte di E_α contenuta in $x_r' \frown x_r''$. In ogni caso si ha $y_\alpha(x_r') - y_\alpha(x_r'') = y_\alpha(\xi_2') - y_\alpha(\xi_r'')$ per cui, se si tien conto che

$$\sum_{r=1}^{n} |\xi_r' - \xi_r''| \leq \sum_{r=1}^{n} |x_r' - x_r''| \leq \delta$$

---

(1) Modulo di assoluta continuità $\omega(\delta)$ è l'estremo superiore delle somme $\sum_r |y(x_r') - y(x_r'')|$ relative a tutti i sistemi d'intervalli disgiunti $x_r' \frown x_r''$ in numero finito contenuti in $a \vdash\!\dashv b$ e tali che $\sum_r |x' - x''| \leq \delta$.

si avrà

$$\sum_{r=1}^{n} | y_\alpha (x'_r) - y_\alpha (x''_r) | = \sum_{r=1}^{n} | y_\alpha (\xi'_r) - y_\alpha (\xi''_r) | = \sum_{r=1}^{n} | y (\xi'_r) - y (\xi''_r) \leq \omega (\delta)$$

Ne segue pertanto l'assoluta continuità di $y_\alpha (x)$.

IV) *La funzione* $y_\alpha (x)$ *è monotona non crescente in* $a \vdash\!\dashv \alpha$ *e non decrescente in* $\alpha \vdash\!\dashv b$. Osserviamo che se è $\alpha \leq x' < x'' \leq b$ e se $x' \vdash\!\dashv x''$ non contiene punti di E_α, segue $y(x') = y(x'')$; se invece $x' \vdash\!\dashv x''$ contiene una parte non vuota Ξ di E_α, detto $\xi' \vdash\!\dashv \xi''$ il minimo subintervallo che contiene Ξ, essendo $\xi'' \in E_\alpha$ si ha $y(x') = y(\xi') \leq y(\xi'') = y(x'')$.

Procedendo analogamente se $a \leq x' < x'' \leq \alpha$ si dimostra che $y(x') \geq y(x'')$.

Consideriamo ora una successione $\{\alpha_n\}$ di punti appartenenti ad $a \vdash\!\dashv b$, ovunque densa in $a \vdash\!\dashv b$; sia inoltre $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$.

Defininiamo corrispondentemente la successione d'insiemi chiusi $\{\mathcal{E}_n\}$ ponendo

$$\mathcal{E}_n = \sum_{k=1}^{n} E_{\alpha_k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Varranno le seguenti proposizioni:

V) *La successione* $\{\mathcal{E}_n\}$ *esaurisce tutti i punti di* $a \vdash\!\dashv b$ *in cui esiste la derivata di* $y(x)$ *ed è diversa da zero.* Infatti se $\bar{x}$ è un punto di derivabilità ed è $y'(\bar{x}) \neq 0$, esisterà un semintorno σ destro o sinistro di $\bar{x}$ in tutti i punti x del quale si abbia $y(x) \leq y(\bar{x})$. Se α_ν è un termine della successione $\{\alpha_n\}$ che cade in σ (si tenga presente che la successione $\{\alpha_n\}$ è ovunque densa in $a \vdash\!\dashv b$), sarà $\bar{x} \in E_{\alpha_\nu}$ e quindi $\bar{x} \in \mathcal{E}_\nu$.

La successione d'insiemi $\{\mathcal{E}_n\}$ è evidentemente monotona non decrescente, per cui esisterà il limite

$$\mathcal{E} = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}_n$$

e in tutti i punti di $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{E}$ di derivabilità per $y(x)$ (e quindi quasi dappertutto in $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{E}$) sarà $y'(x) = 0$.

VI) *Se* $x' \frown x''$ *è un intervallo contiguo di* $\mathcal{E}_n$ *i cui estremi appartengono ad* $\mathcal{E}_n$, *è* $y(x') = y(x'')$.

Infatti supponiamo, se è possibile, $y(x') < y(x'')$; essendo $x' \in \mathcal{E}_n$, dovrà esistere un indice $r \leq n$ tale che $x' \in E_{\alpha_r}$. In questo caso dovrà essere $\alpha_r \leq x' < x''$, altrimenti, non potendo essere $x' < \alpha_r < x''$, dovrebbe aversi $x' < x'' \leq \alpha_r$ e poichè è $x' \in E_{\alpha_r}$ ne seguirebbe $y(x') \geq y(x'')$ in contraddizione coll'ipotesi. Sia quindi $\alpha_r \leq x' < x''$; se Y è un numero tale che $y(x') < Y < y(x'')$ e se si considera la soluzione $\bar{x}$ più a sinistra tra quelle dell'equazione $y(x) = Y$ che si trovano in $x' \frown x''$ si avrebbe $y(x) \leq y(\bar{x})$ per ogni $x \in \alpha_r \vdash\dashv \bar{x}$ e quindi $\bar{x} \in E_{\alpha_r} \subset \mathcal{E}_n$ contrariamente all'ipotesi che $x' \frown x''$ sia intervallo contiguo di $\mathcal{E}_n$.

Considerazioni analoghe portano ad escludere che sia $y(x') > y(x'')$ per cui dovrà essere $y(x') = y(x'')$.

VII) *L'insieme $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$ è vuoto, se $\alpha_{n+1} \in \mathcal{E}_n$; se α_{n+1} cade in un intervallo contiguo di $\mathcal{E}_n$, chiamato questo $x'_n \frown x''_n$, si ha per ogni $n \geq 2$*

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} \cdot x'_n \frown x''_n .$$

Sia $\alpha_{n+1} \in \mathcal{E}_n$; esisterà un $s \leq n$ per il quale è $\alpha_{n+1} \in E_{\alpha_s}$. Se $\bar{x}$ è un punto qualunque di $E_{\alpha_{n+2}}$, per ogni x compreso tra α_{n+1} è $\bar{x}$ e $y(\bar{x}) \leq y(x)$ e per ogni x compreso tra α_s e α_{n+1} è $y(x) \leq y(\alpha_{n+1}) \leq y(\bar{x})$. Di conseguenza sarà $y(x) \leq y(\bar{x})$ per ogni x tra α_s e $\bar{x}$, e quindi $\bar{x} \in E_{\alpha_s} \subset \mathcal{E}_n$. Ogni punto di $E_{\alpha_{n+1}}$ è già contenuto perciò in $\mathcal{E}_n$; sarà dunque $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n$ ossia $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = 0$.

Supponiamo ora che α_{n+1} cada in un intervallo contiguo $x'_n \frown x''_n$ di $\mathcal{E}_n$; se $\bar{x}$ è un punto di $E_{\alpha_{n+1}}$ ed è $\bar{x} \leq x' < x''$, poichè $n \geq 2$, sarà $x'_n \in \mathcal{E}_n$ e anche $x'_n \in E_{\alpha_i}$ per un certo $i \leq n$. Avremo allora

$$y(x'_n) \leq y(\bar{x})$$

$$y(x) \leq y(\bar{x}) \text{ per ogni } x \text{ compreso tra } \bar{x} \text{ e } \alpha_{n+1}$$

$$y(x) \leq y(x'_n) \leq y(\bar{x}) \text{ per ogni } x \text{ compreso tra } \alpha_i \text{ e } x'_n$$

e quindi per tutti gli x compresi tra α_i e $\bar{x}$ sarà $y(x) \leq y(\bar{x})$, vale a dire $\bar{x} \in E_{\alpha_i} \subset \mathcal{E}_n$.

Analogamente, se $\bar{x} \in E_{\alpha_{n+1}}$ ed è $x'_n < x''_n \leq \bar{x}$, dovendo essere $x''_n \in E_{\alpha_j}$ per un certo $j \leq n$, con le medesime considerazioni si dimostra che deve essere $\bar{x} \in E_{\alpha_j} \subset \mathcal{E}_n$.

Dunque ogni $\bar{x}$ di $E_{\alpha_{n+1}}$ non appartenente a $x'_n \frown x''_n$, è già contenuto in $\mathcal{E}_n$; ne segue che

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} \cdot x'_n \frown x''_n$$

VIII) *Se $n \geq 2$, si ha:*

$$y_{\alpha_{n+1}}(x'_n) = y_{\alpha_{n+1}}(x''_n) .$$

Nell'intervallo $x'_n \frown x''_n$ la $y(x)$ è inferiore al valore assunto agli estremi. Infatti, in caso contrario la $y(x)$ assumerebbe il suo massimo valore relativo all'intervallo $x'_n \vdash\!\dashv x''_n$ in punto x^* ad esso interno; scelto allora un $r \leq n$ tale che $x'_n \in E_{\alpha_r}$, si avrebbe per ogni x tra α_r e $x'_n, y(x) \leq y(x'_n) \leq y(x^*)$ e per ogni x compreso tra x'_n e $x^*, y(x) \leq y(x^*)$; ma allora essendo verificata quest'ultima per ogni x compreso tra α_r e x^*, dovrebbe essere $x^* \in E_{\alpha_r} \subset \mathcal{E}_n$ contrariamente al fatto che $x'_n \frown x''_n$ è un intervallo contiguo di $\mathcal{E}_n$.

Varrà quindi la disuguaglianza $y(x) \leq y(x'_n) \leq y(x''_n)$ per tutti gli x di $x'_n \vdash\!\dashv \alpha_{n+1}$ e di $\alpha_{n+1} \vdash\!\dashv x''_n$; ne segue che $x'_n \in E_{\alpha_{n+1}}$ e $x''_n \in E_{\alpha_{n+1}}$. Di conseguenza sarà

$$y_{\alpha_{n+1}}(x'_n) = y(x'_n) = y(x''_n) = y_{\alpha_{n+1}}(x''_n).$$

§ 2. — Nelle ipotesi fatte sin dall'inizio di questa nota, sulle funzioni $Q(x, y)$ e $y(x)$ dimostriamo le seguenti limitazioni [2]

$$\int_{y(a)}^{y_{\max}} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y_{\max}}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta \leq \int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx \leq \tag{2}$$
$$\leq \int_{y(a)}^{y_{\min}} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y_{\min}}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta .$$

Supponiamo dapprima che la $Q(x, y)$ sia monotona non decrescente rispetto ad x in $a \vdash\!\dashv b$ per *tutti* gli y di $c \vdash\!\dashv d$ anzichè per *quasi tutti*. In seguito toglieremo questa restrizione.

Per proprietà note della successione d'insiemi $\{\mathcal{E}_n\}$ potremo scrivere

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathcal{E}_n} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx$$

ossia

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx = \int_{\mathcal{E}_2} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx + \tag{3}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx .$$

[2] Qui e nel seguito useremo le notazioni $y_{max} = \max_{a \leq x \leq b} y(x)$ e $y_{min} = \min_{a \leq x \leq b} y(x)$.

Consideriamo la serie a secondo membro della (3) e dimostriamo che ogni suo termine è positivo o nullo. È evidentemente nullo ogni termine il cui indice n è tale che $\alpha_{n+1} \varepsilon \mathcal{E}_n$ poichè in tal caso è $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = 0$ [§ 1, VII]. Se α_{n+1} cade in un intervallo contiguo $x'_n \frown x''_n$ di $\mathcal{E}_n$ abbiamo [§ 1, VII], $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = E_{\alpha_{n+1}} x'_n \frown x''_n$ e quindi

$$(4) \qquad \int\limits_{\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx = \int\limits_{x'_n}^{x''_n} Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)]\, y'_{\alpha_{n+1}}(x)\, dx$$

ciò perchè è $y(x) = y_{\alpha_{n+1}}(x)$ in tutto $E_{\alpha_{n+1}}$; $y'(x) = y'_{\alpha_{n+1}}(x)$, in quasi tutto $E_{\alpha_{n+1}}$ e $y'_{\alpha_{n+1}}(x) = 0$ in tutto il complementare di $E_{\alpha_{n+1}}$.

Ricordando le ipotesi fatte sulla $Q(x, y)$, si ha

$$(5) \qquad \begin{aligned} &Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \leq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \quad \text{per} \quad x'_n \leq x \leq \alpha_{n+1} \\ &Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \geq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)] \quad \text{per} \quad \alpha_{n+1} \leq x \leq x''_n \end{aligned}$$

inoltre essendo $y'_{\alpha_{n+1}}(x) \leq 0$ quasi ovunque a sinistra di α_{n+1} e $y'_{\alpha_{n+1}}(x) \geq 0$ quasi ovunque a destra di α_{n+1}, assieme alla (5) si ha:

$$(6) \qquad Q[x, y_{\alpha_{n+1}}(x)]\, y'_{\alpha_{n+1}}(x) \geq Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)]\, y'_{\alpha_{n+1}}(x)$$

quasi ovunque in $x'_n \frown x''_n$.

Dalle ipotesi segue ancora che $Q(\alpha_{n+1}, y)$ è integrabile rispetto ad y in $y_1 \vdash\!\dashv y_2$ ed essendo la $y_{\alpha_{n+1}}(x)$ monotona in ciascuno dei due intervalli $x'_n \vdash\!\dashv \alpha_{n+1}$ e $\alpha_{n+1} \vdash\!\dashv x''_n$ ed assolutamente continua, in virtù di un teorema noto (3) è integrabile in $x'_n \frown x''_n$ pure la $Q(\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x))\, y'_{\alpha_{n+1}}(x)$ ed è per la (4) e per la (6)

$$(7) \qquad \begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx &\geq \int\limits_{x'_n}^{x''_n} Q[\alpha_{n+1}, y_{\alpha_{n+1}}(x)]\, y'_{\alpha_{n+1}}(x)\, dx = \\ &= \int\limits_{y_{\alpha_{n+1}}(x'_n)}^{y_{\alpha_{n+1}}(x''_n)} Q(\alpha_{n+1}, \eta)\, d\eta . \end{aligned}$$

---

(3) Cfr. H. LEBESGUE: *Sur les integrales singulières,* Ann. de Toulouse (3) I (1909), (pp. 25-117) pag. 44.

Tenendo presente che per $n \geq 2$ è $y_{a_{n+1}}(x'_n) = y_{a_{n+1}}(x''_n)$, l'integrale all'ultimo membro della (7) è nullo, ne risulta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x \geq 0\,. \tag{8}$$

In conseguenza della (3) e della (8) si ha la disuguaglianza

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x \geq \int_{\mathcal{E}_2}^b Q(x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x\,. \tag{9}$$

Osserviamo ora che $\mathcal{E}_2 = E_a + E_b$; inoltre per ogni $x \in E_a\, E_b$ è $y(x) = y_{max}$ e quindi quasi ovunque in $E_a \cdot E_b$ è $y'(x) = 0$ per cui si potrà scrivere

$$\int_{\mathcal{E}_2} Q[x, y(x)]\, y'(d\, x = \int_{E_a} Q(x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x + \int_{E_b} Q(x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x =$$

$$= \int_a^b Q[x, y_a(x)]\, y'_a(x)\, d\, x + \int_a Q[x, y_b(x)]\, y'_b(x)\, d\, x\,.$$

Essendo $Q(x, y)$ non decrescente rispetto ad x, $y_a(x)$ non decrescente e $y_b(x)$ non crescente, si vede facilmente che è

$$\int_{\mathcal{E}_2} Q[x, y(x)]\, y'(x)\, d\, x \geq \int_a^b Q[a, y_a(x)]\, y'_a(x)\, d\, x + \int_a^b Q[b, y_b(x)]\, y'_b(x)\, d\, x =$$

(10)

$$= \int_{y_a(a)}^{y_a(b)} Q(a, \eta)\, d\, \eta + \int_{y_b(a)}^{y_b(b)} Q(b, \eta)\, d\, \eta\,.$$

Dalle (9) e (10) ricaviamo infine, essendo

$$y_a(a) = y(a); \quad y_b(b) = y(b), \quad y_a(b) = y_b(a) = y_{max}$$

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(d\, x \geq \int_{y(a)}^{y_{max}} Q(a, \eta)\, d\, \eta + \int_{y_{max}}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\, \eta \tag{11}$$

che è la prima delle disuguaglianze (2), che si volevano dimostrare. Per ottenere la seconda, possiamo ricondurci alla (11) applicando questa alla funzione $\overline{Q}(x, y) = Q(x, -y)$ definita nel rettangolo $\overline{R} \equiv \{a \leq x \leq b\,;\ -y_2 \leq y \leq -y_1\}$ ed ivi monotona non decrescente rispetto alla x per ogni $y \in -y_2 \vdash\!\dashv -y_1$ e considerando al posto della $y(x)$ la funzione $\overline{y}(x) = -y(x)$. Ricordando che $\overline{y}_{max} = -y_{min}$, con semplici passaggi formali otteniamo

$$(12) \qquad \int_a^b Q[x, y(x)\, y'(x)\, dx \leq \int_{y(a)}^{y_{min}} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y_{min}}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta\,.$$

Rimane con ciò dimostrata la (2).

Vogliamo ora far vedere che le disuguaglianze (2) valgono ancora qualora si sostituisca la condizione

i) « $Q(x, y)$ sia monotona non decrescente rispetto ad x in $a \vdash\!\dashv b$ per *ogni* $y \in y_1 \vdash\!\dashv y_2$ », con la seguente meno restrittiva:

ii) « $Q(x, y)$ sia monotona non decrescente rispetto ad x in $a \vdash\!\dashv b$ per *quasi ogni* $y \in y_1 \vdash\!\dashv y_2$.

A tale scopo osserviamo che vale il seguente lemma:

« Se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua in $a \vdash\!\dashv b$ ed è ivi $y_1 \leq y(x) \leq y_2$, e se H è un insieme di misura nulla contenuto in $y\,y$, l'insieme H^* dei punti $x \in a \vdash\!\dashv b$ per cui è $y(x) \in H$ è tale che in esso, quasi ovunque è $y'(x) = 0$ [4] ».

Da ciò segue che l'integrale

$$I = \int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx$$

---

[4] Cfr. E. J. SHANE: Integration, Princeton, (1947) pag. 213.

Per comodità del lettore riportiamo la breve dimostrazione:

Sia $F_H(y)$ la funzione caratteristica dell'insieme H. Poichè mis $H = 0$, per ogni $x \in a \vdash\!\dashv b$ si avrà identicamente

$$0 = \int_{y(a)}^{y(x)} F_H(y)\, dy = \int_a^x F_H[y(x)]\, y'(x)\, dx\,;$$

ne segue che $F_H[y(x)]\, y'(x) = 0$, per quasi ogni $x \in a \vdash\!\dashv b$. In particolare, per quasi ogni $x \in H$ si dovrà avere $1 \,.\, y'(x) = 0$, il che dimostra l'asserto.

non varia se si altera il valore di $Q(x, y)$ in un insieme di punti di R la cui proiezione H sull'asse delle y è di misura nulla. Infatti è quasi ovunque in H^* per il lemma precedente $y'(x) = 0$ e quindi la $Q(x, y)(x)) y'(x)$ rimane inalterata quasi ovunque in $a \vdash\!\dashv b$.

Ne segue che se la $Q(x, y)$ soddisfa la condizione i i), potremo, senza alterare il valore di I, renderla tale da soddisfare la i), modificandola (ponendo ad es. $Q(x, y) = 0$) in un insieme di punti del tipo $\{y \in H; a \leq x \leq b\}$ con mis $H = 0$. Notando infine che con tale modificazione della $Q(x, y)$ rimangono inalterati pure i secondi membri delle disuguaglianze (11) e (12), queste seguiteranno a valere nelle attuali ipotesi.

b) Possiamo dedurre ora dalle (11) e (12) l'identità (1) per un opportuno ξ appartenente ad $a \vdash\!\dashv b$.

Poniamo

$$\Phi(y) = \int_{y(a)}^{y} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta; \quad y_1 \leq y \leq y_2. \tag{13}$$

La funzione $\Phi[y(x)]$, è evidentemente continua per $a \leq x \leq b$ ed assume in due punti di $a \vdash\!\dashv b$ i valori $\Phi(y_{max})$ e $\Phi(y_{min})$. Essendo per le (11) e (12)

$$\Phi(y_{max}) \leq \int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx \leq \Phi(y_{min})$$

dovrà esistere in $a \vdash\!\dashv b$ almeno un punto ξ tale che

$$\Phi[y(\xi)] = \int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx$$

ossia, tenuto conto della (13)

$$\int_a^b Q[x, y(x)]\, y'(x)\, dx = \int_{y(a)}^{y(\xi)} Q(a, \eta)\, d\eta + \int_{y(\xi)}^{y(b)} Q(b, \eta)\, d\eta$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

Notiamo ancora che quest'ultima uguaglianza, data l'indeterminatezza della ξ in $a \vdash\!\dashv b$, è equivalente alle disuguaglianze (11) e (12) poichè è quasi ovunque in $y_1 \vdash\dashv y_2$

$$\Phi'(y) = Q(a, y) - Q(b, y) \leq 0$$

e quindi $\Phi(y)$ è non crescente in $y_1 \vdash\dashv y_2$. Il massimo e il minimo valore di $\Phi[y(x)]$ in $a \vdash\dashv b$, valgono appunto $\Phi(y_{min})$ e $\Phi(y_{max})$ rispettivamente. Ne segue che

$$\Phi(y_{max}) \leq \Phi[y(\xi)] \leq \Phi(y_{min})$$

ovvero le (11) e (12).

[*Pervenuta in Redazione il 1 Giugno 1951*]