ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Su alcune relazioni integrali fra funzioni di Bessel di prima e di seconda specie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 1-2 (1952), p. 17-30

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_17_0>

SU ALCUNE RELAZIONI INTEGRALI FRA FUNZIONI DI BESSEL DI PRIMA E DI SECONDA SPECIE

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

Qui di seguito sono contenute alcune ricerche preliminari ad uno studio in corso sugli zeri comuni a due funzioni di BESSEL, di prima e di seconda specie, oppure entrambe di seconda specie, di ordine diverso.

1. — Sia ν un numero reale. Chiamasi funzione di BESSEL (di prima specie) di ordine ν la funzione [1] (della variabile complessa z):

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{m\,!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

che è un integrale dell'equazione di BESSEL:

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0 . \tag{1}$$

Supporremo sempre, in quel che diremo, a meno che non si avverta esplicitamente del contrario, che la variabile z assuma solo valori reali e la indicheremo, perciò, d'ora in poi, con x. Intenderemo, sempre, nel seguito, $x > 0$.

Poniamo, nella (1), $y = \sqrt{x}\, u$. Essa si muta nell'equazione:

$$u'' + \left[1 - \frac{4\,\nu^2 - 1}{4\,x^2}\right] u = 0 . \qquad [2]$$

---

(1) G. N. WATSON: *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge, University Press, 2nd edition, 1944, p. 40.

M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore,* Rondinella Napoli, 1940, p. 485.

COURANT UND HILBERT Methoden der Mathematischen Physik I Springer, Berlin, 1924, p. 396.

Si ponga:

$$u_1(x) = \sqrt{x}\, J_\mu(x) \quad , \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, J_\lambda(x) \quad , \quad v_1(x) = \sqrt{x}\, Y_\mu(x),$$

essendo λ e μ due numeri reali, assegnati, con μ positivo o nullo e $\lambda > \mu$ e dove $Y_\mu(x)$ significa la funzione (di ordine μ) di WEBER canonica [2] (di seconda specie), la quale, quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, è legata alla funzione di NEUMANN $Y^{(n)}(x)$ dalla relazione [3]

$$Y^{(n)}(x) = \frac{\pi}{2} Y_n(x) + (\log 2 - \gamma)\, J_n(x)$$

dove

$$\gamma = \lim_{n+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

è la nota costante di EULERO-MASCHERONI.

Poichè le funzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione (2) dove si faccia, rispettivamente, $\nu = \mu$, $\nu = \lambda$, si ha:

$$u_1''(x) + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}\right] u_1(x) \equiv 0 \tag{3}$$

$$u_2''(x) + \left[1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right] u_2(x) \equiv 0 \tag{4}$$

e moltiplicando la (3) per $u_2(x)$ e la (4) per $u_1(x)$, quindi sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$\left\{u_1'(x)\, u_2(x) - u_1(x)\, u_2'(x)\right\}' + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} u_1(x)\, u_2(x) \equiv 0\,. \tag{5}$$

---

(2) WATSON, loc. cit. p. 64. La funzione di WEBER $Y_\mu(x)$ è indicata in COURANT UND HILBERT, loc. cit. p. 389, formula (8), con $N_\mu(x)$ ed è detta di NEUMANN. Quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, la funzione di WEBER è legata alla funzione $\mathrm{Y}_n(x)$ di HANKEL dalla relazione $Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Y}_n(x)$. Per questo cfr. WATSON, loc. cit. p 64 e COURANT UND HILBERT, loc. cit. p. 399, dove la funzione di HANKEL, $\mathrm{Y}_n(x)$, è indicata con $Y_n(x)$. Notiamo che PICONE, loc. cit. p. 493 chiama di NEUMANN la funzione di HANKEL che indidica, come COURANT UND HILBERT, con il simbolo, $Y_n(x)$. A scanso di equivoci cade qui opportuno avvertire che noi adottiamo la terminologia e i simboli del WATSON. Ricordiamo che, quando n è intero, valgono le relazioni $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$.

(3) WATSON, loc. cit. p. 70 e p. 71, formula (8). Ivi si trova anche, della funzione $Y_n(x)$ uno sviluppo, valido per ogni valore di x non nullo. Per questo cfr. anche COURANT UND HILBERT, loc. cit. pp. 406-408 e PICONE, loc. cit. p. 493.

Sia $\alpha > 0$. Integrando la (5) fra α e x si ha:

$$u_1'(x)\,u_2(x) - u_1(x)\,u_2'(x) - u_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \tag{6}$$

$$+ (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0\ .$$

2. — È, com'è noto, [4]

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + a(x) \tag{7}$$

$$u_1'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + b(x) \tag{8}$$

avendosi, per $x > K_\mu$, $|\,a(x)\,| < \dfrac{A_\mu}{x}$, $|b(x)| < \dfrac{B_\mu}{x}$, essendo K_μ, A_μ, B_μ, opportune costanti positive, dipendenti da μ [5].

---

[4]) WATSON, loc. cit p 199

[5]) PICONE, loc. cit p 497 dove nel caso particolare in cui μ è l'intero $n\,(\geq 0)$ sono esplicitamente calcolate le costanti K_n, A_n, B_n.

Risulta

$$K_n = \left|n^2 - \frac{1}{4}\right|,\ A_n = (1+\sqrt{e})\left|n^2 - \frac{1}{4}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ B_n =$$

$$= \left[(1+\sqrt{e})\left|n^2 - \frac{1}{4}\right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right]\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Per questo cf anche G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale,* 2ª ediz. volume II, Zanichelli, Bologna 1949, p 42. Nel caso in cui μ è un numero reale o immaginario puro qualunque, PICONE (loc. cit. p 487) stabilisce le decomposizioni:

$$u_1(x) = a\cos(x+b) + \gamma(x) \quad , \quad u_1'(x) = -\,a\,\mathrm{sen}\,(x+b) + \delta(x)$$

essendo a e b due opportune quantità reali (positiva la prima) e avendosi per

$$x > \left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right|,\ A_\mu = (1+\sqrt{e})\left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right|a,\ B_\mu = \left[(1+\sqrt{e})\left|\mu^2 - \frac{1}{4}\right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right]a\,.$$

Nel caso generale (μ reale o complesso qualunque, x reale o complesso), PICONE osserva (loc. cit. pp. 501-502) che si possono stabilire formule di decomposizione analoghe in

Analogamente è:

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c(x) \tag{9}$$

$$u_2'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + d(x) \tag{10}$$

avendosi, per $x > K_\lambda$, $|\, c(x) \,| < \frac{C_\lambda}{x}$, $|\, d(x) \,| < \frac{D_\lambda}{x}$, dove, come sopra, K_λ, C_λ, D_λ sono opportune costanti positive, dipendenti da λ [6].

Se si osserva che:

$$\operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) -$$
$$- \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}$$

si ha, dalla (6) del n. 1, per le (7), (8), (9), (10):

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} + \frac{L(x)}{x} - u_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + \\ & + u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + (\lambda^2 - \mu^2)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,dt \equiv 0 \end{aligned} \tag{11}$$

---

cui $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $b = -\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Nei casi particolari p. es. $\mu = \frac{1}{2}$ e $\mu = -\frac{1}{2}$ è, com'è noto, $\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} x$, $\sqrt{x}\,J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$ per $x > 0$. Nell'uno e nell'altro caso le costanti K_μ e A_μ sono nulle, essendo $K_{\frac{1}{2}} = K_{-\frac{1}{2}} = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = 0$ e $A_{\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{e})\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$.

Torna opportuno qui osservare che, stabilita la (7), la (8) si stabilisce facilmente, dopo aver notato che, essendo $J_\mu'(x) = \frac{\mu}{x}J_\mu(x) - J_{\mu+1}(x)$ (WATSON loc. cit. p. 45), risulta: $u_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}J_\mu(x) - \sqrt{x}\,J_{\mu+1}(x)$.

[6] cfr. quanto è detto in [5]

avendosi, per $x > \delta > 0$, $| L(x) | < L$, essendo δ, L due opportune costanti positive, dipendenti da λ e μ.

Dalla (11) per $x \to +\infty$ si ricava:

$$\text{(A)} \qquad \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_\alpha^{+\infty} \frac{u_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, d\, t + u_1(\alpha)\, u_2'(\alpha) - u_1'(\alpha)\, u_2(\alpha)$$

cioè:

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\, d\, t + \sqrt{\alpha}\, J_\mu(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_\lambda(\alpha) + \sqrt{\alpha}\, J_\lambda'(\alpha) \right\} - \sqrt{\alpha}\, J_\lambda(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_\mu(\alpha) + \sqrt{\alpha}\, J_\mu'(\alpha) \right\}$$

e, tenendo conto della relazione [7]:

$$\alpha\, J_\nu'(\alpha) = \nu\, J_\nu(\alpha) - \alpha\, J_{\nu+1}(\alpha)$$

si ottiene:

$$\text{(12)} \qquad \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\, t - \alpha \left\{ J_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha) \right\} + (\lambda - \mu)\, J_\mu(\alpha)\, J_\lambda(\alpha)$$

da cui, per $\alpha \to 0$:

$$\text{(13)} \qquad \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} = \int_0^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\, t$$

e da qui per la (12):

$$\text{(14)} \qquad \int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\, t = \frac{\alpha \left\{ J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha) - J_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) \right\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\mu(\alpha)\, J_\lambda(\alpha)}{\lambda + \mu}$$

Le (13) e (14) sono note [8].

---

[7] WATSON, loc. cit p. 45.

[8] WATSON, loc. cit. p. 404, formola (7) e WATSON, loc. cit. p. 135, formola (13).

Si osservi, in particolare, che se è $J_\mu(\alpha) = 0$, dalla (12) si deduce:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} - \alpha \frac{J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

Se è, inoltre, $\lambda = \mu + 2$, oppure μ razionale e $\lambda = \mu + 2\,m$ (m, intero, ≥ 2), dovendo essere (9) $J_\lambda(\alpha) \neq 0$ $J_{\mu+1}(a) \neq 0$ e, per la (13) e la precedente uguaglianza:

$$\int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = - \int_\alpha^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\,t = \alpha \frac{J_\lambda(\alpha)\, J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

posto $\varphi(x) = \int_0^x \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t}\, d\,t$, si ottiene $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Quando μ è razionale e $\lambda - \mu = K$ (K intero, ≥ 2), non può esistere un punto α in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$. In un tale punto sarebbe $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. La congettura di BOURGET, provata da SIEGEL (10), e da questi generalizzata, equivale perciò ad affermare, quando sia μ razionale e $\lambda = \mu + m$ ($m > 2$), che non esiste nessun punto α in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$.

3. — Valgono le decomposizioni (11):

$$v_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + e(x) \tag{15}$$

$$v_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + f(x) \tag{16}$$

avendosi, per $x > h_\mu$, $|e(x)| < \frac{E_\mu}{x}$, $|f(x)| < \frac{F_\mu}{x}$, essendo h_μ, E_μ, F_μ, tre opportune costanti positive, dipendenti da μ.

---

(9) WATSON, loc. cit pp. 484-485.

(10) WATSON, loc cit. p. 485.

(11) WATSON, loc. cit. p. 199, dove è dato lo sviluppo asintotico della $Y_\mu(x)$, da cui si deduce subito quello della $v_1(x)$. La (16) si stabilisce poi, una volta scritta la (15), dopo aver notato che, essendo $Y'_\mu(x) = \frac{\mu}{x} Y_\mu(x) - Y_{\mu+1}(x)$, (WATSON, loc. cit. p. 66) risulta: $v_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} Y_\mu(x) - \sqrt{x}\, Y_{\mu+1}(x)$.

Essendo $Y_\mu(x)$ soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si faccia $\nu = \mu$, $v_1(x)$ è soluzione dell'equazione (2) dove si ponga $\nu = \mu$.

Vale perciò la relazione identica:

$$\{v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2(x)\}' + \frac{\lambda^2-\mu^2}{x^2}\,v_1(x)\,u_2(x) \equiv 0 \tag{17}$$

analoga alla (5) del n. 1, da cui si ha, integrando fra α e x:

$$\begin{gathered} v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2'(x) - v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2-\mu^2)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t \equiv 0\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Se si osserva che è:

$$\begin{gathered} \cos\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \operatorname{sen}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x - \lambda\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

si ottiene, per le (9), (10), (15), (16),

$$v_1'(x)\,u_2(x) - v_1(x)\,u_2'(x) = \frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x} \tag{19}$$

avendosi, per $x > \eta > 0$, $|M(x)| < M$, essendo η, M, due opportune costanti positive, dipendenti da λ e μ.

Dunque, sostituendo la (19) nella (18) si ottiene:

$$\begin{gathered} \frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x} - v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) + v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2-\mu^2)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t \equiv 0 \end{gathered}$$

dove, per $x > \eta > 0$, è $|M(x)| < M$.

Da qui, per $x \to +\infty$, si ricava:

$$\begin{gathered} (\lambda^2-\mu^2)\int_\alpha^{+\infty} \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t = \\ = -\frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2} - v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) + v_1'(\alpha)\,u_2(\alpha) \end{gathered} \tag{B}$$

vale a dire:

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,d\,t=$$

(20)

$$=-\frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}-\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)\,J'_\lambda(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y'_\mu(\alpha)\right\}$$

ossia, essendo [12]:

$$J'_\lambda(\alpha)=\frac{\lambda J_\lambda(\alpha)-\alpha J_{\lambda+1}(\alpha)}{\alpha},\qquad Y'_\mu(\alpha)=\frac{\mu\,Y_\mu(\alpha)-\alpha\,Y_{\mu+1}(\alpha)}{\alpha}$$

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,d\,t=$$

(21)

$$=-\frac{2}{\pi}\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}+\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)J_{\lambda+1}(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y_{\mu+1}(\alpha)\right\}+(\mu-\lambda)\,J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)$$

da cui:

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{Y_\mu(t)\,J_\lambda(t)}{t}\,d\,t=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2-\mu^2}+$$

(22)

$$+\frac{\alpha\left\{Y_\mu(\alpha)\,J_{\lambda+1}(\alpha)-J_\lambda(\alpha)\,Y_{\mu+1}(\alpha)\right\}}{\lambda^2-\mu^2}-\frac{J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)}{\lambda+\mu}$$

e perciò, per $\alpha\to 0$, ricordando che è [13]:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}=\frac{1}{2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)}\tag{23}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^\mu\,Y_\mu(x)=-\frac{2^\mu\,\Gamma(\mu)}{\pi}\tag{24}$$

si ricava [14] $(\lambda>\mu)$:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t)}{t}\,d\,t=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}}{\lambda^2-\mu^2}\,.\tag{25}$$

---

(12) WATSON, *loc. cit.*, p. 45 e p. 66.

(13) WATSON, *loc. cit.*, p. 40 e p. 71.

(14) Questa formula non mi sembra che sia esplicitamente notata nel libro del WATSON.

Se, in particolare, è $\lambda - \mu$ (intero positivo) dispari, con facile calcolo dalla (22), per le (23) e (24) si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\lambda-\mu}} \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi \cdot 2^{\lambda-\mu}(\lambda-\mu)\,\Gamma(\lambda+1)}.$$

Se è, come supponiamo, $\lambda > \mu$, si ha poi:

$$\lim_{x \to 0} x^{\lambda-\mu} \int_x^{+\infty} \frac{J_\mu(t)\, Y_\lambda(t)}{t}\, dt = -(\lambda-\mu)\frac{2^{\lambda-\mu}\,\Gamma(\lambda)}{\pi\,\Gamma(\mu+1)}.$$

Sempre per $\lambda > \mu$, dalle (22) e (25) si ricava:

$$\int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, dt = \frac{-\alpha\{Y_\mu(\alpha)\, J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha)\, Y_{\mu+1}(\alpha)\}}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{J_\lambda(\alpha)\, Y_\mu(\alpha)}{\lambda+\mu}.$$

Quando sia poi $x > \alpha$, per λ e μ *qualunque,* positivi o nulli, dalla (22), che è vera per λ e μ qualunque, reali, si ricava:

$$\int_\alpha^x \frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\, dt = \left[\frac{-x\{Y_\mu(x)\, J_{\lambda+1}(x) - J_\lambda(x)\, Y_{\mu+1}(x)\}}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)}{\lambda+\mu}\right]_\alpha^x$$

formula nota ([15]).

OSSERVAZIONE. — La $Y_\mu(x)$ è soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si ponga $\nu = \mu$, indipendente da $J_\mu(x)$. Infatti il wronskiano di $Y_\mu(x)$ e $J_\mu(x)$ vale ([16])

$$W(J_\mu, Y_\mu) = \frac{2}{\pi x}.$$

Le $u_1(x)$ e $v_1(x)$ sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione (2) dove si faccia $\nu = \mu$. È:

$$W(u_1, v_1) = \frac{2}{\pi}. \tag{26}$$

([15]) WATSON, *loc. cit*, p. 135, formula (13).

([16]) WATSON, *loc. cit.*, p. 76.

4. — La $u_2(x)$ soddisfa all'equazione in θ:

$$\theta'' + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}\right]\theta = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} u_2(x)$$

la cui equazione omogenea corrispondente ha le soluzioni fondamentali $u_1(x)$ e $v_1(x)$. Si trova dunque, essendo C_1 e C_2 costanti da determinarsi, per $x > 0$:

$$u_2(x) = \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{v_1(x)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t - u_1(x)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t_2}\,d\,t\right\} + \tag{27}$$
$$+ C_1 u_1(x) + C_2 v_1(x)$$

com'è facile constatare, tenendo presente, fra l'altro, la (26) dell'osservazione del n. 3. Poichè è:

$$u_2'(x) = \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{v_1'(x)\int_\alpha^x \frac{u_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t - u_1'(x)\int_\alpha^x \frac{v_1(t)\,u_2(t)}{t^2}\,d\,t\right\} +$$
$$+ C_1 u_1'(x) + C_2 v_1'(x)$$

le C_1 e C_2 devono soddisfare al sistema lineare:

$$\begin{cases} u_1(\alpha).\,C_1 + v_1(\alpha).\,C_2 = u_2(\alpha) \\ u_1'(\alpha).\,C_1 + v_1'(\alpha).\,C_2 = u_2'(\alpha) \end{cases}$$

il cui determinante vale, per la (26), $\dfrac{2}{\pi}$.

Si trova:

$$C_1 = \frac{\pi\,\{u_2(\alpha)\,v_1'(\alpha) - v_1(\alpha)\,u_2'(\alpha)\}}{2}$$

$$C_2 = \frac{\pi\,\{u_1(\alpha)\,u_2'(\alpha) - u_2(\alpha)\,u_1'(\alpha)\}}{2}$$

e perciò, tenendo presenti la (26), la (A) e la (B):

$$u_2(x) = v_1(x) \,.\, \operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + u_1(x) \,.\, \cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{u_1(x)\, v_1(t) - v_1(x)\, u_1(t)}{t_2} u_2(t)\, d\, t$$

Sussiste dunque l'identità:

$$u_2(x) = u_1(x) \left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{v_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, d\, t\right\} +$$

$$+ v_1(x) \,.\, \left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{u_1(t)\, u_2(t)}{t^2}\, d\, t\right\}$$

ossia

$$(28)\quad \begin{aligned} J_\lambda(x) &= J_\mu(x) \,.\, \left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{Y_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\, d\, t\right\} + \\ &+ Y_\mu(x) \,.\, \left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d\, t\right\} \end{aligned}$$

vale a dire:

$$(29)\quad \begin{aligned} &\int_x^{+\infty} \left\{J_\mu(x)\, Y_\mu(t) - J_\mu(t)\, Y_\mu(x)\right\} \frac{J_\lambda(t)}{t}\, d\, t = \frac{2}{\pi(\lambda^2 - \mu^2)} \,. \\ &\quad . \left\{J_\lambda(x) - J_\mu(x)\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - Y_\mu(x)\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

che si può ottenere anche direttamente dalle (12) e (21).

Scambiando λ con μ, la (28) dà:

$$J_\mu(x) = J_\lambda(x) \,.\, \left\{\cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{Y_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d t\right\} -$$

$$- Y_\lambda(x) \,.\, \left\{\operatorname{sen}(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\, d t\right\}$$

e moltiplicando la (28) per $Y_\lambda(x)$, la (29) per $Y_\mu(x)$, indi sommando membro a membro, si ottiene:

$$J_\lambda(x)\, Y_\lambda(x) + J_\mu(x)\, Y_\mu(x) = \cos(\lambda - \mu)\frac{\pi}{2}\cdot\left\{J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) + J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\right\}$$

$$+\frac{\pi}{2}(\lambda^2-\mu^2)\cdot\left\{J_\mu(x)\, Y_\lambda(x)\int_x^{+\infty}\frac{Y_\mu(t)\, J_\lambda(t)}{t}\,dt - \right.$$

$$\left. - J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\cdot\int_x^{+\infty}\frac{Y_\lambda(t)\, J_\mu(t)}{t}\,dt\right\}$$

vale a dire:

$$J_\mu(x)\, Y_\lambda(x)\int_x^{+\infty}\frac{J_\lambda(t)\, Y_\mu(t)}{t}\,dt - J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\int_x^{+\infty}\frac{J_\mu(t)\, Y_\lambda(t)}{t}\,dt =$$

(31)

$$= \frac{2}{\pi(\lambda^2-\mu^2)}\left\{J_\lambda(x)\, Y_\lambda(x) + J_\mu(x)\, Y_\mu(x) - \cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\left[J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_\lambda(x)\, Y_\mu(x)\right]\right\}$$

formula che si può ottenere anche direttamente dalla (21) e da quella che si ottiene scambiando in questa λ con μ.

Data l'analiticità, rispetto a ν e a z ($z \neq 0$) delle funzioni $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, è lecito concludere che le (29), (31), valgono se si intende che λ, μ siano complessi qualunque e si sostituisce alla variabile positiva x la variabile complessa $z \neq 0$.

Facciamo una semplice applicazione della (31). Supponiamo $\lambda - \mu$ intero (> 0).

Poichè sussiste l'uguaglianza [17]:

$$J_\lambda(x)\, Y_\mu(x) - J_\mu(x)\, Y_\lambda(x) = \frac{2\, R_{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}(x)}{\pi x}$$

dove $R_{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}(x)$ è il polinomio di LOMMEL, la cui espressione esplicita è [18]

---

(17) WATSON, loc cit. p. 297.

(18) WATSON, loc. cit. p. 296.

$\lambda - \mu$ pari:

$$\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R}(x) = \frac{2^{\lambda-\mu-1}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \frac{(\lambda-\mu-2)\,2^{\lambda-\mu-3}\,\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \ldots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-2}{2}}\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)!\,(\lambda+\mu)\frac{1}{x}$$

$\lambda - \mu$ dispari:

$$\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R}(x) = \frac{2^{\lambda-\mu-1}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \frac{(\lambda-\mu-2)\,2^{\lambda-\mu-3}\,\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)}\frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \ldots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-1}{2}}$$

le radici $\alpha > 0$ di $\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R}(x) = 0$ soddisfano all'equazione:

$$J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha) = J_\mu(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha)\,.$$

Dalla (31) si ricava perciò:

$$J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)\int_\alpha^{+\infty}\{J_\lambda(t)\,Y_\mu(t) - J_\mu(t)\,Y_\lambda(t)\}\frac{dt}{t} =$$

$$(32)\qquad = J_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(\alpha)\int_\alpha^{+\infty} 2\,\frac{\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R}(x)}{\pi x^2}\,dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2-\mu^2)}\{J_\lambda(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha) + J_\mu(\alpha)\,Y_\mu(\alpha) - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\cdot J_\mu(\alpha)\,Y_\lambda(\alpha)\}$$

Supponiamo μ razionale, $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2). Non può essere allora [19] $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) = 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) \neq 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$. Dunque [20]:

---

[19] WATSON, loc. cit. pp. 484-485.

[20] Se è $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2), qualunque sia $\mu \geq 0$ e reale poichè la minima radice positiva di $Y_\nu(x)$ (ν reale, > 0), deve risultare maggiore di $\nu + \frac{1}{2}$ (WATSON, loc. cit. p. 487), ne viene facilmente che quando μ è sufficientemente piccolo, non può verificarsi il caso a).

a) o è $Y_\mu(\alpha) = Y_\lambda(\alpha) = 0$

b) oppure $Y_\mu(\alpha) \neq 0$, $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$ e quindi anche $J_\lambda(\alpha) \neq 0$, $J_\mu(\alpha) \neq 0$.

In questo secondo caso dalla (32) si ricava:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}}{x^2}\, d\,x = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\left\{\frac{J_\lambda(\alpha)}{J_\mu(\alpha)} + \frac{J_\mu(\alpha)}{J_\lambda(\alpha)} - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\right\}$$

Essendo [21]

$$J_\lambda(x) = J_\mu(x)\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(x)} - J_{\mu-1}(x)\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}$$

si ha:

$$J_\lambda(\alpha) = J_\mu(\alpha)\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}$$

Perciò:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\underset{\lambda-\mu-1,\,\mu+1}{R(x)}}{x^2}\, d\,x = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{\left\{\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}\right\}^2 - 2\cos(\lambda-\mu)\frac{\pi}{2}\underset{\lambda-\mu,\,\mu+1}{R(\alpha)}}{\underset{\lambda-\mu,\,\mu}{R(\alpha)}}$$

che esprime un legame in μ e $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2), μ razionale ≥ 0.

---

[21] WATSON, loc. cit. p. 298.