

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

**Una proprietà delle successioni di funzioni generalmente
a variazione limitata**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 6,
n° 1-2 (1952), p. 99-107

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_99_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI GENERALMENTE A VARIAZIONE LIMITATA

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

Scopo di questa Nota è di stabilire, sotto opportune ipotesi, una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata secondo TONELLI⁽¹⁾. Farò vedere che essa si dimostra con ragionamenti che ricordano quelli di cui mi servii, parecchi anni fa, per provare il seguente: ⁽²⁾

TEOREMA: *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua nel quadrato Q : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, ivi generalmente a variazione limitata, dato un numero positivo arbitrario σ , esistono un numero positivo N ed un insieme E^* di punti di Q , tali che si abbia ⁽³⁾ $m(Q) - m(E^*) < \sigma$ e*

$$|f(x', y') - f(x, y)| \leq N \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

per ogni coppia di punti $(x, y), (x', y')$ di E^* .

⁽¹⁾ Una funzione $f(x, y)$ — definita nel quadrato fondamentale Q di vertici opposti $(0, 0), (1, 1)$ — ivi quasi continua, dicesi generalmente a variazione limitata (secondo TONELLI), se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla, tale che, indicate con $V_x(x_0, y), V_y(x, y_0)$ ($0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispettivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$ e $V_y(x, 1)$ risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$ quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili (secondo LEBESGUE).

⁽²⁾ L. GIULIANO: *Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, pp. 41-50, Vol VIII, 1939.

⁽³⁾ Dato un insieme piano I misurabile (secondo LEBESGUE) indicheremo sempre, nel seguito, con $m(I)$ la sua misura (superficiale).

Questo teorema e le considerazioni svolte mi furono allora molto utili per dimostrare che ogni funzione quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q , è ivi quasi dappertutto asintoticamente differenziabile⁽⁴⁾.

Alla proprietà che è, soprattutto, l'oggetto di questa Nota e che m'è parso opportuno di far conoscere sono stato condotto durante la lettura di due recenti interessanti Note lincee di F. CAFIERO⁽⁵⁾. Questa mia nota termina poi con alcune utili osservazioni.

Solo per semplicità si considereranno, in quel che segue, funzioni definite nel quadrato Q . Quel che si dirà sussiste però anche se le funzioni assegnate sono definite in un qualunque dominio aperto e limitato del piano (x, y) .

* * *

1. — Prima di proseguire poniamo le seguenti definizioni:

Definizione I⁽⁶⁾. Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q , si dirà formata di funzioni ugualmente quasi limitate se, per ogni numero $\varepsilon > 0$ si può determinare un numero $H > 0$ e un insieme h_n di punti di Q , eventualmente variabile con n , superficialmente misurabile, in modo che si abbia $m(Q) - m(h_n) < \varepsilon$ e $|f_n(x, y)| \leq H$ in tutti i punti che appartengono ad h_n .

Definizione II⁽⁶⁾. Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q , si dirà formata di funzioni ugualmente quasi continue se, per ogni coppia di numeri $\varepsilon > 0$ e $\omega > 0$ si può decomporre Q in un numero finito s di insiemi parziali Q_ν ($\nu = 1, 2, \dots, s$) ed esiste un insieme λ_n di punti di Q , eventualmente variabile con n , superficialmente misurabile, tale che $m(Q) - m(\lambda_n) < \varepsilon$, in modo che l'oscillazione di ogni funzione della successione risulti minore di ω in ogni insieme parziale Q_ν ($\nu = 1, 2, \dots, s$) quando si tenga conto soltanto dei valori assunti dalle funzioni della successione nell'insieme λ_n .

(4) Questo risultato e così pure il teorema enunciato sussistono anche se la funzione $f(x, y)$ è definita in un qualunque dominio, aperto e limitato, del piano (x, y) . Com'è noto, si tratta dell'ormai classico concetto di differenziabilità asintotica introdotto da STEPANOFF e anche, indipendentemente, da RADÒ, CACCIOPOLI e SCORZA DRAGONI. A questi ultimi tre AA. si deve, in particolare, il concetto di differenziabilità asintotica regolare che si è dimostrato utilissimo in varie questioni (integrali doppi del Calcolo delle Variazioni, equazioni alle derivate parziali ecc. ecc.).

(5) F. CAFIERO: *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata*. Nota I, Rend. Lincei, pp. 305-311, Fasc. 4, 1950 e Nota II, idem, pp. 450-457, Fasc. 5, 1950.

(6) M. FRÉCHET: *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables*. Fund. Math. Tom. IX, pp. 25-32, p. 30, 1927.

Definizione III ⁽⁷⁾. Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q , si dirà formata di funzioni *ugualmente quasi lipschitziane* se, per ogni numero $\varepsilon > 0$, esistono un numero $M > 0$ e un insieme e_n di punti di Q , eventualmente variabile con n , superficialmente misurabile, tale che $m(Q) - m(e_n) < \varepsilon$ e, inoltre,

$$|f_n(x', y) - f_n(x'', y''')| \leq M \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y''')^2}$$

qualunque siano i punti (x', y') e (x'', y''') di e_n .

OSSERVAZIONE. È chiaro che ogni successione di funzioni quasi continue in Q , ivi ugualmente quasi lipschitziane, è anche di funzioni ugualmente quasi continue.

2. — La proprietà che vogliamo provare è espressa dal seguente:

TEOREMA. Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue e generalmente a variazione limitata ⁽⁸⁾ in Q , ivi ugualmente quasi limitate ⁽⁹⁾. Si supponga che esista una costante positiva K , indipendente da n , tale che, indicate con $V_x^{(n)}(x, y)$, $V_y^{(n)}(x, y)$ le variazioni totali della $f_n(x, y)$ si abbia, qualunque sia n :

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y) dy < K$$

Allora la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi lipschitziane.

⁽⁷⁾ Questa definizione, se non erro, compare qui per la prima volta.

⁽⁸⁾ o, più in particolare, a variazione limitata, secondo TONELLI.

⁽⁹⁾ questa condizione è sicuramente soddisfatta, in una delle seguenti ipotesi:

α) esista, per ogni numero $\varepsilon > 0$ fissato, una funzione $\varphi(x, y) \geq 0$ definita e quasi continua in Q , e un insieme d_n di punti di Q , misurabile superficialmente, eventualmente variabile con n , in modo che si abbia $m(Q) - m(d_n) < \varepsilon$ e, qualunque sia il punto (x, y) di d_n :

$$|f_n(x, y)| \leq \varphi(x, y)$$

β) esista una costante $L > 0$, indipendente da n , tale che si abbia, qualunque sia n :

$$\iint_Q |f_n(x, y)| dx dy < L$$

Dimostrazione. a) È noto⁽¹⁰⁾ che, per ogni funzione $f(x, y)$ quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q , esiste un insieme E' di punti di Q , di misura superficiale nulla, contenente l'insieme E ⁽¹¹⁾, in modo che, dette $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, calcolate senza tenere alcun conto dei valori della $f(x, y)$ in E' , le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono funzioni di (x, y) quasi continue in Q e in modo anche che le $V_x^*(\bar{x}, y)$ e $V_y^*(x, \bar{y})$ risultano funzioni quasi continue rispettivamente di y e di x per tutti gli \bar{x} e \bar{y} di $(0, 1)$. Poichè $V_x^*(x, y) \leq V_x(1, y)$, $V_y^*(x, y) \leq V_y(x, 1)$, le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono finite quasi dappertutto in Q e le $V_x^*(1, y)$ e $V_y^*(x, 1)$, come funzioni di y e di x , rispettivamente, sono integrabili, in $(0, 1)$.

b) Per ogni n si indichi, secondo quanto è detto in a), con E'_n l'insieme, di misura superficiale nulla, e con $V_x^{*(n)}(x, y)$, $V_y^{*(n)}(x, y)$ le relative variazioni totali della $f_n(x, y)$, calcolate cioè senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f_n(x, y)$ in E'_n . variazioni che godono delle proprietà elencate in a). Sia $\bar{E} = \sum_n E'_n$. È $m(\bar{E}) = 0$.

Senza restrizione per la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, si può sempre supporre che le $f_n(x, y)$ siano tutte quasi continue linearmente sui lati del quadrato Q . Si può anche supporre che su questi lati l'insieme \bar{E} abbia soltanto punti costituenti insiemi lineari di misura nulla. Si dica J l'insieme delle rette parallele all'asse x su cui l'insieme \bar{E} seghi insiemi di misura lineare non nulla od eventualmente non misurabili (linearmente), ed infine di quelle, sempre parallele all'asse x , che passano per i punti $(0, y)$ appartenenti ad \bar{E} . L'insieme dei valori y' corrispondenti a tutte queste parallele risulta di misura lineare nulla.

Sull'insieme E'' costituito dai punti del quadrato Q che non appartengono alle rette del sistema J , nè all'insieme \bar{E} , si definiscano, per ogni n , le due funzioni $P_n(x, y)$ e $Q_n(x, y)$ mediante le due uguaglianze:

$$(1) \quad \begin{cases} V_x^{*(n)}(x, y) = P_n(x, y) + Q_n(x, y) \\ f_n(x, y) - f_n(0, y) = P_n(x, y) - Q_n(x, y) \end{cases}$$

Le funzioni $P_n(x, y)$ e $Q_n(x, y)$ si possono definire⁽¹²⁾ in tutti i punti di Q , esclusi tutti e soli i punti (x, y') essendo $y = y'$ una retta del sistema J e risultano, in Q , funzioni quasi continue di (x, y) . Indicati con

⁽¹⁰⁾ cfr. loc. cit. in (2) p. 45, n. 6.

⁽¹¹⁾ cfr. nota (1) di questo lavoro.

⁽¹²⁾ cfr. loc. cit. (2) p. 47.

$p_n(x, y)$ e $q_n(x, y)$, rispettivamente, l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P_n(x+h, y) - P_n(x, y)}{h} \right|$$

e l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{Q_n(x+h, y) - Q_n(x, y)}{h} \right|$$

considerate, l'una e l'altra, per tutti i valori di $h \neq 0$, si prova⁽¹³⁾ che $p_n(x, y)$ e $q_n(x, y)$ sono, entrambe, funzioni quasi continue di (x, y) in Q .

Sia ora $\sigma > 0$ un numero arbitrario fissato. Si determini un numero positivo L in modo che $32 K \cdot L^{-1} < \frac{\sigma}{12}$, dove K è la costante positiva (indipendente da n) di cui all'enunciato del teorema. Si dica e_p l'insieme (misurabile) dei punti di Q in cui è soddisfatta, per qualche valore di n , la disuguaglianza $p_n(x, y) > \frac{1}{8} L$. Su quasi tutte le rette parallele all'asse x che contengono punti di e_p , questo insieme sega insiemi misurabili (linearmente). Sia $y = y_0$ una di queste rette (su cui cioè e_p sega un insieme misurabile) e si dica $e_p(y_0)$ la sezione di e_p con la retta considerata. Si osservi che ad ogni punto di $e_p(y_0)$ è associato almeno un segmento di lunghezza $|\bar{h}|$ della retta $y = y_0$ che ha tale punto come estremo e per cui è, per qualche valore di n :

$$\left| \frac{P_n(x + \bar{h}, y_0) - P_n(x, y_0)}{\bar{h}} \right| > \frac{1}{8} L$$

Ricordando un lemma di VITALI⁽¹⁴⁾, si può scegliere un numero finito di tali segmenti in modo che risultino non sovrappontisi e che, dette $|\bar{h}_1|, |\bar{h}_2|, \dots, |\bar{h}_s|$ le loro lunghezze, risulti, per certi interi n_1, n_2, \dots, n_s ,

⁽¹³⁾ cfr. loc. cit. (2) p. 47.

⁽¹⁴⁾ Il lemma è il seguente:

« Sia E un insieme lineare di misura esterna finita $m_e(E)$. Supponiamo che ad ogni punto di E siano associati uno o più intervalli chiusi contenenti P come punto interno o come estremo. Dato allora un numero $\varepsilon > 0$, si può scegliere un insieme \mathcal{E} di un numero finito di intervalli associati non sovrappontisi tali che $m(\mathcal{E}) > \frac{1}{3} m_e(E) - \varepsilon$ ».

In una forma leggermente diversa, ma del resto perfettamente equivalente, esso si trova in VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accademia Scienze, Torino, vol. XLIII, 1908, p. 230.

non necessariamente fra loro distinti, indicando con $m[e_p(y_0)]$ la misura (lineare) di $e_p(y_0)$:

$$m[e_p(y_0)] \leq 4 \sum_1^s |\bar{h}| < 4 \cdot 8 L^{-1} \{ |P_{n_1}(x + \bar{h}_1, y_0) - P_{n_1}(x, y_0)| + \\ + |P_{n_2}(x + \bar{h}_2, y_0) - P_{n_2}(x, y_0)| + \dots + |P_{n_s}(x + \bar{h}_s, y_0) - P_{n_s}(x, y_0)| \}.$$

Se è n_ν uno, fra gli indici n_1, n_2, \dots, n_s per cui è ($i = 1, 2, \dots, s$):

$$|P_{n_i}(x + \bar{h}_i, y_0) - P_{n_i}(x, y_0)| \leq |P_{n_\nu}(x + \bar{h}_i, y_0) - P_{n_\nu}(x, y_0)|$$

ne viene:

$$m[e_p(y_0)] < 32 L^{-1} P_{n_\nu}(1, y_0) \leq 32 L^{-1} V_x^{*(n_\nu)}(1, y_0).$$

Da qui, integrando, si ha:

$$m(e_p) = \int_0^1 m[e_p(y)] dy \leq 32 L^{-1} \int_0^1 V_x^{*(n_\nu)}(1, y) dy < 32 \cdot K \cdot L^{-1} < \frac{\sigma}{12}.$$

In modo analogo si prova che l'insieme (misurabile) e_q dei punti di Q in cui è soddisfatta, per qualche valore di n , la disuguaglianza

$$q_n(x, y) > \frac{1}{8} L, \text{ è tale che } m(e_q) < \frac{\sigma}{12}.$$

Dunque si ha, ponendo $e = e_p + e_q$ e perciò $m(e) < \frac{\sigma}{6}$, per la seconda delle uguaglianze (1), qualunque sia n :

$$\left| \frac{f_n(x+h, y) - f_n(x, y)}{h} \right| \leq \frac{1}{8} L + \frac{1}{8} L = \frac{1}{4} L$$

essendo (x, y) e $(x+h, y)$ due punti qualunque di Q , non appartenenti all'insieme e .

In modo analogo si prova che esiste un insieme e' di punti di Q con $m(e') < \frac{\sigma}{6}$ in modo che, qualunque sia n , si abbia:

$$\left| \frac{f_n(x, y+k) - f_n(x, y)}{k} \right| \leq \frac{1}{4} L$$

essendo (x, y) e $(x, y+k)$ due punti qualunque di Q non appartenenti all'insieme e' .

Perciò, esiste un insieme H di punti di Q tale che $m(Q) - m(H) < \frac{\sigma}{3}$ in modo che, quando (x, y) appartiene ad H valga la (2) se anche $(x + h, y)$ appartiene ad H e valga pure la (3) se anche $(x, y + k)$ appartiene ad H .

Poichè la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi limitate, esiste una costante positiva M e un insieme misurabile A_n (eventualmente variabile con n) di punti di Q in modo che $m(Q) - m(A_n) < \frac{\sigma}{3}$

e $|f_n(x, y)| \leq M$ qualunque sia il punto (x, y) di A_n . Sia \bar{E}_n l'insieme (misurabile) dei punti comuni ad H e a A_n . È $m(\bar{E}_n) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$. Si

ponga $\bar{E} = \sum \bar{E}_n$. \bar{E} è misurabile. Si dica Γ il sistema delle rette parallele all'asse x ognuna delle quali contenga punti di \bar{E} . Su quasi tutte le rette del sistema Γ \bar{E} sega insiemi misurabili (linearmente). Sia $y = \bar{y}$ una di queste rette (su cui cioè \bar{E} sega un insieme misurabile) e per ogni punto (\bar{x}, \bar{y}) di essa si indichi con $m(\bar{x}, \bar{y}, j)$ la misura dell'insieme dei punti di \bar{E} che cadono nell'intervallo di ampiezza $\frac{2}{j}$ della retta $y = \bar{y}$ e avente il

centro in (\bar{x}, \bar{y}) . Si ponga $\varphi_j(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{j}{2} m(\bar{x}, \bar{y}, j)$. Le funzioni $\varphi_1(x, y)$,

$\varphi_2(x, y), \dots, \varphi_j(x, y), \dots$ sono definite quasi dappertutto in \bar{E} e sono ivi quasi continue ⁽¹⁵⁾. Tenendo presente il teorema del LEBESGUE secondo il quale quasi tutti i punti di un insieme lineare misurabile sono punti di densità (lineare) 1, ne viene che la successione $\{\varphi_j(x, y)\}$ converge quasi dappertutto in \bar{E} verso il valore 1 e perciò, per il noto teorema di SEVERINI-EGOROFF, si può determinare un insieme E^* (chiuso) di punti di \bar{E} tale che, ponendo $E_n^* = E^* \cdot \bar{E}_n$ ⁽¹⁶⁾ si abbia, qualunque sia n , $m(E_n^*) > m(\bar{E}) - \frac{\sigma}{3} > m(Q) - \sigma$, e in cui la convergenza di $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_j(x, y), \dots$ verso il valore 1 è uniforme.

È dunque possibile trovare un $\bar{j} > 8$ tale che, per ogni indice $j \geq \bar{j}$ e per ogni punto (x, y) di E^* e perciò di E_n^* , per ogni valore di n , si abbia

(15) Infatti, detta $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme \bar{E} , è:

$$\varphi(x, y) = \frac{j}{2} \left\{ \int_0^{x + \frac{1}{j}} \varphi(x, y) dx - \int_0^{x - \frac{1}{j}} \varphi(x, y) dx \right\}.$$

(16) Si ricordi che è $E^* \subset \bar{E}$ e $E = \sum E_n$

$\varphi_j(x, y) > \frac{8}{9}$; e allora, se è $0 < \delta \leq \frac{1}{j}$; posto $\frac{1}{j_1 + 1} < \delta \leq \frac{1}{j_1}$, si avrà per un qualunque punto (x', y') di E_n^* , e indicando con $\bar{E}_n(2\delta)$ l'insieme dei punti di \bar{E}_n che cadono nell'intervallo $(x' - \delta, x' + \delta)$ della retta $y = y'$:

$$\begin{aligned} m[\bar{E}_n(2\delta)] &\geq m(x', y', j_1) - \left(\frac{2}{j_1} - \frac{2}{j_1 + 1} \right) = m(x', y', j_1) - \frac{2}{j_1(j_1 + 1)} > \\ &> \frac{8}{9} \frac{2}{j_1} - \frac{2}{9j_1} = \frac{7}{9} \frac{2}{j_1} \geq \frac{7}{9} \cdot 2\delta. \end{aligned}$$

Se ora (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E_n^* con $|x - x'| \leq \frac{1}{j}$, i punti di \bar{E}_n che cadono nell'intervallo di estremi $(x', y'), (x, y)$, come pure quelli che cadono nell'intervallo (di uguale ampiezza $\bar{\delta} = |x - x'|$, di estremi $(x, y), (x', y)$, costituiscono due insiemi ciascuno di misura $> \frac{5}{9} \cdot \bar{\delta}$.

Ne segue che esisterà necessariamente una retta $x = x^*$, con x^* compreso fra x e x' , tale che i punti (x^*, y') e (x^*, y) appartengono entrambi a E_n^* . È allora, per le (2) e (3) (poichè E_n^* e E_n appartengono ad H):

$$\begin{aligned} \frac{|f_n(x, y) - f_n(x', y')|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} &\leq \left| \frac{f_n(x', y') - f_n(x^*, y')}{x' - x^*} \right| + \\ &+ \left| \frac{f_n(x^*, y') - f_n(x^*, y)}{y' - y} \right| + \left| \frac{f_n(x^*, y) - f_n(x, y)}{x^* - x} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L = \frac{3}{4} L < L. \end{aligned}$$

Se infine, (x, y) e (x', y') sono due punti di E_n^* per cui è $|x - x^*| > \frac{1}{j}$ si ha (poichè E_n^* appartiene a A_n)

$$\left| \frac{f_n(x, y) - f_n(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \right| \leq 2M\bar{j}.$$

Se si dice ora A il più grande dei due numeri L e $2M\bar{j}$, si conclude che, fissato arbitrariamente un numero $\sigma > 0$, è stato possibile determinare

un insieme E_n^* di punti di Q tale che $m(Q) - m(E_n^*) < \sigma$ e un numero positivo A , indipendente da n , per cui è:

$$|f_n(x, y) - f_n(x', y')| < A \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

qualunque siano i punti (x, y) e (x', y') di E_n^* .

Il teorema è così dimostrato.

3. — CAFIERO ha stabilito, fra l'altro, nella prima delle note lincee sopra citate, il seguente ⁽¹⁷⁾:

TEOREMA: Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue, generalmente a variazione limitata in Q , ivi ugualmente quasi limitate, ed esista una costante positiva K tale che per ogni n si abbia:

$$(1) \quad \int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y) dy < K.$$

Allora dalla successione data, se ne può estrarre una convergente quasi dappertutto in Q , verso una funzione generalmente a variazione limitata.

Questo risultato di CAFIERO si deduce anche dal nostro teorema dimostrato nel n. precedente, tenendo presente l'osservazione del n. 1 e un teorema di FRÉCHET ⁽¹⁸⁾, secondo il quale da ogni successione di funzioni quasi continue in Q , ivi ugualmente quasi limitate e ugualmente quasi continue, si può estrarre una successione di funzioni convergente in misura e perciò, per un teorema di F. RIESZ, quasi dappertutto in Q . Lo stesso ragionamento di CAFIERO prova ⁽¹⁹⁾ poi che la funzione limite è generalmente a variazione limitata.

⁽¹⁷⁾ Cfr. loc. cit. (5), Nota I, pp. 308-310, n. 2.

⁽¹⁸⁾ Cfr. loc. cit. (6), p. 29; cfr. anche B. PERTINIO: *Sulla convergenza puntuale delle successioni di insiemi di funzioni quasi continue*. Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, Roma, vol. VI, pp. 478-503, p. 491, 1947.

⁽¹⁹⁾ Cfr. loc. cit. (5), Nota I, pp. 310-311, n. 3.