ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LESKY PETER

Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro elastico a sezioni ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 255-267
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_255_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DETERMINAZIONE DEGLI STATI DI TENSIONE PIANA IN UN CILINDRO ELASTICO A SEZIONI ELLITTICHE (*)

di **Lesky Peter** (Roma)

1. — A. Ghizzetti dimostra nel suo lavoro « Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico » [1] che il problema elastico piano, nel quale le componenti degli sforzi verificano le

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0\,; \quad t_{xx}\, t_{yy}\, t_{xy} \text{ indipendenti da } z \tag{1}$$

è più elementare di quello delle deformazioni piane e dipende soltanto dalla determinazione di una funzione armonica e di tre costanti arbitrarie.

Tenendo conto della (1) le componenti u, v, w dello spostamento sono

$$\begin{aligned} u &= \alpha z^2 - \alpha x^2 + 2\frac{\beta}{\sigma} x y - \frac{\alpha}{\sigma} y^2 + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\sigma}\gamma x + 2\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x y) - \varphi(x y)\,; \\ v &= \beta z^2 - \frac{\beta}{\sigma} x^2 + 2\frac{\alpha}{\sigma} x y - \beta y^2 + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\sigma}\gamma y - 2\frac{1-\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x y) + \psi(x y)\,; \\ w &= -2 z(\alpha x + \beta y + \gamma) \end{aligned} \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo — Roma.

[1] Annali di Matematica pura e applicata 1949, Vol. I, Serie IV.

e i corrispondenti sforzi sono dati dalle formule:

$$
\begin{aligned}
t_{xx} &= \frac{E}{\sigma}(2\beta y + \gamma) + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\
t_{yy} &= \frac{E}{\sigma}(2\alpha x + \gamma) - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\
t_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Perchè il sistema degli sforzi (3) sia in equilibrio, deve essere, per le componenti delle forze di massa $X(xy)$, $Y(xy)$, $Z(xy)$,

$$X = -\frac{\partial F(xy)}{\partial y}; \quad Y = \frac{\partial F(xy)}{\partial x}; \quad Z = 0.$$

Nelle formule (2) (3) $\alpha\,\beta\,\gamma$ sono costanti arbitrarie, $\Phi(xy)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 \Phi = F(xy)$$

e $\varphi + i\psi$ è una arbitraria funzione analitica di $x + iy$, σ è il coefficiente di POISSON e E designa il modulo di YOUNG.

Facendo seguito al lavoro di M. G. PLATONE « Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico » [2] nel quale si trova la soluzione di un problema particolare di tensione piana in un cilindro retto elastico le cui sezioni con i piani $z = \text{cost.}$ $(0 \leqq z \leqq h)$ sono cerchi, mi propongo di risolvere il problema per il caso, ove queste sezioni sono ellissi.

D sia il dominio piano sezione del cilindro coi piani $z = \text{const.}$, FD la sua frontiera, s l'ascissa curvilinea su FD e n la normale interna su FD. Calcoliamo in tutto il cilindro l'espressione degli sforzi sotto l'ipotesi che sia assegnata in ogni punto di FD la componente normale dello sforzo

$$t_{nn} = T(s). \tag{4}$$

In virtù della nota formula

$$t_{nn} = t_{xx}\cos^2(nx) + 2\,t_{xy}\cos(nx)\cos(ny) + t_{yy}\cos^2(ny)$$

---

[2] Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 1951, Vol. V, Serie III.

ponendo

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\cos 2(n\,x) + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen} 2(n\,x)$$

$$\frac{d}{d\nu'} = -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen} 2(n\,x) + \frac{\partial}{\partial y}\cos 2(n\,x)$$

si ottiene, usando le (3)

$$t_{un} = \frac{E}{\sigma}\left[2\,\alpha\,x\operatorname{sen}^2(n\,x) + 2\,\beta\,y\cos^2(n\,x) + \gamma\right] + $$
$$+ \frac{d}{d\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{d\varphi}{d\nu}\,.$$

Sulla frontiera FD è data $t_{nn} = T(s)$, ne segue quindi

(5)
$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1+\sigma}{E}\left\{\frac{E}{\sigma}\left[2\,\alpha\,x\operatorname{sen}^2(n\,x) + 2\,\beta\,y\cos^2(n\,x) + \gamma\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{d\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - T(s)\right\} \equiv f(s)\,;$$

cioè il problema è ridotto alla costruzione di una funzione armonica φ in D, la cui derivata obliqua su FD secondo la direzione ν è data dalla (5).

2. — Fra le coordinate confocali ellittiche sussistono le relazioni

(6)
$$x = \left(\frac{1+q}{2}\varrho + \frac{1-q}{2}\frac{1}{\varrho}\right)\cos\theta \qquad \varrho_0 \leqq \varrho \leqq 1$$
$$y = \left(\frac{1+q}{2}\varrho - \frac{1-q}{2}\frac{1}{\varrho}\right)\operatorname{sen}\theta \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Per $\varrho = 1$ si ottiene l'ellisse FD il cui asse maggiore è uno e l'asse minore è q. Il valore

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{1-q}{1+q}}$$

corrisponde all'ellisse degenerato nel segmento focale FF'. Ponendo

$$u = \frac{1+q}{2}\varrho + \frac{1-q}{2}\frac{1}{\varrho}\,; \quad v = \frac{1+q}{2}\varrho - \frac{1-q}{2}\frac{1}{\varrho}\,,$$

si trova, tenuto conto delle (6)

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1}{v^2\cos^2\theta + u^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left\{\varrho\, v\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + u\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\}.$$

Infine si pone

$$F(\theta) = f(\theta)\,[q^2\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta] \tag{7}$$

e il problema in coordinate ellittiche confocali si presenta nella forma

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 & (\text{per } \varrho_0 < \varrho < 1) \\[2ex] \varrho\cos\theta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = F(\theta) & (\text{per } \varrho = 1), \end{cases}$$

ove $F(\theta)$ è una data funzione che supponiamo continua ed a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ con l'ulteriore condizione $F(0) = F(2\pi)$.

Le (8) non sono sufficiente per determinare univocamente la soluzione. Come ha indicato A. GHIZZETTI nel lavoro « Sui problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per l'ellisse » [3] la φ deve soddisfare alle ulteriori condizioni

$$(9)\quad \begin{cases} \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \varphi(\varrho\,\theta) \text{ deve essere una funzione pari di } \theta \\[2ex] \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \dfrac{\partial\varphi(\varrho\,\theta)}{\partial\varrho} \text{ deve essere una funzione dispari di } \theta. \end{cases}$$

Inoltre la $F(\theta)$ deve soddisfare a delle condizioni di compatibilità, che saranno indicate in seguito, le quali porteranno a fissare i valori di α, β e γ delle formule (5).

3. — Proponiamoci di determinare i coefficienti di FOURIER della $\varphi(\varrho\,\theta)$ come funzione di Θ. Tali coefficienti di FOURIER sono

$$a_k(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varrho\,\theta)\cos k\theta\, d\theta \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varrho\,\theta)\,\mathrm{sen}\, k\theta\, d\theta \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

---

[3] Rendiconti del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, Vol. XX (1951).

e soddisfano alle equazioni differenziali

$$a_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}\, a_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2}\, a_k(\varrho) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}\, b_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2}\, b_k(\varrho) = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

le cui soluzioni sono

$$a_0(\varrho) = A_0 + B_0 \log \varrho \qquad \begin{array}{l} a_k(\varrho) = A_k\, \varrho^k + B_k\, \varrho^{-k} \\ b_k(\varrho) = C_k\, \varrho^k + D_k\, \varrho^{-k} \end{array} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Per determinare le costanti arbitrarie $A_k\, B_k\, C_k$ e D_k osserviamo che le (9) si traducono nelle $a_0'(\varrho_0) = 0$; $b_k(\varrho_0) = 0$; $a_k'(\varrho_0) = 0$, vale a dire nelle

$$B_0 = 0\, ; \quad B_k = A_k\, \varrho_0^{2k}\, ; \quad D_k = - C_k\, \varrho_0^{2k}\, . \tag{10}$$

Rimane la determinazione delle costanti A_k e C_k in base alla condizione per $\varrho = 1$. Posto per $\varrho = 1$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[q \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \begin{matrix} \cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta \end{matrix}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \begin{matrix} \cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta \end{matrix}\, d\theta = \begin{matrix} g_k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ h_k & k = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

si ottiene

$$q\,[a_{k+1}'(1) + a_{k-1}'(1)] - [(k+1)\, a_{k+1}(1) - (k-1)\, a_{k-1}(1)] = 2\, g_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$q\,[b_{k+1}'(1) + b_{k-1}'(1)] - [(k+1)\, b_{k+1}(1) - (k-1)\, b_{k-1}(1)] = 2\, h_k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

e si trova per

$$k = 0: \quad A_1 = - \frac{g_0}{2(1-q)}\, ; \quad k = 1: \quad A_2 = - \frac{g_1}{(1-q)(1+\varrho_0^2)}\, ,$$

$$C_2 = - \frac{h_1}{(1-q)(1-\varrho_0^2)}\, ;$$

$$k \geqq 2: \quad \begin{array}{l} (1+q)(k-1)\, A_{k-1} - (1-q)(k+1)\, A_{k+1} = \dfrac{2\, g_k}{1+\varrho_0^{2k}}\, , \\ (1+q)(k-1)\, C_{k-1} - (1-q)(k+1)\, C_{k+1} = \dfrac{2\, h_k}{1-\varrho_0^{2k}}\, . \end{array} \tag{11}$$

Si ricava facilmente

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
A_{2l} &= -\frac{1}{l\,(1+q)}\sum_{k=1}^{l}\frac{g_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2}\,(1+\varrho_0^{4k-2})}\,;\\
A_{2l+1} &= -\frac{1}{(2\,l+1)\,(1+q)}\left\{\frac{g_0}{2\,\varrho_0^{2l+2}}+2\sum_{k=1}^{l}\frac{g_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2}\,(1+\varrho_0^{4k})}\right\}\\
C_{2l} &= -\frac{1}{l\,(1+q)}\sum_{k=1}^{l}\frac{h_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2}\,(1-\varrho_0^{4k-2})}\,;\\
C_{2l+1} &= \frac{C_1}{(2\,l+1)\,\varrho_0^{2l}}-\frac{2}{(2\,l+1)\,(1+q)}\sum_{k=1}^{l}\frac{h_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2}\,(1-\varrho_0^{4k})}\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che per i coefficienti di FOURIER devono valere

$$\lim_{k\to\infty} a_k(\varrho)\to 0\,;\quad \lim_{k\to\infty} b_k(\varrho)\to 0$$

per ogni ϱ di $(0\,,1)$. Siccome si ha $a_k(\varrho)=A_k\,(\varrho^k+\varrho_0^{2k}\,\varrho^{-k})$, $b_k(\varrho)=$ $=C_k\,(\varrho^k-\varrho_0^{2k}\,\varrho^{-k})$ si vede che le predette condizioni sono verificate per $\varrho=1$ soltanto se $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=\lim\limits_{k\to\infty} C_k=0$ e questo dà le seguenti quattro condizioni

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_{2k-1}}{1+\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2}=0\,;\quad \frac{g_0}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_{2k}}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k}=0\,;\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_{2k-1}}{1-\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2}=0\,;\quad C_1-\frac{2}{1+q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_{2k}}{1-\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2}=0\,.
\end{aligned}
$$

Le prime tre sono condizioni di compatibilità del nostro problema; l'ultima assegna il valore della costante C_1. Tenendo conto delle (13) si ottengono per le altre costanti le espressioni

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
A_{2l+1} &= \frac{2}{(2\,l+1)\,(1+q)}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{g_{2k}}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,,\\
A_{2l} &= \frac{1}{l\,(1+q)}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{g_{2k-1}}{1+\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,,\\
C_{2l+1} &= \frac{2}{(2\,l+1)\,(1+q)}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{h_{2k}}{1-\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}\,,\\
C_{2l} &= \frac{1}{l\,(1+q)}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{h_{2k-1}}{1-\varrho_0^{4k-2}}\,\varrho_0^{2k-2l-2}
\end{aligned}
$$

e la soluzione del problema ha la forma

$$
\begin{aligned}
\varphi(\varrho\,\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg\{ &\frac{4\,\varrho^{l}\,\varrho_0^{2k-2}}{l\,(1+q)}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right] \\
&+ \frac{4\,\varrho^{-l}\,\varrho_0^{2l+2k-2}}{l\,(1+q)}\left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1}\,\mathrm{sen}\,l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

e con una trasformazione formale

$$
\begin{aligned}
\varphi(\varrho\,\theta) &= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\,\cdot \\
&\cdot\Bigg\{\frac{2\varrho^{l}\,\varrho_0^{2k-2}}{(1+q)\,l\,(1-\varrho_0^{4l+8k-4})}\Big[\cos\,[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau-\theta)] - \\
&-\varrho_0^{2l+4k-2}\cos\,[(2_{2k-1})\,\tau + l\,(\tau+\theta)]\Big] + \frac{2\,\varrho^{-l}\,\varrho_0^{2l+2k-2}}{(1+q)\,l\,(1-\varrho_0^{4l+8k-4})}\,\cdot \\
&\cdot\Big[\cos\,[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau+\theta)] - \varrho_0^{2l+4k-2}\cos\,[(2\,k-1)\,\tau + l\,(\tau-\theta)]\Big]\Bigg\}\,d\,\tau
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ove la serie doppia rappresenta la funzione di GREEN $G(\varrho\,\theta\,\tau)$ del problema. Scriviamo ancora le condizioni di compatibilità nella forma

$$
\begin{gathered}
\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k}+1\right]d\,\tau = 0 \\
\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\,(2\,k+1)\,\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,(1+\varrho_0^{2})\,\varrho_0^{2k}+\cos\tau\right]d\,\tau = 0\,, \\
\int_0^{2\pi} F(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2\,k+1)\,\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,(1-\varrho_0^{2})\,\varrho_0^{2k}+\mathrm{sen}\,\tau\right]d\,\tau = 0
\end{gathered}
\tag{17}
$$

4. — Perciò se il nostro problema, con le tre condizioni di compatibilità, ammette soluzione, tale soluzione è necessariamente **unica** e non può che essere data dalla formula (15) o (16). Stabiliamo ora il teorema d'esistenza verificando che effettivamente la (15) o (16) soddisfano a tutte le

condizioni del problema, nell'ipotesi che valgano le (17). A tale scopo dobbiamo dapprima dimostrare che la serie che rappresenta $\varphi(\varrho\,\theta)$ converge uniformemente in D e su FD e che le sue derivate parziali del primo e del secondo ordine convergono uniformemente in ogni insieme chiuso interno a D.

Consideriamo l'espressione (15). Facendo l'ipotesi che $F(\theta)$ sia a variazione limitata, per i suoi coefficienti di FOURIER si hanno le maggiorazioni

$$|g_l| < \frac{C}{l}; \qquad |h_l| < \frac{C}{l},$$

ove C è una costante positiva. Ne segue

$$\left| \frac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q} \left\{ \frac{\varrho^l}{l} \left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1}\operatorname{sen} l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] + \left(\frac{\varrho_0}{l}\right)^l \frac{\varrho_0^l}{l} \left[\frac{g_{l+2k-1}\cos l\,\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1}\operatorname{sen} l\,\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\} \right| < D \left[\frac{\varrho^l}{l\,(l+2k-1)} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^l \frac{\varrho_0^l}{l\,(l+2k-1)} \right] \tag{18}$$

ove D è una costante positiva opportuna. Si vede immediatamente che la serie (18) converge per $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq 1$. Ma questo significa, che la serie (15) converge assolutamente e quindi anche uniformemente in D e su FD.

Per le derivate parziali rispetto ϱ si ottiene

$$\frac{\partial \dfrac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q}\{\ldots\}}{\partial\varrho} < E\left[\frac{\varrho^{l-1}}{l+2k-1} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{l+1} \frac{\varrho_0^{l-1}}{l+2k-1}\right];$$

$$\frac{\partial^2 \dfrac{4\,\varrho_0^{2k-2}}{1+q}\{\ldots\}}{\partial\varrho^2} < F\left[\varrho^{l-2} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{l+2} \varrho_0^{l-2}\right]$$

ove E e F sono costanti positive. Analoghe formule si trovano per le derivate rispetto a θ. Per $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq \varrho^* < 1$ sono convergenti anche queste maggioranti. Su FD invece $(\varrho = 1)$ la maggiorante per le prime derivate non è convergente.

Per verificare le condizioni sul contorno esistono due possibilità. Si suppone $F(\theta)$ derivabile per $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, allora per i coefficienti di FOURIER valgono le maggiorazioni

$$|G_l| < \frac{C}{l^2}; \qquad |H_l| < \frac{C}{l^2}$$

che assicurano ovviamente la convergenza uniforme delle serie che rappresentano le derivate prime anche sul contorno.

Ma si può fare a meno di questa ipotesi aggiuntiva, ragionando come segue.

Ponendo

$$u(\varrho\,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\frac{d}{d\nu}\,G(\varrho\,\theta\,\tau)\,d\tau$$

si deve mostrare che vale la

$$\lim_{P\to Q} u(P) = F(Q) \tag{19}$$

ove P indica un punto qualsiasi di D e Q un punto qualsiasi su FD. La derivata della funzione di GREEN rispetto a ν in D è

$$\begin{aligned}\frac{dG}{d\nu} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg\{&\varrho^{l+1}\varrho_0^{2k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}+\right.\\&\left.+\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\\&-\varrho^{1-l}\varrho_0^{2l+4k-2}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\\&-\varrho^{l-1}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\\&+\varrho^{-l-1}\varrho^{2l+2k}\left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}}-\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Introducendo le condizioni di compatibilità (17) si trova

$$\begin{aligned}u(\varrho\,\theta) = {}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\,d\tau+\\&+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\varrho^k\left[\frac{\cos k\tau\cos k\theta}{1+\varrho_0^{2k}}+\frac{\operatorname{sen} k\tau\operatorname{sen} k\theta}{1-\varrho_0^{2k}}\right]\\&+\varrho^{-k}\varrho_0^{2k}\left[\frac{\cos k\tau\cos k\theta}{1+\varrho_0^{2k}}-\frac{\operatorname{sen} k\tau\operatorname{sen} k\theta}{1-\varrho_0^{2k}}\right]\Bigg\}\,d\tau,\end{aligned}$$

ma questa formula dà la soluzione del problema di DIRICHLET nel caso dell'ellisse, ove sono dati i valori della funzione $F(\theta)$ sulla frontiera FD [4]. Questo significa che la condizione (19) è ovunqne soddisfatta.

5. — Individuata in D la funzione armonica $\varphi(\varrho\, \theta)$ a meno di una costante additiva procediamo al calcolo delle tre costanti $\alpha\, \beta\, \gamma$. Consideriamo il caso di forze di massa nulle. Si può porre (vedi 1).

$$F(x\, y) = 0\,; \qquad \Phi(x\, y) = 0\,,$$

in tale ipotesi per (5) si ha

$$F(\theta) = \frac{1+\sigma}{\sigma}\{\operatorname{sen} 2\,\theta\,(\beta\, q^3 \cos\theta + \alpha \operatorname{sen}\theta) + \gamma\,(q^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\}$$
$$- \frac{1+\sigma}{E}\, T(\theta)\,(q^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,.$$

Applicando le tre condizioni della compatibilità si ottiene

$$\alpha = \frac{\sigma\,(1+3\,q^2)}{2\,q^2\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2) + \cos\tau\right]d\,\tau$$

$$\beta = \frac{\sigma\,(3+q^2)}{2\,q^3\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\,k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2) + \operatorname{sen}\tau\right]d\,\tau$$

$$\gamma = \frac{\sigma\,(1+q^2)}{4\,q^2\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T(\tau)}{E}(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k} + 1\right]d\,\tau$$

e la $\varphi(\varrho\,\theta)$ diventa

$$\varphi(\varrho\,\theta) = A_0 + \frac{1+\sigma}{E\,\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\,(q^2\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau)\,.$$
$$\cdot\Bigg\{-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(2\,k+1)\,\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2) + \cos\tau\right]\frac{\cos 2\,\theta}{8\,q^2}\,[\varrho^2(1+q^2) + \varrho^{-2}(1-q^2)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\,k+1)\,\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}}\,\varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2) + \operatorname{sen}\tau\right]\frac{\operatorname{sen} 2\,\theta}{8\,q}\,[\varrho^2(1+q)^2 - \varrho^{-2}(1-q)^2]$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4\cos 2\,k\,\tau}{1+\varrho_0^{4k}}\,\varrho_0^{2k} + 1\right]\frac{(1-q^2)\cos\theta}{8\,q^2}\,[\varrho\,(1+q) + \varrho^{-1}(1-q)] - G(\varrho\,\theta\,\tau)\Bigg\}d\tau.$$

---

(4) M. PICONE « *Analisi superiore* » pag. 361 e. s. or nota (3).

Dalle espressioni delle

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} .$$

$$\cdot \left\{ \varrho^{l+1} \varrho_0^{2k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau \operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right.$$

$$- \varrho^{-l+1} \varrho_0^{2l+2k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$- \varrho^{l-1} \varrho_0^{2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau \operatorname{sen}(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$\left. + \varrho^{-l-1} \varrho_0^{2l+2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\};$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} .$$

$$\cdot \left\{ \varrho^{l+1} \varrho_0^{2k-2} \left[\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\cos(2k-1+l)\tau \operatorname{sen}(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right.$$

$$- \varrho^{-l+1} \varrho_0^{2l+2k-1} \left[\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{\cos(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$- \varrho^{l-1} \varrho_0^{2k} \left[\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\cos(2k-1+l)\tau \operatorname{sen}(l+1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$\left. + \varrho^{-l-1} \varrho_0^{2l+2k} \left[\frac{\operatorname{sen}(2k-1+l)\tau\cos(l-1)\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{\cos(2k-1+l)\tau\operatorname{sen}(l-1)\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\}$$

si ottengono le espressioni degli sforzi:

$$t_{xx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau)\,(q^2 \cos^2 \tau + \operatorname{sen}^2 \tau) .$$

$$\cdot \left\{ \frac{[\varrho^3(1+q)^3 + \varrho^{-3}(1-\varrho)^3]\cos\theta - (1-q^2)[\varrho(1+q) + \varrho^{-1}(1-q)]\cos 3\theta}{8q^2\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta\right]} \right. .$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]+$$

$$+\frac{3[\varrho^3(1+q)^3-\varrho^{-3}(1-q)^3]\operatorname{sen}\theta-3(1-q^2)[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)]\operatorname{sen}3\theta}{8q^3[\ldots]}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2q^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos 2k\tau}{1+\varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k}+1\right]+\frac{\partial G}{\partial x}\Bigg\} d\tau,$$

$$t_{yy}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)(q^2\cos^2\tau+\operatorname{sen}^2\tau).$$

$$\cdot\left\{\frac{3[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3]\cos\theta-3(1-q^2)[\varrho(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)]\cos 3\theta}{8\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta\right]}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]+$$

$$+\frac{[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3]\operatorname{sen}\theta-(1-q^2)[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)]\operatorname{sen}3\theta}{8q[\ldots]}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos 2k\tau}{1+\varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k}+1\right]-\frac{\partial G}{\partial x}\Bigg\} d\tau,$$

$$t_{xy}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)(q^2\cos^2\tau+\operatorname{sen}^2\tau).$$

$$\cdot\left\{\frac{[\varrho(1+q)-\varrho^{-1}(1-q)](1-q^2)\operatorname{sen}3\theta-[\varrho^3(1+q)^3-\varrho^{-3}(1-q)^3]\operatorname{sen}\theta}{8q^2\left[\left(\frac{1+q}{2}\varrho\right)^2+\left(\frac{1-q}{2\varrho}\right)^2-\frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta\right]}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1+\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1+\varrho_0^2)+\cos\tau\right]+$$

$$+\frac{[\varrho(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)](1-q^2)\cos 3\theta-[\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3]\cos\theta}{8q[\ldots]}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1-\varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1-\varrho_0^2)+\operatorname{sen}\tau\right]+\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right\} d\tau .$$

È immediato constatare, che per $q=1$, $\varrho_0=0$ tutte le formule precedenti si riducono a quelle date da M. G. PLATONE nel caso del cilindro a sezioni circolari (vedi op. cit. in (2)).