

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI RICCI

## **Sul coefficiente di Viggo Brun**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 7, n° 1-2 (1953), p. 133-151*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_1-2\\_133\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_133_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUL COEFFICIENTE DI VIGGO BRUN

DI GIOVANNI RICCI (Milano)

## 1. Il coefficiente di Viggo Brun. — Sia

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

la successione crescente nei numeri primi: sulla distribuzione delle coppie di interi primi a differenza fissa  $2a$  sussiste un teorema di VIGGO BRUN [1,2] al quale, nel caso che ci interessa, possiamo dare la forma seguente <sup>(1)</sup>

« Sia  $0 < \delta \leq 1$ ,  $a$  intero  $\geq 1$ . Denotiamo con  $Z_\delta(\xi; 2a)$  il numero delle coppie  $p_i, p_j$  di interi primi, tali che

$$(1.1) \quad p_j - p_i = 2a, (1 - \delta)\xi < p_i \leq \xi, 2a \leq \delta\xi.$$

Allora, per  $\xi \geq \xi_0(\delta)$  abbastanza grande, risulta

$$(1.2) \quad Z_\delta(\xi; 2a) < c \prod_{3 \leq p|a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta\xi}{\log^2 \xi},$$

essendo  $c$  costante assoluta (indipendente da  $\xi, \delta, a$ )».

Poniamo, per abbreviare la scrittura

$$(1.3) \quad \Phi(a) = \prod_{3 \leq p|a} \frac{p-1}{p-2}$$

e anche

$$(1.4) \quad Z_\delta(\xi; 2a) = z_\delta(\xi; 2a) \cdot \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi$$

la funzione  $z_\delta(\xi; 2a)$  risulta, in un certo senso, la funzione  $Z_\delta(\xi; 2a)$  normalizzata).

---

<sup>(1)</sup> Vedi anche G. RICCI [4] p. 79-84: si tenga conto che in questo caso  $F(x) = x(x+2a)$ ,  $f=2$ ,  $h(p)=1$  per  $p \mid 2a$ ,  $h(p)=2$  per gli altri  $p$ .

Siano  $\mu, \lambda$  numeri reali,  $0 \leq \mu < \lambda$ ; denotiamo con

$$B_\delta(\mu, \lambda)$$

l'estremo inferiore dei numeri  $c'$  pei quali . . .

$$\begin{cases} Z_\delta(\xi; 2a) < c' \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi \\ \mu \log \xi < 2a \leq \lambda \log \xi \end{cases}$$

pur di assumere  $\xi \geq \xi_0(\delta, c')$  abbastanza grande. I numeri  $c'$  esistono poichè ogni numero  $c$  del Teorema di V. BRUN sopra ricordato è un  $c'$ .

Diremo *coefficiente di VIGGO BRUN* la funzione  $B_\delta(\mu, \lambda)$  così definita, la quale risulta

$$\begin{cases} B_\delta(\mu, \lambda) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} z_\delta(\xi; 2a) \\ (\mu \log \xi < 2a \leq \lambda \log \xi) \end{cases}$$

ed è caratterizzata dalla seguente proprietà:

*Fissati  $\delta, \mu, \lambda$  ( $0 < \delta \leq 1, 0 \leq \mu < \lambda$ ),  $B_\delta(\mu, \lambda)$  è il minimo numero reale non negativo tale che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , si può determinare  $\xi_0 = \xi_0(\delta, \varepsilon)$  in modo che per*

$$\xi \geq \xi_0, \quad \mu \log \xi < 2a \leq \lambda \log \xi$$

*risulta*

$$(1.5) \quad Z_\delta(\xi; 2a) < \{B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon\} \cdot \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi$$

cioè

$$z_\delta(\xi; 2a) < B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon.$$

La funzione  $B_\delta(\mu, \lambda)$  possiede evidentemente una monotonia, rispetto all'intervallo  $(\mu, \lambda)$ , nel senso che: da  $\mu \leq \mu' < \lambda' \leq \lambda$  segue  $B_\delta(\mu', \lambda') \leq B_\delta(\mu, \lambda)$  (infatti le disuguaglianze (1.5) per  $(\mu', \lambda')$  sono contenute fra tutte quelle per  $(\mu, \lambda)$ ). Inoltre per  $\mu < \tau < \lambda$  è

$$B_\delta(\mu, \tau), B_\delta(\tau, \lambda) \leq B_\delta(\mu, \lambda) \leq B_\delta(\mu, \tau) + B_\delta(\tau, \lambda).$$

Sulla dipendenza di  $B_\delta(\mu, \lambda)$  dal parametro  $\delta$  possiamo fare le seguenti osservazioni.

Sia  $0 < \delta' < \delta \leq 1$ ; allora evidentemente  $Z_{\delta'}(\xi; 2a) \leq Z_\delta(\xi; 2a)$  e pertanto

$$z_{\delta'}(\xi; 2a) \cdot \delta' \leq z_\delta(\xi; 2a) \cdot \delta$$

e quindi

$$(1.6) \quad B_{\delta'}(\mu, \lambda) \leq B_\delta(\mu, \lambda) \cdot \delta / \delta'.$$

Consideriamo  $\xi'$  associato a  $\xi$  col vincolo

$$(1.7) \quad (1 - \delta) \xi \leq (1 - \delta') \xi' < \xi' \leq \xi.$$

È evidente che l'opportuna scelta di  $\xi'$  può porre in rilievo l'intervallo  $((1 - \delta') \xi', \xi')$ , parte dell'intervallo  $((1 - \delta) \xi, \xi)$ , con la massima densità di coppie  $p_i, p_j$  enumerate in  $Z_\delta(\xi; 2a)$  e pertanto, con tale scelta, risulta

$$\frac{1}{\delta' \xi'} Z_{\delta'}(\xi'; 2a) \geq \frac{1}{\delta \xi} Z_\delta(\xi; 2a)$$

ed essendo  $\xi' \geq \xi(1 - \delta)/(1 - \delta')$  risulta

$$Z_{\delta'}(\xi'; 2a) \geq Z_\delta(\xi; 2a) (\delta' - \delta \delta') / (\delta - \delta \delta')$$

e passando alle funzioni  $z(\xi; a)$  si ricava

$$(1.8) \quad z_{\delta'}(\xi'; 2a) \geq z_\delta(\xi; 2a) (1 - \eta)^2 \cdot (\delta' - \delta \delta') / (\delta - \delta \delta'),$$

dove

$$\eta = \log \frac{1 - \delta'}{1 - \delta} / \log \xi.$$

È evidente che  $\eta \rightarrow 0$  per  $\xi \rightarrow +\infty$  e  $\delta' \rightarrow \delta -$  indipendentemente l'uno dall'altro.

Adesso osserviamo che, per  $\delta'$  abbastanza prossimo a  $\delta$  in guisa da avere  $\mu < \lambda(1 - \eta)$ , dalle (1.7) ricaviamo

$$\mu \log \xi' \leq \mu \log \xi < \lambda(1 - \eta) \log \xi \leq \lambda \log \xi'.$$

Poichè  $\eta \rightarrow 0$  per  $\xi \rightarrow +\infty$  fissato  $\lambda' < \lambda$  abbiamo dalle (1.8)

$$B_\delta(\mu, \lambda') \leq B_{\delta'}(\mu, \lambda).$$

Tenendo presenti le (1.6) e questa, ricaviamo la catena

$$B_\delta(\mu, \lambda -) \leq B_{\delta'}(\mu, \lambda) \leq B_\delta(\mu, \lambda) \delta / \delta'.$$

Passando al limite per  $\delta' \rightarrow \delta -$  otteniamo

$$B_\delta(\mu, \lambda -) \leq B_{\delta-}(\mu, \lambda) \leq B_\delta(\mu, \lambda).$$

dove i segni  $-$  stanno a indicare i limiti dalla sinistra.

2. **La congettura di Hardy e Littlewood.** — Nello studio sulle formule empiriche riguardanti il « problema di GOLDBACH », N. M. SHAH e B. M. WILSON [5] hanno introdotta la seguente costante

$$(2.1) \quad H = \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} = 0.6601 \dots$$

e G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD [3] hanno avanzata la seguente congettura:

« Per ogni intero  $a \geq 1$ , il numero  $Z_1(\xi; 2a)$  delle coppie  $p_i, p_j$  di interi primi, tali che

$$p_j - p_i = 2a, \quad 0 < p_i \leq \xi$$

è asintotico a

$$(2.2) \quad 2H \cdot \prod_{p \leq p|a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\xi}{\log^2 \xi}, \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty.$$

In altri termini:

$$(2.3) \quad z_1(\xi; 2a) \rightarrow 2H \quad \text{per } a \text{ fisso, } \xi \rightarrow +\infty.$$

Da questa congettura di HARDY e LITTLEWOOD si ricava immediatamente <sup>(2)</sup>

$$Z_\delta(\xi; 2a) \sim 2H \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi$$

$$(0 < \delta \leq 1, \quad a \text{ fisso, } \xi \rightarrow +\infty)$$

e quindi  $z_\delta(\xi; 2a) \rightarrow 2H$ , per  $a$  fisso e  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Consideriamo il piano delle due variabili  $(\xi; 2a)$ ; la funzione  $z_\delta(\xi; 2a)$  ci interessa nel campo piano limitato dalla curva logaritmica  $0 < 2a \leq \lambda \log \xi$  o, più in generale, dalle due curve logaritmiche

$$\frac{1}{2} \mu \log \xi < a < \frac{1}{2} \lambda \log \xi.$$

<sup>(2)</sup> Infatti

$$\begin{aligned} Z_\delta(\xi; 2a) &= Z_1(\xi; 2a) - Z_1((1-\delta)\xi; 2a) \\ &= 2H \Phi(a) \left\{ \frac{\xi}{\log^2 \xi} - \frac{(1-\delta)\xi}{\log^2((1-\delta)\xi)} \right\} + o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right) \\ &\sim 2H \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi. \end{aligned}$$

La validità della congettura citata sopra porta come conseguenza evidente

$$B_\delta(0, \lambda) \geq 2H$$

per ogni  $\delta > 0$  e per ogni  $\lambda > 0$ .

Sussisterebbe l'uguaglianza

$$B_\delta(\mu, \lambda) = 2H$$

come conseguenza della seguente ipotesi estesa:

« Il numero  $Z_1(\xi; 2a)$  delle coppie  $p_i, p_j$  di interi primi, tali che

$$p_j - p_i = 2a, \quad 0 < p_i \leq \xi$$

è asintotico a

$$2H \cdot \Phi(a) \cdot \xi / \log^2 \xi$$

per  $\xi \rightarrow +\infty$ , uniformemente rispetto all'intero  $a$  dell'intervallo

$$\frac{1}{2} \mu \log \xi \leq a \leq \frac{1}{2} \lambda \log \xi \text{ »}.$$

Che cosa si può dire riguardo al coefficiente  $B_\delta(\mu, \lambda)$ ? In questo lavoro stabiliremo dei teoremi che ne assegnano, in qualche modo, dei confini inferiori ponendoli in relazione con la costante  $H$  di SHAH e WILSON. Ma intanto ricordiamo una valutazione al disopra che costituisce uno dei più fecondi risultati nel campo della Teoria dei numeri; il miglioramento di tale valutazione forma uno dei più ardui problemi nello stesso campo.

Essendo  $B(0, \lambda)$  non decrescente al crescere di  $\lambda$ , esiste (ed è finito per il citato teorema di V. BRUN) il limite per  $\lambda \rightarrow +\infty$  della funzione stessa: ebbene, per ogni  $\lambda$  si ha

$$B_\delta(0, \lambda) \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} B_\delta(0, \lambda) \leq \bar{B}_\delta,$$

dove con  $\bar{B}_\delta$  abbiamo indicata una costante assoluta e precisamente l'estremo inferiore dei numeri  $c'$  pei quali vale

$$Z_\delta(\xi; 2a) < c' \Phi(a) \delta \xi / \log^2 \xi$$

per  $2a \leq \delta \xi$  e  $\xi \geq \xi_0(\delta, c')$  indipendente da  $a$ .

È la costante  $\bar{B}_\delta$  che ha costituito l'oggetto di maggiorazioni sempre più favorevoli: ricordiamo qui, fra le tante, la maggiorazione  $\bar{B}_\delta < 48H$  che è contenuta in un nostro lavoro inserito in questi Annali (vedi G. RICCI [4])

e che inquadra questo problema in un altro più generale riguardante i polinomi. Per arrivare a  $\bar{B}_\delta < 48 H$  con quello schema si ponga (v. p. 77)  $F(x) = x(x+2)$ ,  $f=2$ ,  $h(p) = 1$  (quando  $p \nmid 2a$ ),  $= 2$  (quando  $p$  non divide  $2a$ ): per il calcolo della costante  $\mu_F$  (vedi p. 79) abbiamo

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq \xi} \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \prod_{3 \leq p \leq \xi} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{3 \leq p \leq \xi} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2} \Phi(a) \cdot \prod_{3 \leq p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) \\ &= 2 \Phi(a) \cdot \prod_{p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \prod_{3 \leq p \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) \\ &\asymp \Phi(a) \cdot 2 e^{-2C} H / \log^2 \xi, \end{aligned}$$

dove  $C = 0.5772 \dots$  è la costante di EULER-MASCHERONI, e si deduce  $\mu_F = 2 e^{-2C} H \cdot \Phi(a)$ . D'altronde (vedi il Teorema del n. 4 a pag. 82 nel quale l'intervallo  $(0, \xi)$  può essere impiazzato dall'intervallo  $((1-\delta)\xi, \xi)$ ) sappiamo che

$$\bar{B}_\delta \cdot \Phi(a) \leq 2^f (1 + \tau(f))^f \sigma \mu_F = 8 (1 + \tau(2))^2 \sigma e^{-2C} H \Phi(a).$$

I valori numerici  $\tau(2) < 2.956$ ,  $\sigma < 1.21$ ,  $e^{-2C} < 0.316$  (vedi (2.2) a pag. 79 e (2.5) a pag. 80) conducono alla disuguaglianza  $\bar{B}_\delta < 48 H$ .

Attualmente è noto che  $\bar{B}_\delta \leq 16 H$  (vedi I. V. ČULANOVSKIĀ [7], H. N. SHAPIRO-J. WARGA [6]).

**3. Valutazioni al disotto per  $\bar{B}_\delta$  e  $B_\delta(\mu, \lambda)$ .** — Ci proponiamo di dimostrare i teoremi seguenti.

**TEOREMA I.** — Per ogni  $\delta$  fissato ( $0 < \delta \leq 1$ ) è  $\bar{B}_\delta \geq 2 H$ .

*Osservazione.* L'ipotesi di HARDY e LITTLEWOOD ci fornisce  $\bar{B}_\delta \geq 2 H$  e pertanto il nostro teorema è in perfetto accordo con tale ipotesi. Il risultato acquisito è

$$2 H \leq \bar{B}_\delta \leq 16 H.$$

*Dimostrazione.* Valutiamo in due modi diversi il numero  $\sum_{i,j} 1$  delle coppie  $(p_i, p_j)$  soddisfacenti alle condizioni

$$0 < p_i < p_j \leq \delta \xi, \quad (1 - \delta) \xi < p_i \leq \xi.$$

Abbiamo :

$$\sum_{i,j} 1 = \sum_i (\sum_j 1) = \sum_i \{ \pi(p_i + \delta \xi) - \pi(p_i) \}.$$

Veniamo a determinarne l'espressione asintotica nel caso  $\delta = 1$ ; per il caso  $0 < \delta < 1$  il procedimento sarà analogo e, anzi, più facile. Fissato  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , ripartiamo i numeri  $p_i$  nei due intervalli  $0 < p_i \leq \varepsilon \xi$ ,  $\varepsilon \xi < p_i \leq \xi$  e in corrispondenza la somma  $\sum_{i,j}$  nelle due somme  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ . Essendo  $p_i + \xi \leq 2\xi$  risulta

$$\pi(p_i + \xi) - \pi(p_i) \leq \pi(p_i + \xi) = (1 + \varepsilon + o(1)) \xi / \log \xi \quad \text{in } \Sigma_1$$

$$\gg (p_i + \xi - p_i + o(1)) / \log \xi \quad \text{in } \Sigma_2$$

e quindi

$$\Sigma_1 < \pi(\varepsilon \xi) \cdot (1 + \varepsilon + o(1)) \xi / \log \xi \sim \varepsilon (1 + \varepsilon) \xi^2 / \log^2 \xi,$$

$$\Sigma_2 = \{ \pi(\xi) - \pi(\varepsilon \xi) \} \cdot \{ \xi (1 + o(1)) / \log \xi$$

$$\sim (1 - \varepsilon) \xi^2 / \log^2 \xi.$$

Per la somma  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$  vale

$$(1 - \varepsilon - o(1)) (\xi / \log \xi)^2 < \Sigma < \{ \varepsilon (1 + \varepsilon) + 1 - \varepsilon + o(1) \} (\xi / \log \xi)^2$$

e per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$

$$\sum_{i,j} 1 \sim (\xi / \log \xi)^2.$$

Nel caso  $0 < \delta < 1$  si assuma  $\varepsilon = 1 - \delta$ : si presenta soltanto il secondo intervallo e  $\Sigma = \Sigma_2$  quindi

$$\sum_{i,j} 1 = \Sigma_2 = \{ \pi(\xi) - \pi((1 - \delta)\xi) \} \delta \xi (1 + o(1)) / \log \xi$$

$$\sim (\delta \xi / \log \xi)^2.$$

Questa espressione vale, pertanto, anche quando  $\delta = 1$ .

La somma  $\sum_{i,j} 1$  può essere maggiorata mediante il Lemma 2 (vedi n. 6): facendo in quel lemma  $\tau = 0$ ,  $\eta = \delta \xi / 2$ ,  $\beta = \bar{B}_\delta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  otteniamo

$$\sum_{i,j} 1 = K_\delta(\xi; 0, \delta \xi / 2) < \frac{\bar{B}_\delta + \varepsilon}{H} \cdot \frac{1}{2} \delta \xi \cdot \frac{\delta \xi}{\log^2 \xi}$$

$$< (\bar{B}_\delta + \varepsilon) / (2H) \cdot (\delta \xi / \log \xi)^2.$$

Confrontando questa ultima espressione con la precedente otteniamo  $\bar{B}_\delta + \varepsilon \geq 2H$  e, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ne segue l'asserto.

**TEOREMA II.** — Per ogni  $0 < \delta \leq 1$ ,  $\lambda > 1$  è

$$B_\delta(0, \lambda) \geq \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2} H.$$

In particolare:

$$B_\delta(0, 1 + \omega) \geq \frac{2\omega}{(1 + \omega)^2} H, \quad B_\delta\left(0, \frac{3}{2}\right) \geq \frac{4}{9} H$$

e, per la monotonia di  $B_\delta(\mu, \lambda)$ , risulta

$$B_\delta(0, \lambda) \geq H/2 \text{ per ogni } \lambda \geq 2.$$

**TEOREMA III.** — Se per un  $\mu \geq 0$  è  $B_\delta(0, \mu) = 0$  allora, per ogni  $\lambda > 1$  risulta

$$B_\delta(\mu, \lambda) \geq \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - \mu)} H.$$

Osserviamo che il massimo del coefficiente di  $H$  si ha per  $\lambda = 1 + \sqrt{1 - \mu}$  e quindi

Se per  $\mu > 0$  è  $B_\delta(0, \mu) = 0$ , allora, per ogni  $\lambda \geq 1 + \sqrt{1 - \mu}$ , risulta

$$B_\delta(\mu, \lambda) \geq \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - \mu})^2} \cdot H.$$

Si consideri l'integrale <sup>(3)</sup>

$$I_\delta(\mu, \lambda; \eta) = \int_{\mu}^{\lambda} B_\delta(u, u + \eta) du$$

che, per la monotonia di  $B_\delta$  rispetto all'intervallo, risulta monotono non decrescente al crescere di  $\eta$ ; se ne consideri il limite

$$I_\delta(\mu, \lambda) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} I_\delta(\mu, \lambda; \eta).$$

Sussiste per il limite di questo integrale il teorema seguente

<sup>(3)</sup> L'integrale è da intendersi come integrale superiore, nel senso di DARBOUX, nel caso che non esista l'integrale in senso ordinario.

TEOREMA IV. — Per ogni  $\lambda \geq 1$  risulta

$$I_\delta(0, \lambda) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) 2H.$$

In particolare:

$$I_\delta(0, 3/2) \geq 2H/3, \quad I_\delta(0, 2) \geq H.$$

Da questo Teorema IV, tenendo conto del significato di  $I_\delta(\mu, \lambda)$ , possiamo ricavare il seguente, che migliora il risultato del Teorema II:

TEOREMA V. — Esiste almeno un valore  $\lambda^*$  dell'intervallo  $0 \leq u \leq \lambda$ , tale che per ogni  $\eta > 0$  risulta

$$B_\delta(\lambda^*, \lambda^* + \eta) \geq \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2} H.$$

Infatti, se per ogni  $u$  fosse

$$B_\delta(u, u + \eta) < \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2} H,$$

risulterebbe

$$I_\delta(0, \lambda) \leq I_\delta(0, \lambda; \eta) < 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)H,$$

contro il Teorema IV.

Fissando l'attenzione, per esempio, sull'intervallo  $(0, 3/2)$  possiamo enunciare:

TEOREMA VI. — Fissato  $0 < \delta \leq 1$ , esiste almeno un valore  $\lambda^*$ , con  $0 \leq \lambda^* \leq 3/2$ , per il quale sussiste la seguente proprietà:

Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono infinite coppie di interi  $(N, a^*)$  con

$$\lambda^* \log N < 2a^* \leq (\lambda^* + \varepsilon) \log N$$

tali che il numero  $Z_\delta(N; 2a^*)$  delle coppie  $(p_i, p_j)$  a differenza  $2a^*$  risulta

$$Z_\delta(N; 2a^*) > \left(\frac{4}{9} - \varepsilon\right)H \cdot \Phi(a^*) \delta N / \log^2 N.$$

**4. Osservazioni preliminari.** — In questo n. svolgeremo alcune piccole osservazioni che ci preparano alla dimostrazione dei lemmi. Conveniamo

che le somme scritte e vuote di termini siano nulle e i prodotti scritti e vuoti di fattori siano uguali a 1.

$$a). \quad \frac{p-1}{p-2} = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right).$$

b). Poniamo

$$(4.1) \quad P_h = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_h = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p_h, \quad (h \geq 2)$$

e denotiamo con  $v$  gli interi  $1, 2, \dots, P_h$ ; sia

$$a \equiv v \pmod{P_h}, \quad 1 \leq v \leq P_h.$$

Per il massimo comune divisore di  $a$  e  $P_h$  abbiamo:

$$(4.2) \quad (a, P_h) = (v, P_h) = v_0(v) = r_0$$

e  $v_0$  risulta libero da quadrati perchè tale è  $P_h$ .

c). Poniamo

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Phi(a) &= \prod_{3 \leq p|a} \frac{p-1}{p-2} = \prod_{3 \leq p|v_0} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{p_{h+1} \leq p|a} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\cdot \prod_{p_{h+1} \leq p|a} \left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right) = \Phi_h(a) \cdot f_h(a) \cdot \lambda_h(a). \end{aligned}$$

Veniamo a esaminare separatamente le tre funzioni  $\lambda_h, f_h, \Phi_h$ .

$$d). \quad 1 \leq \lambda_h(a) \leq \prod_{p_{h+1} \leq p} \left(1 + \frac{2}{(p-2)(p+1)}\right)$$

e pertanto

$$\lambda_h(a) = 1 + \frac{c(h, a)}{p_h \log p_h},$$

essendo  $c(h, a)$  uniformemente limitato rispetto ad  $a$  e  $h$ ; e quindi

$$(4.4) \quad 1 \leq \lambda_h(a) \leq 1 + \frac{c}{p_h \log p_h} \quad (c \text{ costante})$$

$$e). \quad f_h(a) = 1 + \sum_{q_h|a} \frac{1}{q_h},$$

dove  $q_h$  descrive il sistema degli interi liberi da quadrati che sono divisori di  $a$  e composti esclusivamente con fattori primi maggiori di  $p_h$ .

*f*). Poichè in  $\Phi_h(a)$  il prodotto è esteso a tutti e soli i divisori primi dispari di  $v_0 = (a, P_h)$ , ne concludiamo (tanto per  $v_0$  pari quanto per  $v_0$  dispari)

$$\begin{aligned}\Phi_h(a) &= \Phi_h(v) = \Phi_h(v_0) = \Phi(v_0) = \prod_{3 \leq p | v_0} \frac{p-1}{p-2} \\ &= \varphi(v_0) \prod_{3 \leq p | v_0} \frac{1}{p-2}, \quad (\varphi \text{ indicatore di EULER})\end{aligned}$$

quanti sono gli interi  $v$  che corrispondono allo stesso  $v_0$ ? Sono tutti e soli quelli della forma  $v = v_0 w$  con  $1 \leq w \leq P_h/v_0$  e  $(w, P_h/v_0) = 1$  e quindi essi sono in numero di  $\varphi(P_h/v_0)$ .

*g*) Calcoliamo la somma seguente

$$\begin{aligned}\sum_v \Phi_h(v) &= \sum_v \Phi_h(v_0) = \sum_{v_0} \varphi(P_h/v_0) \cdot \Phi_h(v_0) \\ &= \sum_{v_0} \varphi(P_h/v_0) \cdot \varphi(v_0) \prod_{3 \leq p | v_0} \frac{1}{p-2}\end{aligned}$$

(ricordiamo che  $v_0$  e  $P_h/v_0$  sono primi fra loro)

$$\begin{aligned}&= \sum_{v_0} \varphi(P_h) \cdot \prod_{3 \leq p | v_0} \frac{1}{p-2} \\ &= \varphi(P_h) \cdot \sum_{v_0} \prod_{3 \leq p | v_0} \frac{1}{p-2}\end{aligned}$$

(teniamo conto che  $v_0$ , libero da quadrati, può essere pari o dispari)

$$= \varphi(P_h) \cdot 2 \prod_{3 \leq p \leq p_h} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right)$$

e poichè

$$(p-1) \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) = p \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\}^{-1}$$

risulta

$$(4.6) \quad \sum_v \Phi_h(v) = P_h \cdot \prod_{3 \leq p \leq p_h} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\}^{-1}.$$

*h*) Denotiamo con  $a_v$  l'intero generico per il quale

$$a_v \equiv v \pmod{P_h}:$$

fissato  $v$ , di questi interi  $a_v$  nell'intervallo  $\tau < a_v \leq \eta$  ve ne sono in numero di

$$\left[ \frac{\eta - \tau}{P_h} \right] + \theta = \frac{\eta - \tau}{P_h} + \theta' \quad (\theta = 0, 1; |\theta'| < 1).$$

Valutiamo la somma

$$\Psi_h(\tau, \eta; v) = \sum_{\tau < a_v \leq \eta} f_h(a_v).$$

Per l'espressione in  $e)$  abbiamo

$$\sum_{\tau < a_v \leq \eta} 1 = \Psi_h(\tau, \mu; v) \leq \sum_{\tau < a_v \leq \eta} \left( 1 + \sum_{q_h | a_v} \frac{1}{q_h} \right)$$

e quindi, per l'osservazione sul numero degli  $a_v$  fatta sopra, otteniamo

$$\frac{\eta - \tau}{P_h} - 1 \leq \Psi_h(\tau, \eta; v) \leq \frac{\eta - \tau}{P_h} + 1 + \sum_{\tau < a_v \leq \eta} \sum_{q_h | a_v} \frac{1}{q_h}.$$

Adesso si tratta di maggiorare la somma doppia, indichiamola con  $S_h(\tau, \eta; v)$ , che figura come ultimo termine nell'ultimo membro; denotiamo con  $u$  l'intero generico libero da quadrati che ammette divisori primi tutti maggiori di  $p_h$ ; allora  $(u, P_h) = 1$  e abbiamo:

$$\begin{aligned} S_h(\tau, \eta; v) &= \sum_{\tau < a_v \leq \eta} \sum_{q_h | a_v} \frac{1}{q_h} \\ &\leq \sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \sum_{\substack{\tau < a_v \leq \eta \\ u | a_v}} \frac{1}{u} \leq \sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \left( \frac{1}{u} \sum_{\tau < a_v \leq \eta} 1 \right) \\ &\leq \sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \frac{1}{u} \left( \left[ \frac{\eta - \tau}{u P_h} \right] + 1 \right) \leq \frac{\eta - \tau}{P_h} \sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \frac{1}{u^2} + \sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Essendo

$$\sum_{p_{h+1} \leq u \leq \eta} \frac{1}{u} < \int_{p_h}^{\eta} \frac{dt}{t}, \quad \sum_{p_{h+1} \leq u} \frac{1}{u^2} < \int_{p_h}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

possiamo concludere che la somma doppia è maggiorata come segue

$$S_h(\tau, \eta; v) \leq \frac{1}{p_h} \frac{\eta - \tau}{P_h} + \log \frac{\eta}{p_h}.$$

e il secondo membro non dipende da  $v$ . La somma  $\Psi_h(\tau, \eta; v)$  che ci eravamo proposti di valutare in questo comma  $h$ ) soddisfa alla seguente limitazione nella quale i due estremi non dipendono dall'intero  $v$

$$(4.7) \quad \frac{\eta - \tau}{P_h} - 1 \leq \Psi_h(\tau, \eta; v) \leq \left(1 + \frac{1}{P_h}\right) \frac{\eta - \tau}{P_h} + \log \frac{\eta}{p_h} + 1.$$

Veniamo adesso a dimostrare due lemmi.

5. LEMMA 1. — Per la somma della funzione aritmetica  $\Phi(a)$  sussiste l'espressione asintotica

$$(5.1) \quad \Psi(\tau, \eta) = \sum_{\tau < a \leq \eta} \Phi(a) = \frac{1}{H} (\eta - \tau) + R(\tau, \eta)$$

dove

$$H = \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} = 0.6601 \dots$$

(costante di SHAH e WILSON),

$$(5.2) \quad |R(\tau, \eta)| < c_1 \frac{\eta - \tau}{p_h} + c_2 P_h \log \frac{\eta}{p_h} + c_3 P_h$$

( $c_1, c_2, c_3$  costanti assolute).

Dimostrazione. Per la (4.3)

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, \eta) &= \sum_{\tau < a \leq \eta} \Phi_h(a) \cdot f_h(a) \cdot \lambda_h(a) \\ &= \sum_v \Phi_h(v) \cdot \sum_{\tau < a_v \leq \eta} f_h(a_v) \left\{ 1 + \frac{c(h; a_v)}{p_h \log p_h} \right\} \end{aligned}$$

e poichè  $c(h; a_v)$  si mantiene uniformemente limitato rispetto ad  $h$  e  $a_v$  (vedi osservazione  $d$ )) abbiamo

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, \eta) &= \sum_v \Phi_h(v) \cdot \sum_{\tau < a_v \leq \eta} f_h(a_v) \cdot \left\{ 1 + \frac{c(h; \tau, \eta)}{p_h \log p_h} \right\} \\ &= \sum_v \{ \Phi_h(v) \cdot \Psi_h(\tau, \eta; v) \} \cdot \left\{ 1 + \frac{c(h; \tau, \eta)}{p_h \log p_h} \right\}. \end{aligned}$$

L'osservazione  $h$ ) (n. 4) ci fornisce la limitazione (4.7), uniforme rispetto a  $v$ , per la somma  $\Psi_h(\tau, \eta; v)$  mentre l'osservazione  $g$ ) (n. 4) ci fornisce l'espressione della somma  $\sum_v \Phi_h(v)$ ; si deduce che  $\Psi(\tau, \eta)$  è maggiore di

$$P_h \prod_{3 \leq p \leq p_h} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\}^{-1} \cdot \left( \frac{\eta - \tau}{P_h} - 1 \right).$$

Teniamo conto dell'espressione della costante  $H$ ; da essa deduciamo

$$\prod_{3 \leq p \leq p_h} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = H + O\left(\frac{1}{p_h \log p_h}\right),$$

pertanto l'espressione minorante di  $\Psi(\tau, \eta)$  risulta

$$P_h \left( \frac{1}{H} + O\left(\frac{1}{p_h \log p_h}\right) \right) \left( \frac{\eta - \tau}{P_h} - 1 \right)$$

e  $\Psi(\tau, \eta)$  risulta maggiore di

$$(5.3) \quad \frac{\eta - \tau}{H} - c'_1 \frac{\eta - \tau}{p_h \log p_h} - c'_2 P_h,$$

con  $c'_1$  e  $c'_2$  costanti assolute.

Per la valutazione al disopra della somma  $\Psi(\eta, \tau)$  si procede in modo analogo e si perviene all'espressione

$$\sum_v \Phi_h(v) \left\{ \left(1 + \frac{1}{p_h}\right) \frac{\eta - \tau}{P_h} + \log \frac{\eta}{p_h} + 1 \right\} \left(1 + \frac{c}{p_h \log p_h}\right)$$

e questa, a sua volta, risulta minore di

$$(5.4) \quad \frac{\eta - \tau}{H} + c''_1 \frac{\eta - \tau}{p_h} + c''_2 P_h \log \frac{\eta}{p_h} + c''_3 P_h.$$

Tenendo conto delle due espressioni (5.3) e (5.4) segue il lemma con la maggiorazione (5.2) per il termine complementare  $R(\tau, \eta)$ .

6. LEMMA 2. — Sia  $0 < \delta \leq 1$ ,  $0 \leq \tau < \eta$ ,  $H = 0.6601 \dots$  la costante di SHAH e WILSON  $z_\delta(\xi; 2a)$  la funzione definita in (1.4)  $\beta = \beta(\xi_0, \xi; \tau, \eta)$  l'estremo superiore della funzione  $z_\delta(u; 2a)$  nel campo

$$\xi_0 < u \leq \xi, \quad \tau < a \leq \eta$$

Denotiamo con

$$K_\delta(\xi; \tau, \eta)$$

il numero delle coppie  $(p_i, p_j)$  di interi primi tali che

$$2\tau < p_j - p_i \leq 2\eta, \quad (1 - \delta)\xi < p_i \leq \xi, \quad 2\eta \leq \delta\xi.$$

Allora, fissato  $\varepsilon > 0$  arbitrario, quando

$$(\eta - \tau)/\log \eta \text{ e } \xi$$

sono abbastanza grandi risulta

$$(6.1) \quad K_\delta(\xi; \tau, \eta) < \frac{\beta + \varepsilon}{H} (\eta - \tau) \frac{\delta \xi}{\log^2 \xi}.$$

*Osservazione.* Quando si assuma  $\varepsilon' > 0$  e

$$\tau = \frac{1}{2} \mu \log \xi, \quad \eta = \frac{1}{2} \lambda \log \xi,$$

per  $\xi_0$  abbastanza grande, risulta

$$\beta < B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon'$$

quindi, cambiando il valore di  $\varepsilon$ , la (6.1) assume la forma

$$(6.2) \quad K_\delta\left(\xi, \frac{1}{2} \mu \log \xi, \frac{1}{2} \lambda \log \xi\right) < \frac{B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon}{2H} (\lambda - \mu) \frac{\delta \xi}{\log \xi}$$

ed è valida per  $\xi$  abbastanza grande in dipendenza di  $\varepsilon$ : in questo caso

$$(\eta - \tau)/\log \eta \asymp \frac{1}{2} (\lambda - \mu) \log \xi / \log \log \xi \rightarrow +\infty$$

per  $\xi \rightarrow +\infty$ .

*Dimostrazione.* Per le definizioni di  $Z_\delta(\xi; 2a)$  (vedi n. 1) e di  $K_\delta(\xi, \tau, \eta)$  risulta

$$\begin{aligned} K_\delta(\xi; \tau, \eta) &= \sum_{\tau < a \leq \eta} Z_\delta(\xi; 2a) = \sum_{\tau < a \leq \eta} z_\delta(\xi; 2a) \Phi(a) \cdot \delta \xi / \log^2 \xi \\ &\leq \beta \cdot \sum_{\tau < a \leq \eta} \Phi(a) \cdot \delta \xi / \log^2 \xi \end{aligned}$$

(applicando il Lemma 1<sup>o</sup>)

$$\leq \beta \cdot \left\{ \frac{\eta - \tau}{H} + R(\tau, \eta) \right\} \cdot \delta \xi / \log^2 \xi.$$

Adesso teniamo conto che  $\eta \leq \delta \xi / 2$ : in base alla limitazione (5.2) del termine complementare  $R(\tau, \eta)$ , possiamo rendere questo termine abba-

stanza piccolo con l'assumere  $h$  abbastanza grande e, dopo avere fissato  $h$ , con l'assumere  $(\eta - \tau) \log \eta$  abbastanza grande in guisa da avere

$$\frac{c_1}{p_h} + \frac{c_2 P_h}{\eta - \tau} \cdot \log \frac{\eta}{p_h} + \frac{c_3 P_h}{\eta - \tau} < \frac{\varepsilon}{H(\beta + \varepsilon)}.$$

**7. Dimostrazione dei Teoremi II-VI.** — Poniamo nel lemma 2<sup>o</sup>, come è detto nell'Osservazione

$$\tau = \frac{1}{2} \mu \log \xi, \quad \eta = \frac{1}{2} \lambda \log \xi$$

e si consideri la somma

$$(7.1) \quad \Sigma_* = \sum_{(1-\delta)\frac{\xi}{2} < p_n < p_{n+1} \leq \xi} (p_{n+1} - p_n)$$

della quale diciamo  $\nu$  il numero dei termini. Come conseguenza immediata del « Primzahlsatz » abbiamo

$$(7.2) \quad \Sigma_* \sim \delta \xi, \quad \nu \sim \delta \xi / \log \xi.$$

Ripartiamo i termini di  $\Sigma_*$  nei tre tipi seguenti

$$p_{n+1} - p_n \leq \mu \log \xi, \quad \mu \log \xi \leq p_{n+1} - p_n \leq \lambda \log \xi, \quad \lambda \log \xi < p_{n+1} - p_n$$

e in corrispondenza ai tre tipi ripartiamo la somma  $\Sigma_*$  e il numero  $\nu$  rispettivamente nelle tre somme e nei tre numeri

$$(7.3) \quad \Sigma_* = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  piccolo quanto si vuole. Per il Lemma 2 risulta per  $\xi > \xi_0(\delta, \varepsilon)$

$$\nu_1 < \frac{B_\delta(0, \mu) + \varepsilon}{2H} \mu \frac{\delta \xi}{\log \xi} = O(0, \mu; \varepsilon) \cdot \mu \frac{\delta \xi}{\log \xi}$$

$$\nu_2 < \frac{B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon}{2H} (\lambda - \mu) \frac{\delta \xi}{\log \xi} = O(\mu, \lambda; \varepsilon) \cdot (\lambda - \mu) \frac{\delta \xi}{\log \xi}.$$

Tanto nel caso  $\mu = 0$  quanto nel caso  $B(0, \mu) = 0$  abbiamo

$$\nu_1 \leq \varepsilon \mu \delta \xi / \log \xi.$$

Tenendo conto del valore di  $\nu$  assegnato in (7.2) possiamo limitare al disotto il valore di  $\nu_3$  e otteniamo

$$\nu_3 \cong \{1 - o(1) - \varepsilon \mu - C(\mu, \lambda; \varepsilon)(\lambda - \mu)\} \delta \xi / \log \xi.$$

D'altronde, per il valore di  $\Sigma_3$  abbiamo

$$\begin{aligned} \delta \xi + o(\xi) &= \Sigma_* \cong \Sigma_3 \cong \nu_3 \cdot \lambda \log \xi \\ &\cong \{1 - o(1) - \varepsilon \mu - C(\mu, \lambda, \xi; \varepsilon)(\lambda - \mu)\} \lambda \xi \end{aligned}$$

e pertanto risulta

$$\{1 - \varepsilon \mu - C(\mu, \lambda; \varepsilon)(\lambda - \mu)\} \lambda \leq 1.$$

Ricavando la condizione per  $C$  e tenendo conto della arbitrarietà di  $\varepsilon$  otteniamo

$$B_\delta(\mu, \lambda) \cong \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - \mu)} \cdot H.$$

Così risulta dimostrato il Teorema III. Il Teorema II ne è l'ovvio caso particolare per  $\mu = 0$ .

Per dimostrare il Teorema IV suddividiamo l'intervallo  $(0, \lambda)$  in  $m$  intervalli parziali uguali di ampiezza  $\eta = \lambda/m$  mediante i punti

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m = \lambda$$

e considerate le differenze

$$\begin{aligned} \lambda_{s-1} \log \xi < p_{n+1} - p_n &\leq \lambda_s \log \xi \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ p_{n+1} - p_n &> \lambda \log \xi, \end{aligned}$$

operiamo la partizione tanto di  $\Sigma_*$  quanto di  $\nu$  analoghe alle (7.3)

$$\Sigma_* = \Sigma_1 + \dots + \Sigma_m + \Sigma_{m+1}, \quad \nu = \nu_1 + \dots + \nu_m + \nu_{m+1}.$$

Fissati  $\varepsilon$  e  $m$ , per  $\xi$  abbastanza grande risulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_s < \frac{1}{2H} \{B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_s) + \varepsilon\} (\lambda_s - \lambda_{s-1}) \delta \xi / \log \xi. \\ s = 1, 2, \dots, m \end{array} \right.$$

e sommando ricaviamo

$$r_1 + \dots + r_m < \frac{1}{2H} \left\{ \sum_{s=1}^m B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_s) \cdot (\lambda_s - \lambda_{s-1}) + \varepsilon \lambda \right\} \delta \xi / \log \xi$$

Sia  $\eta > \lambda/m$ , allora

$$B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_s) \leq B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_{s-1} + \eta)$$

e la somma entro la parentesi { } non supera

$$\sum_{s=1}^m B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_{s-1} + \eta) (\lambda_s - \lambda_{s-1})$$

che è una somma di MENGOLI-CAUCHY attinente all'integrale

$$I_\delta(0, \lambda; \eta) = \int_0^\lambda B_\delta(u, u + \eta) du$$

e pertanto

$$\sum_{s=1}^m B_\delta(\lambda_{s-1}, \lambda_s) (\lambda_s - \lambda_{s-1}) \leq I_\delta(0, \lambda; \eta) + \varepsilon_m$$

dove  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow +\infty$ .

Si può scrivere

$$r_1 + \dots + r_m \leq \frac{1}{2H} \{ I_\delta(0, \lambda; \eta) + \varepsilon_m + \varepsilon \lambda \} \delta \xi / \log \xi.$$

La valutazione al disotto per  $r_{m+1}$  conduce a

$$r_{m+1} \geq \{ 1 - o(1) - I_\delta(0, \lambda; \eta) - \varepsilon_m - \varepsilon \lambda \} \delta \xi / \log \xi$$

e ne segue

$$\begin{aligned} \delta \xi + o(\xi) &= \Sigma_* \geq \Sigma_{m+1} \geq r_{m+1}; \lambda \log \xi \\ &\geq \frac{1}{2H} \{ 1 - o(1) - I_\delta(0, \lambda; \eta) - \varepsilon_m - \varepsilon \lambda \} \lambda \delta \xi. \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo

$$I_\delta(0, \lambda; \eta) + \varepsilon_m \geq \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) 2H.$$

Passando al limite per  $m \rightarrow +\infty$  e poi per  $\eta \rightarrow 0+$  (tenendo conto che  $I_\delta$  è monotono rispetto a  $\eta$ ) risulta

$$I_\delta(0, \lambda) \cong \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot 2H$$

Abbiamo dimostrato il Teorema IV: i teoremi V e VI ne sono immediate conseguenze.

### BIBLIOGRAFIA

- 1 - VIGGO BRUN, *Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **168**, 544-546 (1919<sub>1</sub>) e Videnskap Skrifter, I. Mat. Nat. Klasse n° 3; kristiania (1920).
- 2 - *La série  $1/3 + 1/5 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/29 + 1/31 + \dots$  est convergente ou finie*, Bulletin des Sciences Mathém., **43**, 100-104, 124-128 (1919).
- 3 - G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Note on Messrs Shah and Wilson's paper entitled: « On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem »*, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. **19**, 245-254 (1919).
- 4 - G. RICCI, *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **6**, 71-116 (1937).
- 5 - N. M. SHAH-B. M. WILSON, *On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem*, Proceedings Cambridge Phil. Soc. **19**, 238-244 (1919).
- 6 - H. N. SHAPIRO-WARGA, *On the representation of large integers as sums of primes*, I. Comm. Pure Appl. Math. **3**, 153-176 (1950).
- 7 - I. V. ČULANOVSKIĬ, *Alcune valutazioni connesse con un nuovo metodo di Selberg nella teoria dei numeri elementare* (in lingua russa) Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **63**, 491-494 (1948). [Di questo lavoro conosciamo soltanto il rapporto che lo riguarda, contenuto in Math. Reviews, **10**, 355-356 (1949) (P. T. BATEMAN)].