ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN PANVINI

Alcune osservazioni sulle geometrie non archimedee

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 7, nº 1-2 (1953), p. 153-159
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_153_0>

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE GEOMETRIE NON ARCHIMEDEE

di JEAN PANVINI (Pisa)

Con riferimento alla assiomatizzazione della Geometria di D. HILBERT, l'indipendenza del postulato di ARCHIMEDE dal complesso degli altri postulati che lo precedono può dimostrarsi, col procedimento indicato dallo stesso HILBERT, (1) servendosi del corpo delle funzioni ottenute operando sulla variabile reale t con le quattro operazioni razionali e con l'operazione $\sqrt{1+\omega^2}$ e ordinando gli elementi del corpo al modo seguente: Dati due elementi $f(t)$, $\varphi(t)$ si dice $f \gtreqless \varphi$ secondo che, per tutti i t maggiori od uguali a un conveniente t_0 risulta $f(t) - \varphi(t) \gtreqless 0$. Tale insieme è, manifestamente, un *campo* (*field*) secondo la fraseologia moderna (2) (o *corpo numerico* secondo la fraseologia dello SCORZA (3)). Esso inoltre è ordinato, e l'ordine è *non archimedeo*: infatti si ha, ad es. per ogni n intero positivo, $n = n.1 < t$, e così pure $n \frac{1}{t^2} < \frac{1}{t}$, ecc.

Tale campo sarà nel seguito indicato con C_P. Dando allora (con procedimento noto) alla parola punto il significato di terna ordinata di elementi di questo campo: alla retta il significato di totalità delle terne soluzioni di una coppia di equazioni lineari con matrice incompleta di caratteristica 2: al piano il significato di totalità di terne soluzioni di una equazione lineare: ordinando i punti di una retta secondo i valori di un parametro con cui siano posti in corrispondenza biunivoca lineare (al modo solito), e dando infine alla congruenza il significato di corrispondenza realizzata da una trasformazione lineare a matrice ortogonale, tutti i postulati della geometria

(1) D. HILBERT, *Grudlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig, 1909, p. 31.

(2) Vedansi, ad es., oltre i noti trattati esteri, B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna,* I, Zanichelli, Bologna, 1948., G. ZAPPA, *Gruppi, Corpi, Equazioni,* Liguori, Napoli, 1950.

(3) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre,* Principato, Messina, 1921.

sino a quello di ARCHIMEDE sono verificati, mentre quest'ultimo riesce non verificato.
Vogliamo per prima cosa esaminare in che relazione sta il modello di geometria non archimedea costruito sul campo C_P con la più generale geometria non archimedea.

Ricordiamo per questo che indipendentemente dal postulato di ARCHIMEDE si può costruire una teoria delle proporzioni tra segmenti, dicendo quattro segmenti a, b, c, d, in proporzione se trasportati i segmenti sui lati OX, OY di un angolo retto in modo che sia $OA = a, OB = b$, su OX $OC = c, OD = d$, su OY, risulta BD parallela ad AC, (o coincidente con essa).

Si ottiene così una teoria delle proporzioni nella quale valgono tutte le proprietà delle proporzioni ordinarie, comprese quelle esistenziali, e che non poggia sul postulato di ARCHIMEDE (poggia essenzialmente su quello della parallela): e se ne deduce la comune teoria della similitudine.

Dati due segmenti a, b chiamiamo allora *rapporto* di a a b, e lo indichiamo $a : b$, il concetto generato per astrazione dalla coppia a, b e da tutte quelle ad essa proporzionali; la proprietà transitiva delle proporzioni giustifica tale definizione.

Ragionamenti noti ([4]) dimostrano che l'insieme A dei rapporti, così definiti, costituisce un corpo numerico (assoluto). Riepiloghiamo brevemente.

Posto $\lambda = a : b$, $\mu = c : d$, definiamo la somma $\lambda + \mu$ al modo seguente: preso un segmento p, determiniamo x, y in modo che sia

$$a : b = x : p , \qquad c : d = y : p ,$$

e definiamo la somma ponendo

$$\lambda + \mu = (x + y) : p .$$

Si dimostra subito l'invarianza della definizione rispetto al segmento p, e si ottengono le proprietà formali della somma.

Per il prodotto, si determinano x, z in modo che sia

$$a : b = x : p , \qquad c : d = p : z$$

e si pone $\lambda \mu = x : y$; e si procede come per la somma, ottenendo le proprietà formali.

([4]) V. ad. es. F. CECIONI, *Matematiche Complementari* (Principi di Geometria), Lit. Vallerini, Pisa, 1948 p. 248. Quanto viene esposto sopra è poi un modo diverso di presentare il Calcolo segmentario di Hilbert, basato sul teorema di Pascal: v. D. Hilbert, l. c. in (1).

Si definisce $\lambda > \mu$ quando è (con le notazioni di sopra) $x > y$; si prova l'invarianza, e si provano le comuni proprietà delle diseguaglianze. Esiste, ed è unica, la differenza $\lambda - \mu$ quando, e solo quando, è $\lambda > \mu$.

Esiste una, ed una sola, unità $(a : a)$, ed esiste il quoziente senza eccezioni.

Da tutto ciò segue (al modo solito) che, fissato un segmento come unità di misura, ogni segmento ha la misura, che è un elemento dell'insieme numerico A: e il rapporto di due segmenti è uguale al quoziente delle loro misure.

Si deduce allora anche che se a, b, c sono le misure, rispettivamente, dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo, si ha

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ciò si ricava mediante la similitudine, nel modo noto.

Partendo dal considerato insieme numerico A si possono introdurre (col noto metodo delle coppie) lo zero e gli elementi negativi. Si ottiene un campo, *che chiameremo il campo C*, ordinato, e nel quale è possibile l'operazione $\sqrt{b^2 + c^2}$.

Nella più generale geometria non archimedea fissiamo tre assi coordinati OX, OY, OZ e un segmento u. Consideriamo un punto P, diciamo P', P'', P''' le intersezioni con gli assi coordinati dei piani per P paralleli ai piani coordinati.

I tre numeri del corpo C $OP' : u, OP'' : u, OP''' : u$ presi con segno, li diciamo coordinate di P.

Ciò fatto, i soliti procedimenti della Geom. analitica, che non dipendono dalla prop. di ARCHIMEDE, provano che: Se P varia su una retta le sue coordinate soddisfano una coppia di equazioni del tipo

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

$$a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$$

dove la matrice $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ ha caratteristica 2.

I punti di una retta possono ordinarsi secondo i valori di un parametro, nel modo solito.

Se P varia su un piano le sue coordinate soddisfano una equazione del tipo

$$a\,x = b\,y + c\,z + d = 0\,.$$

Infine le congruenze sono rappresentate da sostituzioni lineari a matrice ortogonale.

Segue di qui che il confronto della generale geometria non archimedea col modello costruito sul corpo C_P si fa confrontando il corpo C col corpo C_P.

Fissato un segmento unitario u prospetteremo ogni elemento di C nella forma $a:u$. Per comodità di linguaggio, se un segmento b supera tutti i multipli di un segmento a, diciamo che b è un infinito rispetto ad a (e a un infinitesimo rispetto a b), mentre se nessuno dei due è infinito rispetto all'altro li diciamo confrontabili.

Ossesviamo che per l'ammessa ipotesi non archimedea esiste un segmento non confrontabile con u. Infatti, se tutti i segmenti fossero confrontabili con u varrebbe il postulato d'ARCHIMEDE perchè la relazione di confrontabîlità è transitiva. Si noti d'altra parte che scelto un segmento c non confrontabile con u, se c è infinitesimo (o infinito) rispetto ad u, il quarto proporzionale dopo c, u, u è infinito (o infinitesimo) rispetto ad u.

Fissato a piacere nel campo C un elemento b infinito rispetto alla unità u, ad esso facciamo corrispondere nel campo C_P l'elemento t e viceversa.

Ad un elemento $x \in C_P$ che si attiene a partire da t con una catena finita di operazioni appartenenti al grupppo delle operazioni raziqnali e alla operazione $\sqrt{1+\omega^2}$ facciamo corrispondere in C l'elemento ottenuto a partire da b con la stessa catena di operazioni. E viceversa per gli elementi di C che si ottengono da b con operazioni del tipo detto.

In virtù di questa corrispondenza il campo C_P ha per immagine in C un sottocorpo C' ad esso isomorfo, com'e immediato.

Quindi: Il particolare modello di geometria costruito sul campo C_P è contenuto nella più generale (e cioè in qualunque) geometria non archimedea.

Vogliamo ora esaminare il mutuo comportamento di rette e circonferenze nell'ipotesi non archimedea, con riguardo particolare al postulato della con tinuità nella forma di CANTOR.

Nell'esempio costruito sul campo C_P vi sono rette che pur distando dal centro di una circonferenza meno del raggio non incontrano la circonferenza; ciò perchè nel corpo C_P vi sono elementi che non ammettono radice quadrata, come vedremo fra breve; del resto il campo C_P è discontinuo. Ma noi dimostreremo che la circostanza indicata si presenta anche in esempi per i quali è verificato il postulato della continuità di CANTOR.

Premettiamo le considerazioni seguenti.

Gli elementi del C_P sono delle funzioni della variabile t il cui confronto si fa a partire da valori convenientemente grandi di t. Consideriamo il loro ordine d'infinito (positivo, nullo, o negativo) rispetto a t. Poichè queste fun zioni si costruiscono operando sulla variabile con le quattro operazioni è con l'operazione $\sqrt{1+\omega^2}$, è chiaro che l'ordine d'infinito di ciascuna di esse è intero.

Segue di qui che *non esiste ad es.,* $\sqrt{t^3}$.

Se ripartiamo gli elementi di C_P in due classi H, K, mettendo in H quelli il cui quadrato è minore di t^3 e in K quelli il cui quadrato è maggiore di t^3, otteniamo due classi che *non sono contigue.*

Infatti se $x \in H$ e $y \in K$, e se i loro ordini d'infinito sono ν_1 e ν_2, deve essere $2\nu_1 \leq 3$, $2\nu_2 \geq 3$; quindi $\nu_1 \leq 1$, $\nu_2 \geq 2$, e la differenza $y - x$ diverge con t.

Premesse queste considerazioni, vogliamo mostrare, come già detto, che si possono costruire geometrie continue secondo CANTOR (non archimedee) nelle quali vi sono rette che pur penetrando nell'interno di una circonferenza, non incontrano la circonferenza, e che perciò il teorema di geometria elementare « Una retta che passa per un punto interno a una circonferenza incontra la circonferenza » non può dimostrarsi col solo postulato della continuità di CANTOR.

Il corpo C_P non è continuo secondo CANTOR; [5] ma possiamo ottenere corpo $\overline{C}_P$ continuo secondo CANTOR nel modo che apparirà dalle considerazioni seguenti.

Pensiamo a come si effettua l'estensione dal campo razionale (che non è continuo secondo CANTOR) al campo reale che è continuo. Si comincia col

---

[5] Pe la dimostrazione consideriamo lo sviluppo in serie di $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

posto

$$x = \frac{1}{t} > 0$$

si ha:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3} + \frac{1}{5!\,t^5} - \frac{1}{7!\,t^7} + \cdots;$$

consideriamo le due classi delle somme parziali ottenute fermandoci ai termini positivi e negativi:

$$\text{I)}\quad \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3},\ \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3} + \frac{1}{5!\,t^5} - \frac{1}{7!\,t^7}, \ldots$$

e

$$\text{II)}\quad \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3} + \frac{1}{5!\,t^5},\ \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3} + \frac{1}{5!\,t^5} - \frac{1}{1!\,t^7} + \frac{1}{9!\,t^9}, \ldots$$

Queste due classi separate sono contigue in C_P: infatti fissato un intero n si possono trovare due funzioni delle due classi che differiscono da un certo t_0 in poi per meno di $\frac{1}{t^n}$.

Tra queste due classi non è compreso alcun elemento di C_P.

chiamare numero reale una sezione nel campo razionale, cioè una coppia di classi A , B di numeri razionali soddisfacenti alle tre condizioni: a) ogni numero, uno al più escluso, è in A o in B: b). Se un numero appartiene ad A (a B) ogni numero minore (maggiore) appppartiene ad A (a B): c) la classe A non ha massimo, la classe B non ha minimo.

Si fa poi vedere che, definite per queste sezioni le operazioni razionali nel modo ben noto, sono rispettate le proprietà caratteristiche di un campo (ordinato). Queste operazioni, applicate a sezioni che escludono un numero razionale, danno per risultato sezioni che escludono un numero razionale, in modo che il sottocorpo di queste sezioni è isomorfo a quello razionale.

Il campo reale così ottenuto soddisfa alla condizione che tra due classi separate e contigue di numeri reali è compreso un numero reale (continuità).

Immaginiamo di ripetere il procedimento detto partendo da un corpo non archimedeo. Dov'è che la costruzione cade in difetto? Un esempio molto espressivo si ha in ciò; che viene a mancare l'unicità dello zero.

Fissato infatti un numero $c > 0$, supponiamo vi siano numeri maggiori di tutti i multipli di c. Mettiiamoli tutti in una classe B, mentre gli altri numeri riempiranno una classe A. La coppia (A , B) è una sezione e risulta:

$$(A , B) + c = (A , B) .$$

Ora è da notare che le classi A e B di questo esempio non sono contigue. Poichè il principio di ARCHIMEDE porta che le classi di una sezione sono contigue, viene spontanea l'idea di imporre esplicitamente alle due classi di una sezione la condizione di essere *contigue,* cioè l'idea di introdurre le (diciamo così) *sezioni contigue* come coppie di classi che oltre le tre solite condizioni soddisfino a quella ulteriore di essere contigue.

Ora effettivamente si trova che l'insieme delle *sezioni contigue* costruite su un campo, che nel nostro caso è il campo C_P, è a sua volta un campo $\overline{C}_P$: e ciò indipendentemente dalla proposizione di ARCHIMEDE, e cioè anche se il campo di partenza è non archimedeo, come appunto avviene per C_P: e il campo esteso $\overline{C}_P$ risulta continuo secondo CANTOR.

Per vedere ciò basta seguire, presso a poco, la ordinaria via con la quale si passa dal campo razionale a quello reale, evitando di usare la proposizione di ARCHIMEDE, il che è possibile per la mutata definizione di sezione. Accenniamo sommariamente una linea che può essere seguita.

Definizione e proprietà dei concetti di maggiore e minore.

Tra due numeri (distinti) di $\overline{C}_P$ sono compresi infiniti numeri di C_P. Ogni numero $\alpha = (A , B)$ di $\overline{C}_P$ è maggiere di ogni numero di A e minore di ogni numero di B.

Tra due classi contigue di numeri di C_P è sempre compreso un numero di $\overline{C}_P$.

Le solite proprietà relative alle quattro operazioni.

Tra le due classi contigue di numeri di $\overline{C}_P$ è sempre compreso un numero di $\overline{C}_P$; cioè *il campo continuo secondo* CANTOR. Siano infatti $\overline{A}$, $\overline{B}$ due classi contigue in $\overline{C}_P$, e supponiamo senz'altro che $\overline{A}$ non abbia massimo e $\overline{B}$ non abbia minimo. Sia A (B) la classe dei numeri a (b) di C_P tali che sia $a \leq$ *qualche* $\overline{a}$ ($b \geq$ *qualche* $\overline{b}$). Presi due numeri qualunque $\overline{a}$ in $\overline{A}$ e $\overline{b}$ e $\overline{B}$, siccome queste due classi non hanno, rispettivamente, massimo e minimo, si vede subito che esistono due numeri a in A e b in B tali che sia $\overline{a} \leq a < b \leq \overline{b}$; perciò le classi A e B sono contigue. Esiste quindi un numero α di $\overline{C}_P$ compreso tra le classi A e B, e perciò anche, come si vede subito per assurdo, tra le classi $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Dimostriamo ora che nel corpo $\overline{C}_P$ si presentano, per le radici quadrate le stesse circostanze notate in C_P. Continuando a ragionare sullo stesso esempio considerato sopra in C_P, sia $\overline{X}$ la classe degli $x > 0$ di $\overline{C}_P$ tali che sia $x^2 < t^3$, e $\overline{Y}$ la classe degli $y > 0$ di tali $\overline{C}_P$ che sia $y^2 > t^3$; siano poi X, Y le analoghe classi in C_P. Se $\overline{X}$, $\overline{Y}$ fossero contigue, sarebbero contigue anche X, Y, come si vede con un ragionamento analogo a quello fatto sopra per le classi A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, ma sappiamo che X, Y non sono contigue; quindi anche $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *non sono contigue*. Allora *neppure in* $\overline{C}_P$ *esiste* $\sqrt{t^3}$: se infatti fosse $z^2 = t^3$ con $z > 0$ in $\overline{C}_P$, prendendo $\varepsilon > 0$ piccolo ad arbitrio (in $\overline{C}_P$), i numeri $z - \varepsilon$, $z + \varepsilon$ apparterrebbero rispettivamente alle classi $\overline{X}$, $\overline{Y}$ le quali quindi sarebbero contigue.

Ed allora se, nella Geometria sul corpo $\overline{C}_P$, consideriamo, ad es., una circonferenza di raggio $t^3 + 1$, ed una retta del suo piano avente dal centro distanza $t^3 - 1 < t^3 + 1$, vediamo che *tale retta non incontra la circonza:* infatti la eventuale corda dovrebbe avere la misura $2\sqrt{(t^3+1)^2-(t^3-1)^2} = 4\sqrt{t^3}$, che non esiste in $\overline{C}_P$.

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 22 settembre 1953