

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

**Sopra un'estensione del concetto di funzione generalmente
a variazione limitata**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 7,
n° 1-2 (1953), p. 65-78*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_65_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN'ESTENSIONE
DEL CONCETTO DI FUNZIONE
GENERALMENTE A VARIAZIONE LIMITATA

DI LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

In questa Nota introduco il concetto di *funzione di due variabili generalmente a variazione limitata di ordine α* (α essendo un numero reale positivo ≤ 1 e del resto qualunque), più largo di quello noto di funzione di due variabili generalmente a variazione limitata, secondo TONELLI e CESARI. Ne viene che ogni funzione di quest'ultimo tipo dovrà dirsi generalmente a variazione limitata di ordine uno.

Alla classe delle funzioni che considero estendo tre proprietà che ho già provato per le funzioni generalmente a variazione limitata (di ordine uno) in alcuni miei precedenti lavori⁽¹⁾ nonchè altre proposizioni dovute ad altri Autori. Termino accennando ad un'ulteriore estensione del concetto di funzione generalmente a variazione limitata, secondo TONELLI e CESARI, estensione che racchiude quella data in questo lavoro e sviluppo alcune considerazioni e osservazioni relative.

Aggiungo che tutto quel che qui è detto si estende subito alle funzioni di più variabili.

1. DEFINIZIONE. — Diremo che la funzione $f(x, y)$ definita nel quadrato⁽²⁾ Q di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$, è in Q generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla (secondo LEBESGUE) tale che, indicate con $V_x(x_0, y)$, $V_y(x, y_0)$, $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispettivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori

⁽¹⁾ Vedi sotto nota ⁽⁵⁾ e nota ⁽¹⁴⁾.

⁽²⁾ Solo per semplicità si considerano funzioni definite nel quadrato Q ; si potrebbero prendere in esame anche funzioni definite in un campo aperto qualunque.

assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$, $V_y(x, 1)$, risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$, quasi ovunque finite e quasi continue, ed inoltre esistano gli integrali, nel senso del Lebesgue

$$\int_0^1 \{V_y(x, 1)\}^\alpha dx, \quad \int_0^1 \{V_x(1, y)\}^\alpha dy.$$

OSSERVAZIONE. — Se $0 < \alpha < \beta \leq 1$, ogni funzione generalmente a variazione limitata di ordine β è anche generalmente a variazione limitata di ordine α . Ciò si vede applicando la disuguaglianza di HÖLDER.

La classe di tutte le funzioni generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$) è più larga della classe delle funzioni generalmente a variazione limitata secondo TONELLI⁽³⁾ e CESARI⁽⁴⁾. Daremo infatti ora un esempio di una funzione generalmente a variazione limitata di ordine α , con α numero reale positivo e minore di uno e del resto qualunque, ma non generalmente a variazione limitata secondo TONELLI e CESARI.

Esempio. Si ponga :

$$f(x, y) = 0 \text{ se } x + y < 1; f(x, y) = \frac{y}{x} \text{ se } x + y \geq 1, x \neq 0; f(0, 1) = 0.$$

È, com'è chiaro,

$$V_y(x, 1) = \frac{1}{x}, x \neq 0; V_y(0, 1) = 0, V_x(1, 1) = +\infty$$

È, poi :

$$V_x(1, y) = \frac{y(1+y)}{1-y}, 0 \leq y < 1$$

Infatti, fissato $0 \leq \bar{y} < 1$, si tenga presente che è $f(x, \bar{y}) = 0$ se $0 \leq x < 1 - \bar{y}$ e, quando $1 - \bar{y} \leq x < 1$, la $f(x, \bar{y})$ varia decrescendo da $f(1 - \bar{y}, \bar{y}) = \frac{\bar{y}}{1 - \bar{y}}$ a $f(1, \bar{y}) = \bar{y}$, per cui è :

$$V_x(1, y) = \frac{\bar{y}}{1 - \bar{y}} + \frac{\bar{y}}{1 - \bar{y}} - \bar{y} = \frac{\bar{y}(1 + \bar{y})}{1 - \bar{y}}.$$

⁽³⁾ L. TONELLI. *Sulle funzioni generalmente a variazione limitata*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1936, pp. 315-320.

⁽⁴⁾ L. CESARI. *Sulle funzioni a variazione limitata*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1936, pp. 299-313.

Si osservi ora che, qualunque sia l'insieme E dei punti di Q di misura superficiale nulla che si trascuri e pensando la $f(x, y)$ definita *solo* nei punti rimanenti, non si alterano le due variazioni totali della $f(x, y)$. Poichè le $V_x(1, y)$ e $V_y(x, 1)$ non sono integrabili in $(0, 1)$ la funzione costruita non è generalmente a variazione limitata secondo TONELLI e CESARI, mentre, fissato un qualunque numero reale positivo $\alpha < 1$, essa è generalmente a variazione limitata di ordine α .

2. — In un precedente lavoro ⁽⁵⁾ abbiamo dimostrato il seguente :

TEOREMA I. — *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua in Q ed ivi generalmente a variazione limitata (di ordine uno), dato un numero positivo arbitrario σ , esistono un numero positivo N e un insieme E^* di punti di Q tali che si abbia $m(Q) - m(E^*) < \sigma$ e*

$$\frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leq N$$

per ogni coppia $(x, y), (x', y')$ di punti di E^* ⁽⁶⁾.

Da questo teorema deducemmo, subito dopo, il

TEOREMA II. — *Ogni funzione quasi continua in Q , ivi generalmente a variazione limitata (di ordine uno), è asintoticamente differenziabile, secondo Stepanoff, quasi dappertutto in Q .*

Uno degli scopi di questo lavoro è, anzitutto, di far vedere che questi due teoremi sussistono anche se si considerano funzioni generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), concetto che, come abbiamo osservato, è più ampio di quello di funzione generalmente a variazione limitata (di ordine uno). Più precisamente valgono i due seguenti teoremi :

TEOREMA I'. — *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua in Q , ivi generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), dato un numero positivo arbitrario σ , esistono un numero positivo N e un insieme E^* di punti di Q tali che si abbia $m(Q) - m(E^*) < \sigma$ e*

$$\frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \leq N$$

per ogni coppia $(x, y), (x', y')$ di punti di E^* .

⁽⁵⁾ L. GIULIANO. *Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1939) pp. 41-50.

⁽⁶⁾ Questa proprietà potrebbe dirsi quasi lipschitzianità.

TEOREMA II'. — *Ogni funzione quasi continua in Q , ivi generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), è ivi asintoticamente differenziabile quasi dappertutto.*

4. — Dimostrazione del teorema I'.

Basterà, evidentemente, supporre $0 < \alpha < 1$. Possiamo, senza ledere la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, supporre che sia, in Q , $f \geq 0$; altrimenti, ponendo $f_1 = f$ nei punti di Q in cui $f \geq 0$ e $f_1 = 0$ nei punti di Q in cui $f < 0$ e, inoltre, $f_2 = f$ nei punti di Q in cui $f < 0$ e $f_2 = 0$ nei punti di Q in cui $f \geq 0$, basterà osservare che è $f = f_1 + f_2 = f_1 - (-f_2)$ e che è sempre $f_1 \geq 0$, $-f_2 \geq 0$. Si ragionerà allora separatamente su f_1 e su $-f_2$ per ottenere la validità, per la f , della proposizione che si vuole dimostrare, dopo avere osservato che le f_1 e $-f_2$ sono, al pari di f , funzioni generalmente a variazione limitata di ordine α .

Usufruendo di alcuni risultati stabiliti da CESARI⁽⁷⁾ e ripetendo nostri ragionamenti⁽⁸⁾ si può far vedere che esiste un insieme E' di punti di Q , di misura superficiale nulla, contenente l'insieme E (di cui alla definizione di funzione generalmente a variazione limitata di ordine α) in modo che dette $V'_x(x, y)$ e $V'_y(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$ calcolate senza tenere alcun conto dei valori della $f(x, y)$ in E' , le $V'_x(x, y)$ e $V'_y(x, y)$ siano in Q funzioni di (x, y) quasi dappertutto finite, quasi continue e in modo che $\overline{V'_x(x, y)}$ e $\overline{V'_y(x, y)}$ risultino funzioni quasi continue di y e di x per tutti gli x e y di $(0, 1)$ e le $\{V'_x(1, y)\}^\alpha$ e $\{V'_y(x, 1)\}^\alpha$, come funzioni rispettivamente di y e di x , risultino quasi continue e integrabili in $(0, 1)$.

Esiste⁽⁹⁾ un certo insieme E'' di punti di Q con $m(E'') = m(Q)$, non contenente l'insieme E' , nei punti del quale si possono definire le due funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ mediante le due uguaglianze:

$$(1) \quad \begin{cases} V'_x(x, y) = P(x, y) + Q(x, y) \\ f(x, y) - f(0, y) = P(x, y) - Q(x, y) \end{cases}$$

Le funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono in E'' funzioni quasi continue di (x, y) . Le $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ si possono pensare definite⁽¹⁰⁾ in tutti i punti di Q , esclusi tutti e soli i punti, di misura superficiale nulla, appartenenti a un certo sistema di rette parallele all'asse x .

⁽⁷⁾ loc. cit. (4) pp. 303-305.

⁽⁸⁾ loc. cit. (5) pp. 43-46.

⁽⁹⁾ loc. cit. (5) p: 46.

⁽¹⁰⁾ loc. cit. (5) p. 46.

Consideriamo la funzione $P(x, y)$ la quale risulta definita quasi dappertutto in Q e si dica $p(x, y)$ l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h} \right|^\alpha$$

considerata per tutti i valori di $h \neq 0$. La $p(x, y)$ è funzione quasi continua di (x, y) ⁽¹¹⁾.

Fissato per il momento un numero positivo L che fra poco opportunamente determineremo, e detto e_p l'insieme dei punti (x, y) di Q in cui $p(x, y) > \frac{1}{8} L$, si consideri la sezione $e_p(y_0)$ di e_p con la retta $y = y_0$ e si osservi che ad ogni punto \bar{x} di $e_p(y_0)$ è associato almeno un segmento di lunghezza $|\bar{h}|$ della retta $y = y_0$ che ha tale punto come estremo e per cui è

$$\left| \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h} \right|^\alpha > \frac{1}{8} L.$$

Applicando un lemma di VITALI ⁽¹²⁾, si può scegliere un numero finito $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_s$ di tali segmenti (dipendenti, naturalmente, da y_0) in modo che risultino non sovrappontesi e che, dette $|\bar{h}_1|, |\bar{h}_2|, \dots, |\bar{h}_s|$ le loro lunghezze risulti, indicando con \bar{x}_i l'estremo relativo al segmento \bar{h}_i :

$$m[e_p(y_0)] \leq 4 \sum_1^s |\bar{h}_i| < 32 L^{-1} \sum_1^s |\bar{h}_i|^{1-\alpha} |P(\bar{x}_i + \bar{h}_i, y_0) - P(\bar{x}_i, y_0)|^\alpha.$$

Applicando la disuguaglianza di HÖLDER, si ricava:

$$\begin{aligned} m[e_p(y_0)] &< 32 L^{-1} \left\{ \sum_1^s |P(\bar{x}_i + \bar{h}_i, y_0) - P(\bar{x}_i, y_0)| \right\}^\alpha \left\{ \sum_1^s |\bar{h}_i| \right\}^{1-\alpha} \leq \\ &\leq 32 L^{-1} \{P(1, y_0)\}^\alpha \leq 32 L^{-1} \{V'_x(1, y_0)\}^\alpha \end{aligned}$$

da cui, integrando, si ha:

$$m[e_p] < 32 L^{-1} \int_0^1 \{V'_x(1, y_0)\}^\alpha dy_0.$$

⁽¹¹⁾ loc. cit. ⁽⁵⁾ p. 46.

⁽¹²⁾ loc. cit. ⁽⁵⁾ p. 46, nota ⁽¹⁸⁾.

In corrispondenza al numero $\sigma > 0$ arbitrariamente fissato si determini ora il numero L in modo che sia:

$$L > \frac{12.32. \left\{ \int_0^1 \{V_x(1, y)\}^\alpha dy + \int_0^1 \{V_y(x, 1)\}^\alpha dx \right\}}{\sigma}.$$

Ne viene, se (x, y) e $(x + h, y)$ sono due punti qualunque di Q che non appartengono all'insieme e_p ed, eventualmente, ad un certo insieme di misura superficiale nulla, cioè se (x, y) e $(x + h, y)$ sono due punti qualunque di Q che non appartengono a un insieme che continuiamo ad indicare con e_p e di misura superficiale minore di $\frac{\sigma}{12}$:

$$\left| \frac{P(x + h, y) - P(x, y)}{h} \right|^\alpha \leq \frac{1}{8} L.$$

Ragionando analogamente su $Q(x, y)$, come si è fatto su $P(x, y)$ si ha, se $(x + h, y), (x, y)$ sono due punti qualunque di Q che non appartengono a un insieme e_q di misura superficiale minore di $\frac{\sigma}{12}$:

$$\left| \frac{Q(x + h, y) - Q(x, y)}{h} \right|^\alpha \leq \frac{1}{8} L.$$

Dunque, per la seconda delle uguaglianze (1) si ha, se (x, y) e $(x + h, y)$ sono due punti qualunque di Q che non appartengono a un certo insieme di misura superficiale minore di $\frac{\sigma}{6}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \right|^\alpha &\leq 2^\alpha \left\{ \left| \frac{P(x + h, y) - P(x, y)}{h} \right|^\alpha + \right. \\ &\left. + \left| \frac{Q(x + h, y) - Q(x, y)}{h} \right|^\alpha \right\} \leq 2^\alpha \left\{ \frac{1}{8} L + \frac{1}{8} L \right\} = \frac{L}{2^{3-\alpha}}. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che in un insieme corrispondente è:

$$\left| \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} \right| \leq \frac{L}{2^{3-\alpha}}.$$

Servendosi ora degli stessi ragionamenti adoperati⁽¹³⁾ nel nostro lavoro citato in⁽⁵⁾ si arriva a provare che, in corrispondenza al numero fissato $\sigma > 0$ si può determinare un numero positivo N e un insieme misurabile E^* di Q , tale che $m(Q) - m(E^*) < \sigma$, in modo che se (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E^* si abbia:

$$\frac{|f(x, y) - f(x', y')|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leq N.$$

5. — Il teorema II' discende dal teorema I' allo stesso modo con cui il teorema II è stato, in loc. cit. (5), dedotto dal teorema I.

6. — In un altro nostro recente lavoro⁽¹⁴⁾ abbiamo dimostrato il seguente:

(13) Cogliamo qui l'occasione per far notare esplicitamente che all'inizio di p. 49 del nostro lavoro citato in (5) ci servimmo di un ragionamento che equivale alla seguente proposizione:

Sia E un insieme di punti del quadrato Q , misurabile superficialmente. È allora per quasi tutti i valori $y = \bar{y}$ linearmente misurabile l'insieme $[E, \bar{y}]$ dei punti che la retta $y = \bar{y}$ sega su E . Se (x, \bar{y}) è un punto di tale insieme sezione $[E, \bar{y}]$, si dica $m(x, \bar{y}, n)$ la misura dell'insieme dei punti di $[E, \bar{y}]$ che cadono nell'intervallo di ampiezza $\frac{2}{n}$ della retta $y = \bar{y}$ e avente il centro in (x, \bar{y}) . Posto $\varphi_n(x, y) = \frac{n}{2} m(x, \bar{y}, n)$ si ha:

α) $\varphi_n(x, y)$ è funzione quasi continua di (x, y) in E

β) la successione $\{\varphi_n(x, y)\}$ converge quasi dappertutto in E verso 1.

γ) ad ogni numero positivo arbitrario ε corrisponde un insieme E_ε chiuso, e quindi misurabile superficialmente, appartenente ad E tale che sia $m(E) - m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ nel quale la convergenza della successione verso il valore 1 è uniforme.

Tale proposizione sussiste anche per gli insiemi E dello spazio a un numero qualunque ν di dimensioni che siano misurabili ν — dimensionalmente, quando si considerino le sezioni di E con uno spazio euclideo a un numero $r < \nu$ di dimensioni e si sostituiscono gli intervalli lineari con i cubi r — dimensionali. Basterà ripetere gli stessi ragionamenti di cui ci servimmo per provare in loc. cit. (5) p. 49 l'analoga proposizione per gli insiemi piani.

La dimostrazione di tale proprietà, generalizzata agli insiemi ν — dimensionali, è stata oggetto, qualche anno fa, di una Nota di M. PAGNI, il quale l'ha così ritrovata. Cfr. M. PAGNI: *Un'osservazione sulle densità degli insiemi*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1949) pp. 228-230.

(14) L. GIULIANO. *Una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1952), pp. 99-107. Approfittiamo per chiarire, a proposito di questo lavoro, un punto del ragionamento di cui ci servimmo. A pag. 103 l'insieme e_p che si introdusse va inteso come l'insieme dei punti del quadrato Q in cui è soddisfatta, fissato n , la disuguaglianza $p_n(x, y) > \frac{1}{8} L$. Dunque questo insieme

TEOREMA III. *Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue e generalmente a variazione limitata in Q , ivi ugualmente quasi limitate⁽¹⁵⁾. Si supponga che esista una costante positiva K , indipendente da n , tale che, indicate con $V_x^{(n)}(x, y)$, $V_y^{(n)}(x, y)$ le variazioni totali della $f_n(x, y)$ — calcolate, come al solito, non tenendo conto dei valori assunti dalla $f_n(x, y)$ nei punti dell'insieme E_n , di misura superficiale nulla, di cui alla definizione di funzione generalmente a variazione limitata — si abbia, qualunque sia n :*

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y) dy < K.$$

Allora la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi lipschitziane⁽¹⁵⁾.

Ora, in modo analogo a quanto si è fatto sopra a proposito dei teoremi I e II i quali si generalizzano nei teoremi I' e II' si può far vedere che sussiste il seguente teorema III' più generale del teorema III.

TEOREMA III'. *Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue in Q , ivi generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$) e ugualmente*

può essere indicato con $e_p^{(n)}$. All'inizio di pag. 104 la disuguaglianza che vi compare, servendosi sempre del lemma di VITALI ivi adoperato, va sostituita con

$$(1) \quad m[e_p^{(n)}(y_0)] \leq 4 \sum_1^s |\bar{h}_i| < 32 L^{-1} P_n(1, y_0) < 32 L^{-1} V_x^{(n)}(1, y_0)$$

dove $m[e_p^{(n)}(y_0)]$ indica la misura (lineare) dell'insieme sezione di $e_p^{(n)}$ con la retta $y = y_0$, supposto, com'era detto nel testo, che questa retta segna, di $e_p^{(n)}$, un insieme misurabile. Integrando la (1) si ha allora:

$$m[e_p^{(n)}] < 32 L^{-1} K < \frac{\sigma}{12}.$$

Analogamente l'insieme e_q è opportuno indicarlo con $e_q^{(n)}$. Perciò l'insieme $e = e_p + e_q$ va indicato con $e^{(n)} = e_p^{(n)} + e_q^{(n)}$. All'inizio di pag. 105 l'insieme H può dunque indicarsi con H_n e perciò l'insieme \bar{E}_n che subito dopo è stato introdotto va inteso come l'insieme dei punti comuni ad H_n e a Δ_n . Da questo punto in poi non si richiedono ulteriori precisazioni. Ci limitiamo solo a richiamare l'attenzione del lettore sulla circostanza che l'intero $\bar{j} > 8$ di cui si parla alla fine di pag. 105 è *indipendente da n* , come risultava già dal lavoro stesso, per cui il numero positivo λ che compare alla fine della dimostrazione a pag. 107 dipende *solo da σ e non da n* .

⁽¹⁵⁾ Cfr. loc. cit. (14) p. 101.

quasi limitate. Si supponga che esista una costante positiva K indipendente da n , tale che, indicate, così com'è stato detto nell'enunciato del teorema III, con $V_x^{(n)}(x, y)$, $V_y^{(n)}(x, y)$ le variazioni totali della $f_n(x, y)$ si abbia, qualunque sia n :

$$\int_0^1 \{V_y^{(n)}(x, 1)\}^\alpha dx + \int_0^1 \{V_x^{(n)}(1, y)\}^\alpha dy < K.$$

Allora la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi lipschitziane.

7. — F. CAFIERO in una Sua Nota lincea ⁽¹⁶⁾ ha dato il seguente:

TEOREMA IV. Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue, generalmente a variazione limitata in Q , ed esista un numero positivo K tale che, per ogni n , si abbia

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y) dy < K$$

$$\iint_Q |f_n(x, y)| dx dy < K$$

Allora della successione data se ne può estrarre una convergente in media del primo ordine in Q verso una funzione generalmente a variazione limitata.

Questo teorema di CAFIERO subisce un'estensione analoga a quella messa in luce a proposito dei nostri teoremi I, II, III. Precisamente sussiste il seguente:

TEOREMA IV'. Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue in Q , ivi generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), ed esista un numero positivo K tale che, per ogni n , si abbia:

$$(A) \quad \int_0^1 \{V_y^{(n)}(x, 1)\}^\alpha dx + \int_0^1 \{V_x^{(n)}(1, y)\}^\alpha dy < K$$

$$(B) \quad \iint_Q |f_n(x, y)|^\alpha dx dy < K.$$

⁽¹⁶⁾ F. CAFIERO. Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota I. Rend. Acc. Lincei, (1950), pp. 305-311.

Allora dalla successione data se ne può estrarre una convergente in media di ordine α verso una funzione $f(x, y)$ generalmente a variazione limitata di ordine α , cioè si può estrarre una successione $\{f_{n_m}(x, y)\}$ per cui

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_Q |f_{n_m}(x, y) - f(x, y)|^\alpha dx dy = 0.$$

Basterà, per provare il teorema, far vedere :

1°) che dalla successione data si può estrarre una successione convergente quasi dappertutto verso una funzione generalmente a variazione limitata di ordine α

2°) che gli integrali $\iint_S |f_n(x, y)|^\alpha dx dy$ sono equi assolutamente continui nel senso del VITALI.

La 1ª affermazione è conseguenza dei seguenti fatti :

a) per la condizione (B) le funzioni della successione data sono ugualmente quasi limitate ; b) pel teorema III', le funzioni della successione data sono ugualmente quasi lipschitziane e perciò anche ugualmente quasi continue⁽¹⁷⁾ ; c) secondo un noto teorema di FRÉCHET dalla successione data si può, per a) e b), estrarre una successione di funzioni convergente in misura e perciò, per un teorema di RIESZ, da questa si può estrarre una nuova successione di funzioni convergente quasi dappertutto in Q ; d) la funzione limite è generalmente a variazione limitata di ordine α , secondo un noto ragionamento⁽¹⁹⁾.

La 2ª affermazione si prova usufruendo di ragionamenti noti⁽²⁰⁾.

OSSERVAZIONE. — Il teorema IV' estende anche un altro teorema di C. B. MORREY dimostrato⁽²¹⁾ da questi per la classe delle funzioni che sono state dette da lui e da CALKIN⁽²²⁾ linearmente assolutamente continue.

⁽¹⁷⁾ loc. cit. (14) p. 100.

⁽¹⁸⁾ M. FRÉCHET. *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables*. *Fund. Math.* Tomo IX, (1927) pp. 25-32.

⁽¹⁹⁾ loc. cit. (16) p. 311.

⁽²⁰⁾ loc. cit. (16) p. 306.

⁽²¹⁾ C. B. MORREY. *Functions of several variables and absolute continuity*. II, *Math. Journal*, v. 6 (1940) pp. 187-215.

⁽²²⁾ CALKIN. *Functions of several variables and absolute continuity*. I, *Math. Journal*, v. 6 (1940).

8. OSSERVAZIONE I. — Sia $\varphi(z)$ una funzione definita per $0 \leq z < +\infty$, soddisfacente alle seguenti condizioni:

- a) sia continua e crescente
- b) $\varphi(0) = 0$ e perciò $\varphi(z) > 0$ per $z > 0$
- c) $\lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = +\infty$.

Viene spontanea la seguente

DEFINIZIONE. — Diremo che la funzione $f(x, y)$, definita nel quadrato Q , è ivi $\{\varphi$ — generalmente a variazione limitata se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla (secondo Lebesgue) tale che, indicate con $V_x(x_0, y)$, $V_y(x, y_0)$, $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispettivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$, $V_y(x, 1)$, risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x , nell'intervallo $(0, 1)$, quasi ovunque finite e quasi continue, ed inoltre esistono gli integrali, nel senso del Lebesgue

$$\int_0^1 \varphi \{V_y(x, 1)\} dx, \quad \int_0^1 \varphi \{V_x(1, y)\} dy.$$

La classe delle funzioni $\{\varphi\}$ — generalmente a variazione limitata è evidentemente più estesa della classe delle funzioni generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$) introdotta in questo lavoro — Queste ultime si possono infatti caratterizzare assumendo $\varphi(z) \equiv kz^\alpha$, dove k è una costante positiva e α è un numero reale positivo e ≤ 1 .

OSSERVAZIONE II. — Supponiamo ora che la funzione $\varphi(z)$ soddisfi oltre che alle a), b), c), anche alle seguenti condizioni:

d) esistono due numeri k, α , con $k > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, in modo che, per ogni coppia di numeri z, ζ , con $z \geq 1$, $\zeta \geq 0$ sia

$$(1) \quad \varphi(z\zeta) \leq k z^\alpha \varphi(\zeta)$$

il che implica $k \geq 1$

e) in corrispondenza ad ogni numero $\Gamma > 0$ esiste un numero $H > 0$ in modo che, per ogni intero positivo s e qualunque siano i numeri non negativi z_1, \dots, z_s e i numeri non negativi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, con $\sum_1^s \gamma_i \leq \Gamma$,

risulti: ⁽²³⁾

$$(2) \quad \gamma_1^{1-\alpha} \varphi(z_1) + \gamma_2^{1-\alpha} \varphi(z_2) + \dots + \gamma_s^{1-\alpha} \varphi(z_s) \leq H \varphi(z_1 + z_2 + \dots + z_s).$$

A queste due condizioni soddisfa, evidentemente ⁽²⁴⁾, la funzione $\varphi(z) \equiv k_1 z^\alpha$, con k_1 costante positiva, $0 < \alpha \leq 1$.

Per la sottoclasse delle funzioni $\{\varphi\}$ — generalmente a variazione limitata che così si vengono a considerare si possono ripetere tutti i ragionamenti sviluppati nei n. precedenti, in questa Nota, e valgono pertanto, per le funzioni di quella sottoclasse, i teoremi I', II', III', IV'. Si potrebbe pensare che questa sottoclasse di funzioni $\{\varphi\}$ — generalmente a variazione limitata, per cui cioè la funzione $\varphi(z)$ soddisfa, oltre che alle $a), b), c)$, anche alle $d), e)$, sia effettivamente più larga della classe delle funzioni generalmente a variazione limitata di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), introdotta nel n. 1 di questo lavoro. Ciò è falso. Infatti faremo ora vedere che se la $\varphi(z)$ soddisfa alle condizioni $a), b), c), d), e)$, esistono due numeri positivi M e N con $M \leq N$ tali che si abbia per ogni $z \geq 0$

$$(A) \quad M z^\alpha \leq \varphi(z) \leq N z^\alpha.$$

Per questo, sarà opportuno, anzitutto, osservare che se $0 < z < 1$, $\zeta \geq 0$, la disuguaglianza (1), supposto verificata la condizione $e)$, oltre la $d)$, vale ugualmente. Infatti, fissati z e ζ , $0 \leq z < 1$, $\zeta \geq 0$, sia s il primo intero positivo tale che $sz \geq 1$. Si ha, allora, per la $e)$, dove si faccia $\gamma_1 = \dots = \gamma_s = \frac{\Gamma}{s}$, $z_1 = z_2 = \dots = z_s = z\zeta$:

$$s \frac{\Gamma^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha}} \varphi(z\zeta) \leq H \varphi(sz\zeta)$$

cioè

$$\varphi(z\zeta) \leq \frac{H}{\Gamma^{1-\alpha}} s^{-\alpha} \varphi(sz\zeta)$$

e per la $d)$, essendo $sz \geq 1$:

$$\varphi(z\zeta) \leq \frac{HK}{\Gamma^{1-\alpha}} s^{1-\alpha} s^\alpha z^\alpha \varphi(\zeta) = \frac{HK}{\Gamma^{1-\alpha}} z^\alpha \varphi(\zeta)$$

che è quanto volevasi.

⁽²³⁾ Si potrebbe osservare che, in effetti, la $d)$ può essere sostituita con la seguente condizione, più larga: esista un $\bar{H} > 0$ tale che per s intero positivo e per $z \geq 0$ qualunque si abbia $s^\alpha \varphi(z) \leq \bar{H} \varphi(sz)$.

⁽²⁴⁾ La (2) si prova subito, applicando la disuguaglianza di HÖLDER.

Perciò, se K' è il più grande dei due numeri K e $\frac{HK}{\Gamma^{1-\alpha}}$ si ha qualunque sia $z > 0$ e qualunque sia $\zeta \geq 0$:

$$(3) \quad \varphi(z\zeta) \leq k' z^\alpha \varphi(\zeta).$$

Ciò posto, facciamo vedere, intanto, che dalle d), e) si deduce la (A) . Infatti, se nella (3) si pone $\zeta = 1$, si ha:

$$\varphi(z) \leq K' \varphi(1) z^\alpha$$

e quindi, dicendo $K' \varphi(1) = N$ è, per ogni $z \geq 0$:

$$(4) \quad \varphi(z) \leq N z^\alpha.$$

Inoltre, fissato $\zeta > 0$, sia $z \geq 0$ tale che $z\zeta = 1$. Si ha, per la (3):

$$\varphi(1) \leq K' z^\alpha \varphi(\zeta)$$

cioè

$$\varphi(\zeta) \geq \frac{1}{K'} \varphi(1) \zeta^\alpha$$

dunque, qualunque sia $z > 0$, è, ponendo $\frac{\varphi(1)}{K'} = M$ ⁽²⁵⁾:

$$(5) \quad M z^\alpha \leq \varphi(z).$$

La (4) e la (5) provano la (A) .

Viceversa, supponiamo verificata la (A) . Si ha allora, fissati $z \geq 0$, $\zeta \geq 0$:

$$\varphi(z\zeta) \leq N z^\alpha \zeta^\alpha \leq N z^\alpha \frac{1}{M} \varphi(\zeta) = \frac{N}{M} z^\alpha \varphi(\zeta)$$

cioè è certamente soddisfatta la d).

Inoltre, se Γ è un numero positivo assegnato, s è un intero positivo, z_1, z_2, \dots, z_s sone numeri non negativi qualunque e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ numeri non negativi tali che $\sum_1^s \gamma_i \leq \Gamma$ si ha, per la (A) , applicando la disuguaglianza

⁽²⁵⁾ Si verifica che è $M \leq N$ perchè è certo $K' \geq 1$, ricordando che è $K \geq 1$ e che K' è il più grande dei due numeri K e $\frac{HK}{\Gamma^{1-\alpha}}$.

za di HÖLDER :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{1-a} \varphi(z_1) + \dots + \gamma_s^{1-a} \varphi(z_s) &\leq N [\gamma_1^{1-a} z_1^\alpha + \dots + \gamma_s^{1-a} z_s^\alpha] \leq \\ &\leq N \left(\sum_1^s z_i \right)^\alpha \left(\sum_1^s \gamma_i \right)^{1-\alpha} \leq \frac{N \Gamma^{1-a}}{M} \varphi(z_1 + z_2 + \dots + z_s) \end{aligned}$$

cioè sussiste la e).