

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VITTORIO CHECCUCCI

## **Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni di una omografia**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 9, n° 3-4 (1955), p. 201-206*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1955\\_3\\_9\\_3-4\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_201_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SULLA RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELLE EQUAZIONI DI UNA OMOGRAFIA

di VITTORIO CHECCUCCI (Pisa)

La riduzione a forma canonica, mediante una opportuna scelta del sistema di riferimento, delle equazioni di una omografia  $\omega$  non degenera di uno spazio  $S_n$  (proiettivo, complesso, ad  $n$  dimensioni) in sè, è ottenuta dai vari Autori che si sono occupati dell'argomento <sup>(1)</sup>, con procedimenti alquanto laboriosi e che talvolta richiedono considerazioni delicate ed estranee alla natura geometrica ed elementare del problema.

Non ci sembra perciò privo di interesse esporre qui un procedimento geometrico, rapido ed elementare, per ottenere la suddetta forma canonica.

Richiamate (nel n. 1) le poche nozioni sulle omografie che ci occorreranno nel seguito, nei nn. 2, 3 faremo vedere direttamente che, qualunque sia la  $\omega$  (non degenera), esiste sempre in  $S_n$  un gruppo di spazi che sono uniti, indipendenti, appartengono ad  $S_n$ , e su ciascuno dei quali l'omografia subordinata ha un solo punto unito. Con ciò la riduzione alla forma canonica di JORDAN delle equazioni della  $\omega$  può dirsi conseguita, perchè è ricondotta a quella delle omografie con un solo punto unito, e questa si ottiene, come è noto, in modo molto semplice (n. 4). Infine faremo vedere che le suddette equazioni canoniche sono univocamente determinate dalla  $\omega$  e non dipendono dal procedimento adoperato per ottenerle (nel senso che verrà precisato nel n. 6); otterremo così anche le ben note condizioni di WEIERSTRASS e C. SEGRE, necessarie e sufficienti per l'identità birazionale di due omografie.

---

(1) Per le notizie storiche vedasi: ENRIQUES e CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni ecc.*, Bologna 1918, Vol. II, pag. 681.

Vedasi anche:

G. SCORZA, *Corpi numerici ed algebre*, Messina, 1921, pag. 429.

E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, 1922, pag. 100.

S. CHERUBINO, *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica*, Rend. Acc. Lincei, Serie 6<sup>a</sup>, Vol. XXIII, 1936, Nota I e II.

W. HODGE and D. PEDOE, *Methods of Algebraic Geometry* Cambridge, 1947, Vol. I, pag. 327.

1. — Sia  $\omega$  una omografia (non degenera) di uno spazio (proiettivo complesso)  $S_n$  in sè. Nel seguito avremo occasione di adoperare le seguenti proprietà che, come è ben noto, sono conseguenza immediata delle equazioni della  $\omega$ .

- a) La  $\omega$  ha almeno un punto unito e almeno un iperpiano unito.
- b) Se  $\omega$  ha un solo punto unito allora esso ha un solo iperpiano unito, e viceversa.
- c) In ogni spazio unito la  $\omega$  subordina una omografia.
- d) In ogni stella di rette avente per centro un punto unito la  $\omega$  subordina una omografia.

2. — Diremo che l'omografia  $\omega$  è *riducibile* se esistono due spazi uniti indipendenti ed appartenenti ad  $S_n$ , cioè se esistono due spazi uniti  $S_h$  ed  $S_{n-h-1}$  privi di punti a comune; se non esistono due tali spazi diremo che la  $\omega$  è *irriducibile*.

Dalla definizione segue subito che, *qualunque sia*  $\omega$  (riducibile o no) *esiste sempre un gruppo di spazi*

$$(1) \quad S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_m} \quad (1 \leq m \leq n + 1)$$

che sono uniti, indipendenti<sup>(2)</sup>, appartengono ad  $S_n$ <sup>(3)</sup>, e su ciascuno dei quali la  $\omega$  subordina una omografia irriducibile.

Infatti, se  $\omega$  è irriducibile, lo spazio  $S_n$  forma da solo un gruppo del tipo (1). Se invece la  $\omega$  è riducibile, allora esistono due spazi  $S_h$  ed  $S_{n-h-1}$  che sono uniti, indipendenti, ed appartengono ad  $S_n$ ; se in ciascuno dei detti due spazi la  $\omega$  subordina una omografia irriducibile, allora  $S_h$  ed  $S_{n-h-1}$  formano un gruppo del tipo (1). Se invece l'omografia subordinata da  $\omega$  in uno di essi, per esempio in  $S_h$ , è riducibile, allora esistono (entro  $S_h$ ) due spazi  $S_{h'}$  ed  $S_{h-h'-1}$  che sono uniti, indipendenti, ed appartengono ad  $S_h$ , e i tre spazi  $S_{h'}$ ,  $S_{h-h'-1}$ ,  $S_{n-h-1}$ , sono indipendenti ed appartengono ad  $S_n$ . Se le omografie subordinate da  $\omega$  in ciascuno di questi tre spazi sono tutte irriducibili, allora essi formano un gruppo del tipo (1); in caso diverso si continui come sopra. Il procedimento ha termine certamente perchè il numero degli spazi (indipendenti) di ciascuno dei gruppi che via via si ottengono non può superare  $n + 1$ .

3. — *Le omografie irriducibili sono tutte e sole quelle che hanno un solo punto unito.*

<sup>(2)</sup> Cioè lo spazio congiungente ha dimensione  $h_1 + h_2 + \dots + h_m + m - 1$ .

<sup>(3)</sup> Cioè lo spazio congiungente è  $S_n$ ; quindi è  $\sum_{r=1}^m (h_r + 1) = n + 1$ .

Infatti una omografia riducibile ha almeno due punti uniti, perchè essa ha due spazi uniti privi di punti a comune ed in ciascuno di essi ha almeno un punto unito [n. 1, c) e a)].

Dimostriamo ora che se una omografia  $\omega$  di  $S_n$  ha due punti uniti distinti  $P$  e  $Q$ , essa allora è riducibile, e inoltre gli spazi uniti e privi di punti a comune  $S_h$  ed  $S_{n-h-1}$  (che esistono per la definizione di riducibilità) possono essere scelti in modo che uno di essi contenga  $P$ . La proprietà è senz'altro vera per  $n=1$ ; supponiamo che sia vera per ogni  $S_r$  di dimensione  $r < n$  e dimostriamola per la dimensione  $r = n$ .

A tal fine consideriamo l'omografia  $\omega_P$  subordinata dalla  $\omega$  nella stella di rette  $\Sigma_{n-1}$  avente per centro il punto unito  $P$  [n. 1, d)]. Se la  $\omega_P$  ha una sola retta unita, allora essa ha un solo iperpiano unito [n. 1, b)], e quindi la  $\omega$  ha un solo iperpiano unito passante per  $P$ . Ma la  $\omega$  ha almeno due iperpiani uniti perchè ha uniti i due punti distinti  $P$  e  $Q$  [n. 1, b)]; ne segue che la  $\omega$  ha almeno un iperpiano unito  $S_{n-1}^*$  non passante per  $P$ , e dalla esistenza dei due spazi uniti  $P, S_{n-1}^*$  segue la proprietà che volevamo dimostrare.

Se invece la  $\omega_P$  ha più di una retta unita, allora, essendo  $r = n - 1$  la dimensione della stella di rette  $\Sigma_{n-1}$ , per quanto abbiamo ammesso la  $\omega_P$  è riducibile, quindi in  $\Sigma_{n-1}$  esistono due stelle unite  $\Sigma_{k-1}$  e  $\Sigma_{n-k-1}$  (di dimensioni  $k-1$  e  $n-k-1$ ) prive di rette a comune e tali che una di esse, per esempio  $\Sigma_{k-1}$  contenga la retta  $PQ$ . Gli spazi  $S_k$  ed  $S_{n-k}$  ambienti di queste due stelle sono uniti nella  $\omega$  ed hanno a comune il solo punto  $P$ . E poichè lo spazio unito  $S_k$  ha dimensione  $k < n$  e contiene i due punti uniti  $P$  e  $Q$ , per quanto abbiamo ammesso si ha che l'omografia subordinata da  $\omega$  in esso è riducibile ed esistono (in  $S_k$ ) due spazi  $S_h$  ed  $S_{k-h-1}$  uniti, privi di punti a comune e tali che uno di essi, per esempio  $S_{k-h-1}$ , contiene  $P$ . Gli spazi  $S_{n-k}$  ed  $S_{k-h-1}$  sono uniti nella  $\omega$  ed hanno a comune il solo punto  $P$ , quindi il loro spazio congiungente  $S_{n-h-1}$ , ha la dimensione  $n-h-1$ , è unito nella  $\omega$ , contiene  $P$ , e non ha punti a comune con lo spazio unito  $S_h$ . Con ciò la nostra proprietà risulta dimostrata completamente.

4. — Con una opportuna scelta del sistema di riferimento le equazioni di una omografia  $\omega$  irriducibile si possono scrivere nella forma <sup>(4)</sup>:

$$(2) \quad \begin{cases} \varrho x'_i = x_i + x_{i+1} & (i = 0, 1, \dots, n-1) \\ \varrho x'_n = x_n \end{cases}$$

<sup>(4)</sup> Ciò è ben noto (vedi per es. ENRIQUES-CHISINI, *Loc. cit.*, pag. 679). Ne esponiamo qui una semplice dimostrazione, solo per completezza.

Poichè la  $\omega$  ha un solo punto unito (n. 3), essa ha [n. 1 b)] un solo iperpiano unito  $S_{n-1}^*$ ; in questo  $S_{n-1}^*$  la  $\omega$  subordina una omografia con un solo punto unito e quindi con un solo  $S_{n-2}^*$  unito; in questo  $S_{n-2}^*$  la  $\omega$  subordina una omografia con un solo  $S_{n-3}^*$  unito; ecc. Fissiamo ora un punto  $A_n$  ad arbitrio, purchè fuori di  $S_{n-1}^*$ . Il corrispondente  $A'_n$  di  $A_n$  è distinto da  $A_n$  (perchè  $\omega$  ha un solo punto unito che sta quindi in tutti gli spazi  $S_i^*$ ), non sta in  $S_{n-1}^*$  (perchè  $S_{n-1}^*$  è unito in  $\omega$ ), e la retta  $A_n A'_n$  incontra  $S_{n-1}^*$  in un punto  $A_{n-1}$  che non sta in  $S_{n-2}^*$  (perchè altrimenti l'iperpiano congiungente  $S_{n-2}^*$  ed  $A_n$  sarebbe unito e distinto da  $S_{n-1}^*$ ). Analogamente si vede che il corrispondente  $A'_{n-1}$  di  $A_{n-1}$  è distinto da  $A_{n-1}$ , non sta in  $S_{n-2}^*$ , e la retta  $A_{n-1} A'_{n-1}$  incontra  $S_{n-2}^*$  in un punto  $A_{n-2}$  che non sta in  $S_{n-3}^*$ . Così continuando si ottengono  $n+1$  punti  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0 \equiv S_0^*$ , che sono indipendenti perchè lo spazio congiungente  $A_0, A_1, \dots, A_i$  è lo spazio unito  $S_i^*$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ), e  $A_n$  sta fuori di  $S_{n-1}^*$ .

Scegliendo come vertici della piramide fondamentale ordinatamente punti  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , le equazioni di  $\omega$  diventano del tipo:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho y'_i = a y_i + b_{i+1} y_{i+1} \\ \varrho y'_n = a y_n \end{cases}$$

perchè il corrispondente  $A'_{i+1}$  di  $A_i$  sta sulla retta  $A_{i+1} A_i$ , e la  $\omega$  ha un solo punto unito ( $A_0 \equiv S_0^*$ ). Inoltre i numeri  $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ , sono tutti diversi da zero perchè  $\omega$  è non degenera e irriducibile. Dalle (3), cambiando il punto unità mediante le

$$(4) \quad \varrho y_i = a^i b_{i+1} \dots b_n x_i \quad (5)$$

si ottengono le (2).

5. — Consideriamo infine una omografia  $\omega$  non degenera, qualunque, di  $S_n$  in sè. Indichiamo con

$$S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_m} \quad \left( \sum_{r=1}^m (h_r + 1) = n + 1 \right)$$

un gruppo di spazi uniti, indipendenti, appartenenti ad  $S_n$ , e su ciascuno dei quali la  $\omega$  subordina una omografia irriducibile. Un tale gruppo di spazi esiste per quanto abbiamo visto nel n. 2.

---

(5) Cioè scegliamo come punto unità il punto comune agli  $n$  iperpiani  $S_{n-1}^{(i+1)} \equiv (A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A'_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_n)$ , di equazioni  $a y_i - b_{i+1} y_{i+1} = 0$ .

Fissiamo i vertici della piramide di riferimento di  $S_n$  in modo che i primi  $h_1 + 1$  vertici stiano in  $S_{h_1}$ , i successivi  $h_2 + 1$  stiano in  $S_{h_2}, \dots$ , gli ultimi  $h_m + 1$  stiano in  $S_{h_m}$ . Con ciò il modulo della  $\omega$  diventa del tipo

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}$$

dove le  $B_r$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) indicano matrici quadrate di ordine  $h_r + 1$ , e sono i moduli delle omografie irriducibili  $\omega_r$  subordinate da  $\omega$  negli spazi  $S_{h_r}$ . Se inoltre in ogni  $S_{h_r}$  di dimensione  $h_r > 0$  fissiamo i vertici della piramide di riferimento che stanno in esso, in modo che, rispetto alla omografia irriducibile  $\omega_r$ , essi formino un gruppo di  $h_r + 1$  punti del tipo di quello descritto nel n. 4, le  $B_r$  diventano moduli di sostituzioni del tipo (3).

Infine cambiando il punto unità con una sostituzione  $\varrho y_t = k_t x_t$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ) la quale operi su ciascuno dei gruppi di variabili relativi agli spazi  $S_{h_r}$  di dimensione  $h_r < 0$ , come operano le (4) rispetto alle (3), ogni  $B_r$  diventa del tipo

$$J_{h_r}(a_r) = \begin{bmatrix} a_r & a_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_r & a_r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_r & a_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r \end{bmatrix}$$

con  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , numeri diversi da zero (distinti o no).

Con una tale scelta del sistema di riferimento in  $S_n$ , il modulo di  $\omega$  diventa quindi una matrice  $C$  che è somma diretta delle matrici  $J_{h_1}(a_1), J_{h_2}(a_2), \dots, J_{h_m}(a_m)$ <sup>(6)</sup>. Corrispondentemente le equazioni di  $\omega$  assumono la forma canonica di JORDAN.

6. — Indichiamo con  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$  ( $t \leq m$ ) i numeri  $a_r$  che sono due a due distinti (cioè le radici distinte dell'equazione caratteristica  $D(\varrho) \equiv$

<sup>(6)</sup> Cioè  $C$  è del tipo:

$$C = \begin{bmatrix} J_{h_1}(a_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_2}(a_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_m}(a_m) \end{bmatrix}$$

$\det.(C - \varrho J) = 0$  di  $C$ ); con  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)}$  gli ordini di tutte le  $J$  in cui compare la stessa radice  $\varrho_i$  disposti in ordine non crescente; e infine con  $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)}$ , le molteplicità della radice  $\varrho_i$ , rispettivamente per il determinante  $D(\varrho)$  e per i suoi minori di ordine  $n, n-1, \dots, n-t_i+2$ . Per la particolare forma del determinante  $D(\varrho)$  si vede subito che è

$$\mu_1^{(i)} = e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \dots + e_{t_i}^{(i)}, \mu_2^{(i)} = e_2^{(i)} + e_3^{(i)} + \dots + e_{t_i}^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)} = e_{t_i}^{(i)}$$

e quindi

$$(5) \quad e_1^{(i)} = \mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}, e_2^{(i)} = \mu_2^{(i)} - \mu_3^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)} = \mu_{t_i}^{(i)}.$$

Gli interi  $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \dots, \mu_{t_i}^{(i)}$ , come è noto, dipendono solo dalla  $\omega$  e non dal sistema di riferimento<sup>(7)</sup>; ne segue, per le (5), che anche gli interi  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)}$ , cioè gli ordini delle  $J$  in cui compare la stessa  $\varrho_i$  sono perfettamente determinati dalla  $\omega$ . Da ciò e tenendo presente che i numeri  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$ , sono determinati da  $\omega$  a meno di un fattore di proporzionalità, segue che:

*Il modulo  $C$  delle equazioni canoniche (di JORDAN) di una omografia non degenera  $\omega$  è determinato dalla  $\omega$  a meno dell'ordine in cui le matrici  $J$  si seguono nella diagonale principale e a meno di un fattore di proporzionalità per i numeri  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$ .*

Le espressioni

$$(\varrho - \varrho_i)^{t_i^{(i)}}, (\varrho - \varrho_i)^{t_i^{(i)}}, \dots, (\varrho - \varrho_i)^{t_i^{(i)}}$$

sono i *divisori elementari* (di WEIESTRASS) di  $D(\varrho)$  corrispondenti alla radice  $\varrho_i$ . L'insieme dei gruppi di numeri interi  $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)})$  è la *caratteristica* di C. SEGRE della  $\omega$ .

Dalla unicità (nel senso sopra detto) delle equazioni canoniche della  $\omega$ , seguono subito le classiche condizioni di WEIESTRASS e C. SEGRE, necessarie e sufficienti perchè due omografie siano proiettivamente identiche; basta tener presente che le equazioni di un cambiamento di riferimento si possono interpretare anche come equazioni di una omografia non degenera e viceversa.

(7) Vedi, per esempio, BERTINI, *Loc. cit.* pag. 82.