SANDRO FAEDO

Su un principio di esistenza nell'analisi lineare

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 1-2 (1957), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_1-2_1_0>

SU UN PRINCIPIO DI ESISTENZA NELL'ANALISI LINEARE

di SANDRO FAEDO (Pisa)

1. — Nel Convegno internazionale sulle equazioni alle derivate parziali di Trieste [1] G. FICHERA ha comunicato un principio generale di esistenza nell'Analisi lineare, mediante il quale egli ha potuto dare una trattazione unitaria a numerosi problemi esistenziali. [2]

Siano V un insieme astratto, lineare rispetto al corpo reale [complesso] e $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due spazi di BANACH reali [complessi]. Siano definite in V due trasformazioni lineari $M_1(v)$ e $M_2(v)$, aventi codominio rispettivamente in $\mathcal{B}_1$ e in $\mathcal{B}_2$. Sia assegnato un funzionale lineare e continuo $\Phi(w_1)$, definito in $\mathcal{B}_1$ e si consideri l'equazione

$$\Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)], \tag{1}$$

nell'incognita $\Psi(w_2)$, essendo $\Psi(w_2)$ un funzionale lineare e continuo definito in $\mathcal{B}_2$.

Il principio esistenziale di FICHERA si può così enunciare:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la soluzione dell'equazione* 1), *dato comunque* Φ, *è che esista una costante* K, *tale che sia per ogni* $v \subset V$

$$\| M_1(v) \| \leq K \| M_2(v) \| . \tag{2}$$

(1) « Atti del Convegno internazionale sulle equazioni alle derivate parziali », Trieste, agosto 1954, Ediz. Cremonese, Roma, 1955, pagg. 174-227.

(2) Oltre al lavoro cit. in (1) si veda G. FICHERA, « *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine* », Memorie dell'Accad. Naz. Lincei, S. VIII, vol. V, fasc. L°, 1956; G. FICHERA, « *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche* », Rend. Seminario Mat. Univ. e Pol. di Torino, Vol. 15, 1956, pagg. 27-47.

Soddisfatta la 2), esiste una soluzione Ψ della 1) verificante la disuguaglianza $\| \Psi \| \leq K \| \Phi \|$ e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio $M_2(V)$ di $M_2(v)$ ».

2. — Indichiamo con ω_i l'origine dello spazio di BANACH $\mathcal{B}_i$ e con V_i la varietà lineare delle autosoluzioni dell'equazione $M_i(v) = \omega_i$ $(i = 1, 2)$. La varietà V_i può essere eventualmente vuota.

Se è soddisfatta la 2) è ovviamente $V_2 \subset V_1$.

Se non è $V_2 \subset V_1$ esiste un'autosoluzione di $M_2(v) = \omega_2$ che non verifica la 2), comunque grande si prenda K; in tal caso esistono funzionali lineari continui $\Phi(w_1)$, definiti in $\mathcal{B}_1$ per cui la 1) non possiede soluzione.

TEOREMA I: « *Se non è $V_2 \subset V_1$, condizione necessaria perchè la 1) sia risolubile è che l'assegnato funzionale $\Phi(w_1)$ sia ortogonale a $M_1(V_2)$; ogni soluzione $\Psi(w_2)$ della 1) è allora ortogonale a $M_2(V_1)$ ».*

Infatti se per un certo $\Phi(w_1)$ la 1) ha la soluzione $\Psi(w_2)$ risulta

$$M_2(V_2) = \omega_2, \quad \Psi[M_2(V_2)] = 0$$

e, per la 1),

$$\Phi[M_1(V_2)] = 0 .$$

Analogamente è $M_1(V_1) = \omega_1$, $\Phi[M_1(V_1)] = 0$ e quindi

$$\Psi[M_2(V_1)] = 0 .$$

3. — Studiamo ora l'equazione 1) quando non sia $V_2 \subset V_1$.

TEOREMA II: « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la soluzione Ψ dell'equazione 1), per ogni Φ ortogonale a $M_1(V_2)$, è che esista una costante K, tale che sia per ogni $v \subset V$*

$$\text{estr. inf.}_{v_2 \subset V_2} \| M_1(v + v_2) \| \leq K \| M_2(v) \| . \tag{3}$$

Soddisfatta questa condizione, esiste una soluzione Ψ della 1), ortogonale a $M_2(V_1)$ e verificante la disuguaglianza $\| \Psi \| \leq K \| \Phi \|$ e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale a $M_2(V)$ ».

La condizione è sufficiente.

Per ogni $w_2 \subset M_2(V)$ si consideri un $v \subset V$ tale che sia $M_2(v) = w_2$ e il numero $\Phi[(M_1(v)]$. Dimostriamo che $\Phi[M_1(v)]$ è univocamente determinato da w_2; infatti se $M_2(v') = w_2$ risulta $v - v' \subset V_2$ ed è

$$\Phi[M_1(v)] - \Phi[M_1(v')] = \Phi[M_1(v - v')] = 0 , \tag{4}$$

essendo Φ ortogonale a $M_1(V_2)$. Si è così definito in $M_2(V)$ il funzionale, ovviamente lineare,

$$\psi(w_2) = \Phi[M_1(v + v_2)],$$

dove è $w_2 = M_2(v)$ e $v_2 \subset V_2$.
Tale funzionale è anche continuo in $M_2(V)$. Infatti per ogni $v_2 \subset V_2$ si ha

$$|\psi(w_2)| = |\Phi[M_1(v + v_2)]| \leq \|\Phi\| \cdot \|M_1(v + v_2)\|$$

e, poichè il primo membro non dipende da v_2,

$$|\psi(w_2)| \leq \|\Phi\| \cdot \underset{v_2 \subset V_2}{\text{estr. inf.}} \|M_1(v + v_2)\|;$$

dalla 3) segue

$$|\psi(w_2)| \leq K \|\Phi\| \, \|w_2\|$$

e quindi

$$\|\psi\| \leq K \|\Phi\|.$$

Per il teorema di Hahn-Banach si può prolungare $\psi(w_2)$ in tutto $\mathcal{B}_2$ in modo da ottenere un funzionale lineare e continuo $\Psi(w_2)$ per cui sia ancora

$$\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|.$$

Per il teorema I Ψ è ortogonale a $M_2(V_1)$. È inoltre ovvio che se $\Psi_0(w_2)$ è ortogonale a $M_2(V)$ anche $\Psi + \Psi_0$ soddisfa alla 1) e che viceversa la differenza fra due diverse soluzioni della 1) è ortogonale a $M_2(V)$.

La condizione è necessaria.

Invece di considerare gli spazi di BANACH $\mathcal{B}_i$ ci si può limitare alle loro varietà lineari $M_i(V)$ e ai funzionali lineari in esse definiti. Indichiamo con $\mathfrak{M}_i$ lo spazio duale [3] di $M_i(V)$ e con $\mathfrak{M}_i'$ la varietà lineare, contenuta in $\mathfrak{M}_i$, degli elementi di $\mathfrak{M}_i$ che sono ortogonali a $\mathfrak{M}_i(V_j)$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$.

Se la 1) è risolubile per ogni Φ di $\mathfrak{M}_1'$, essa fa corrispondere a ogni Φ di $\mathfrak{M}_1'$ un solo elemento Ψ di $\mathfrak{M}_2'$; si ha così una trasformazione lineare $\Psi = T(\Phi)$ definita in $\mathfrak{M}_1'$ e con codominio in $\mathfrak{M}_2'$.

Fissato w_2 in $M_2(V)$, al variare di Φ in $\mathfrak{M}_1'$ consideriamo $\Psi = T(\Phi)$ e il numero $\Psi(w_2)$; si viene così ad associare all'elemento w_2 un funzionale lineare, definito in $\mathfrak{M}_1'$ e che indicheremo con $W_1(\Phi)$; la trasformazione

$$W_1(\Phi) = T^*(w_2)$$

---

(3) V. ad es, G. FICHERA, « *Lezioni sulle trasformazioni lineari* », Vol. I, Ist. Mat. Univ. Trieste, 1954, p. 143.

è lineare, definita in $M_2(V)$ e con codominio nel duale di $\mathfrak{M}_1'$. La $T^*(w_2)$ è continua, cioè esiste una costante K tale che sia

$$5)\qquad \| W_1 \| \leq K \| w_2 \| ;$$

ciò si dimostra con lo stesso ragionamento di FICHERA [4].

Si noti che $\| W_1 \|$ è definito da

$$\| W_1 \| = \underset{\Phi \subset \mathfrak{M}_1'}{\text{estr. sup.}} \frac{| W_1(\Phi) |}{\| \Phi \|} .$$

Sia $w_1 \subset M_1(V)$. Ad ogni Φ di $\mathfrak{M}_1'$ si faccia corrispondere il numero $\Phi(w_1)$. Si viene così a definire un funzionale lineare $W_{w_1}(\Phi)$. Dimostriamo che $W_{w_1}(\Phi)$ è continuo e che è

$$6)\qquad \| W_{w_1} \| = \underset{\Phi \subset \mathfrak{M}_1'}{\text{estr. sup.}} \frac{| W_{w_1}(\Phi) |}{\| \Phi \|} = d_{w_1} ,$$

dove d_{w_1} è la distanza fra w_1 e $M_1(V_2)$.

Sia $\Phi \subset \mathfrak{M}_1'$, $w_1 \subset M_1(V - V_2)$ e poniamo $\Phi(w_1) = a$.

Sulla varietà lineare V_{w_1} proiettante $M_1(V_2)$ da w_1, di equazione

$$w = t\, w_1 + \overline{w} ,$$

dove $\overline{w} \subset M_1(V_2)$ e t è un numero, risulta

$$\Phi(w) = t\, a .$$

Perciò è, per $t \neq 0$,

$$7)\qquad \frac{| \Phi(W) |}{\| W \|} = \frac{| a |}{\left\| w_1 + \dfrac{\overline{w}}{t} \right\|}$$

e il modulo di $\Phi(w)$, considerato soltanto su V_{w_1}, è $\dfrac{|a|}{d_{w_1}}$.

Poichè Φ è continuo, se è $d_{w_1} = 0$ deve essere anche $a = 0$; perciò in tal caso il modulo di Φ su V_{w_1} è nullo.

---

(4) Loc. cit. in (1), pagg. 176-177.

Indicato con $\| \Phi \|$ il modulo di $\Phi(w)$ in $M_1(V)$, si ha quindi

8) $$\| \Phi \| \geq \frac{|a|}{d_{w_1}} .$$

Inoltre, per il teorema di HAHN-BANACH esistono certamente in $\mathfrak{M}_1'$ dei Φ per cui nella 8) vale il segno di uguaglianza.

Dalla 8), per $\Phi \subset \mathfrak{M}_1'$, risulta

$$\frac{| W_{w_1} (\Phi) |}{\| \Phi \|} = \frac{| \Phi (w_1) |}{\| \Phi \|} = \frac{|a|}{\|\Phi\|} \leq d_{w_1}$$

ed esistono in $\mathfrak{M}_1'$ elementi per cui vale l'uguaglianza. È così dimostrata la 6).

Se $v \subset V$ ed è $w_1 = M_1(v)$, $w_2 = M_2(v)$, posto $\Psi = T(\Phi)$ si ha per ogni Φ di $\mathfrak{M}_1'$

$$\Phi(w_1) = \Psi(w_2)$$

ossia

$$W_{w_1}(\Phi) = W_1(\Phi)$$

da cui

9) $$\| W_{w_1} \| = \| W_1 \| .$$

Se $v_2 \subset V_2$, consideriamo la varietà degli elementi $M_1(v + v_2)$ di $M_1(V)$. Si ha

$$\underset{v_2 \subset V_2}{\text{estr. inf.}} \| M_1(v + v_2) \| = d_{w_1} ,$$

dove d_{w_1} indica la distanza di w_1 da $M_1(V_2)$.

Ne segue per le 6) e 9)

$$\underset{v_2 \subset V_2}{\text{estr. inf.}} \| M_1(v + v_2) \| = \| W_{w_1} \| = \| W_1 \|$$

e quindi per la 5)

$$\underset{v_2 \subset V_2}{\text{estr. inf.}} \| M_1(v + v_2) \| \leq K \| w_2 \| = K \| M_2(v) \| ;$$

è così dimostrato che sussiste la 3).

OSSERVAZIONE: Se $V_2 \subset V_1$ è $M_1(V_2) = \omega_1$ ed ogni Φ è ortogonale a $M_1(V_2)$; inoltre è $M_1(v + v_2) = M_1(v)$ per ogni $v_2 \subset V_2$. In tal caso la 3) si riduce alla 2) e si riottiene il teorema di FICHERA.

4. — Come prima applicazione consideriamo il problema dell'integrazione di una equazione alle derivate parziali ellittico-parabolica del secondo ordine. In un insieme aperto A dello spazio cartesiano S_r è data l'equazione differenziale

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{h,k}^{1\ldots r} a_{hk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \, \partial x_k} + \sum_{h=1}^{r} b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)\, u = f \qquad (a_{hk} = a_{kh}), \tag{10}$$

con $\Sigma\, a_{hk} \lambda_h \lambda_k$ definita o semidefinita positiva in ogni punto $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ di A. Si supponga inoltre che c sia continua e $b_h\, [a_{hk}]$ siano rispettivamente di classe uno e due in $A + \Sigma$, dove Σ denota la frontiera di A. Indichiamo con $\mathcal{E}^*(u)$ l'operatore aggiunto ad $\mathcal{E}(u)$ e cioè

$$\mathcal{E}^*(u) = \sum_{hk}^{1\ldots r} \frac{\partial^2 (a_{hk}\, u)}{\partial x_h \, \partial x_k} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial (b_h\, u)}{\partial x_h} + c\, u .$$

La frontiera Σ di A è costituita da porzioni di ipersuperficie regolari $\Sigma_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$. Detto Σ_i' l'insieme dei punti di Σ_i in cui l'iperpiano tangente a Σ_i ha giacitura caratteristica rispetto all'equazione, consideriamo la funzione

$$b(x) = \sum_{h=1}^{r} \left[\left(b_h - \sum_{k}^{1\ldots r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \cos (x_{h,n}) \right) \right]$$

dove $\cos(x_h, n)$ è il coseno direttore rispetto all'asse x_h della normale n a Σ_i volta verso l'interno di A. La funzione $b(x)$ può essere estesa per continuità su tutta Σ_i. Diciamo $\Sigma_i^{(1)}$ l'insieme dei punti di Σ_h' nei quali è $b \geq 0$ e poniamo

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma_1^{(1)} + \Sigma_2^{(1)} + \ldots + \Sigma_n^{(1)},$$

$$\Sigma^{(2)} = (\Sigma_1' + \Sigma_2' + \ldots + \Sigma_n') - \Sigma^{(1)},$$

$$\Sigma^{(3)} = \Sigma - (\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}) .$$

Indichiamo con $C(\mathcal{E})$ la classe delle funzioni $u(x)$ che soddisfano alle condizioni:

a) ogni u di $C(\mathcal{E})$ è continua in $A + \Sigma$;

b) è possibile decomporre $A + \Sigma$ in un numero finito di domini regolari, due a due privi di punti interni in comune $T_1, T_2, \ldots, T_s$ tali che se $b_k\, [a_{hk}]$ non è identicamente nullo in $A + \Sigma$ la derivata parziale $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_h \, \partial x_k} \right]$ esiste in ogni punto interno di T_i e coincide con una funzione continua in $T_i\,(i=1\,,2\,,\ldots,s)$. Se $u \subset C(\mathcal{E})$ e v è di classe due in $A+\Sigma$ si ha per la formula di GREEN-GAUSS [5]

$$\int_A \{u\,\mathcal{E}^*(v) - v\,\mathcal{E}(u)\}\,d\,x = \int_\Sigma b\,u\,v\,d\,\sigma + \int_{\Sigma^{(3)}} a\left[v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]d\,\sigma\,, \tag{11}$$

dove $d\,x = d\,x_1\cdot d\,x_2\ldots d\,x_r$ e $d\,\sigma$ è la misura dell'elemento superficiale su Σ; inoltre ν indica l'asse conormale a Σ e cioè tale che sia

$$a\cos(x_h\,,\nu) = \sum_h a_{hk}(x)\cos(x_k\,,n) \qquad (h=1\,,2\,,\ldots r)$$

ed il fattore positivo a è definito da

$$a\cos(n\,,\nu) = \sum_{h,k} a_{h,h}(x)\cos(x_h\,,n)\cos(x_k\,,n)\,.$$

G. FICHERA [6] ha dimostrato che è ben posto per l'equazione (10) il problema di cercarne la soluzione verificante le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(x) = 0 \quad \text{per } x \subset \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)'}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{per } x \subset \Sigma^{(3)''} \end{cases} \tag{12}$$

dove $\Sigma^{(3)'}$ e $\Sigma^{(3)''}$ sono due insiemi privi di punti a comune e tali che $\Sigma^{(3)'} + \Sigma^{(3)''} = \Sigma^{(3)}$.

Indichiamo con V la classe di tutte le funzioni verificanti le condizioni seguenti:

1^0) v appartiene a $C(\mathcal{E})$;

2^0) comunque si assegni una u verificante le 12) di classe uno in $A+\Sigma$ e tale che $\mathcal{E}(u)$ sia continua in A e limitata in $A+\Sigma$ risulti ($\bar{\Sigma}^{(3)'}$ e $\bar{\Sigma}^{(13)''}$ essendo l'involucro di $\Sigma^{(3)'}$ e $\Sigma^{(3)''}$)

$$\int_{\Sigma^{(2)}+\bar{\Sigma}^{(3)''}} b\,u\,v\,d\,\sigma + \int_{\bar{\Sigma}^{(3)'}} a\,v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\,\sigma - \int_{\bar{\Sigma}^{(3)''}} a\,u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\,\sigma = 0\,.$$

---

[5] Cfr. M. PICONE «*Appunti di Analisi superiore*», Napoli, Ed. Rondinella, 1940, pag. 735.

[6] G. FICHERA, loc cit. in (2). È inoltre da osservare che l'omogeneità delle 12) e 13) non è una condizione essenzialmente restrittiva.

Se la soluzione u del problema 10), 12) verifica per ogni $v \subset V$ la condizione 2^0) si ha per ogni v di V

$$\int_A (u\, \mathcal{E}^*(v) - v f)\, d x = 0 . \tag{13}$$

Si indichi con $\mathcal{L}^{(p)}(A)$ lo spazio di BANACH delle funzioni di modulo di potenza p^{ma} $(p \geq 1)$ sommabile in A e sia $f \in \mathcal{L}^{(p)}(A)$. Una funzione $u \in \mathcal{L}^{(q)}(A)\,(q \geq 1)$ che per ogni $v \subset V$ verifica le 13) si dice una *soluzione debole* $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$ del problema considerato.

Ad ogni elemento $v \subset V$ facciamo corrispondere l'elemento v dello spazio di BANACH $\mathcal{B}_1$ con

$$\| v \| = \left(\int_A | v |^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

e l'elemento $\mathcal{E}^*(v)$ dello spazio di BANACH $\mathcal{B}_2$ con

$$\| \mathcal{E}^*(v) \| = \left(\int_A | \mathcal{E}^*(v) |^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} .$$

Dal teorema II segue immediatamente per il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui definiti in $\mathcal{L}^{(p)}$ (7)

TEOREMA III: « *Siano p e q due numeri maggiori di uno e sia V_0 l'insieme delle autosoluzioni di $\mathcal{E}^*(v)$. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzioue debole $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$ del problema considerato, comunque si assegni f verificante le condizioni*

$$\int_A v_0 f\, d x = 0 \qquad (v_0 \subset V_0),$$

è che esista una costante K tale che per ogni $v \subset V$ si abbia

$$\underset{v_0 \subset V_0}{\text{estr. inf.}} \left(\int_A | v + v_0 |^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq K \left(\int_A | \mathcal{E}^*(v) |^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} . »$$

Per $p = \infty$ si ottiene lo spazio $\mathcal{L}^{(\infty)}(A)$ delle funzioni pseudo-limitate in A e nella relazione precedente va sostituito a $\dfrac{1}{p-1}$ e $\dfrac{p-1}{p}$ il valore 1; analogamente per $q = \infty$.

(7) V. loc. cit. in (3), pag. 473.