ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARMELO MAMMANA

Determinazione dei tipi di omografie di cui una data omografia si puo' considerare come limite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 249-263

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_249_0>

DETERMINAZIONE DEI TIPI DI OMOGRAFIE DI CUI UNA DATA OMOGRAFIA SI PUO' CONSIDERARE COME LIMITE

di CARMELO MAMMANA (Catania)

È noto [1] che una omografia particolare di S_n di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1^{(1)}-1,\, h_2^{(1)}-1,\ldots,h_{t^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1,\, h_2^{(2)}-1,\ldots,h_{t^{(2)}}^{(2)}-1)\ldots(h_1^{(\nu)}-1,\, h_2^{(\nu)}-1,\ldots,h_{t^{(\nu)}}^{(\nu)}-1)]$$

si può considerare come limite di omografie generali di S_n di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1^{(1)}-1)(h_2^{(1)}-1)\ldots(h_{t^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1)(h_2^{(2)}-1)\ldots(h_{t^{(2)}}^{(2)}-1)\ldots(h_1^{(\nu)}-1)(h_2^{(\nu)}-1)\ldots(h_{t^{(\nu)}}^{(\nu)}-1)].$$

Per esempio in S_3 una omologia speciale $[(2\,,0)]$ è limite di omologie generali $[(2)\,(0)]$; una biassiale speciale $[(1\,,\,1)]$ è limite di biassiali generali $[(1)\,(1)]$; ecc.

Ma si verifica facilmente che una omologia speciale è limite anche di biassiali speciali; una biassiale speciale è limite anche di omografie di tipo $[(1\ 0\ 0)]$; ecc.

In questo lavoro ci proponiamo di determinare tutti i tipi di omografie di S_n di cui una data omografia $\overline{\omega}$ di S_n si può considerare come limite.

Considereremo sempre omografie non degeneri, e, per comodità di ragionamento, ci riferiremo costantemente alla classificazione di C. SEGRE mediante gli esponenti e dei divisori elementari. Tuttavia i risultati ottenuti

---

[1] Cfr. PREDELLA: *Le omografie di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* Annali di Matematica, 17 (2) 1889-90. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* Principato, Messina, 1923, pag. 94. ENRIQUES-CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* Zanichelli, Bologna, 1918, Vol. II, pag. 684.

saranno anche enunciati mediante gli interi della caratteristica di PREDELLA, cioè mediante le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (semplici o multipli). Nei nn. 2, 3, 4 dimostreremo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \ldots, h_t - 1)] \qquad h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_t$$

si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica di PREDELLA

$$[(h_1^{(1)}-1, h_2^{(1)}-1,\ldots,h_{t(1)}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1, h_2^{(2)}-1,\ldots,h_{t(2)}^{(2)}-1)\ldots(h_1^{(\nu)}-1, h_2^{(\nu)}-1,\ldots,h_{t(\nu)}^{(\nu)}-1)]$$

con $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$ e $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$, è che detto $\overline{d}_r$ il numero degli interi $h_1, h_2, \ldots, h_t$ che sono $\geq r$ e d_r il numero degli interi $h_i^{(j)}$ che sono $\geq r$, si abbia:

$$(+) \qquad \begin{gathered} h_1 \geq h_1^{(1)} \\ \overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \ldots + \overline{d}_r \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, h_1^{(1)}-1). \end{gathered}$$

Nel n. 6 estenderemo questo risultato al caso generale dimostrando che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una data omografia $\overline{\omega}$ di S_n con una certa caratteristica di PREDELLA *$\overline{\alpha}$, formata da p gruppi, si possa considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica di* PREDELLA *α, formata da q gruppi, è che i q gruppi di α si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\overline{\alpha}$ e in modo che:*

1) *La somma degli h di ogni gruppo di $\overline{\alpha}$ sia uguale alla somma degli h di tutti i gruppi di α che stanno nella classe corrispondente.*

2) *Fra gli h di ogni gruppo di $\overline{\alpha}$ e gli h dei gruppi di α che stanno nella classe corrispondente valgano le relazioni analoghe alle* (+).

1\. — Sia ω una omografia (non degenere) di uno spazio S_n (proiettivo, complesso, ad n dimensioni) in sè, di equazioni

$$\varrho\, x_i' = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, x_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Chiameremo la matrice $A = [a_{ik}]$ modulo dell'omografia ω. Indicheremo con: $D_{n+1}(\varrho)$ il determinante $|A - \varrho I|$ del primo membro dell'equazione caratteristica; $\{D_n^{(s)}(\varrho)\}$ la totalità dei minori di ordine n estratti dal determinante $D_{n+1}(\varrho)$; $\{D_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}$ la totalità dei minori di ordine $n-1$ estratti dal determinante $D_{n+1}(\varrho)$; ecc. Tali notazioni, ed analoghe, adopereremo per tutte le omografie che considereremo nel seguito.

Inoltre, quando diremo che una omografia $\overline{\omega}$ di modulo $[\overline{a}_{ik}]$ è limite, per $t \to 0$, di una omografia $\omega(t)$ dipendente da un parametro t (²), intenderemo dire che il fattore di proporzionalità a meno del quale sono determinati i coefficienti di ogni omografia $\omega(t)$ si possa scegliere in modo che, per $t \to 0$, i detti coefficienti tendano ai corrispondenti coefficienti $\overline{a}_{ik}$ di $\overline{\omega}$. Nel seguito supporremo sempre di avere scelto in questo modo il detto fattore di proporzionalità. Pertanto, se è $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = \overline{\omega}$, allora detti $a_{ik}(t)$ i coefficienti delle equazioni di $\omega(t)$ (col fattore di proporzionalità scelto nel modo detto sopra), si ha:

$$\lim_{t \to 0} a_{ik}(t) = \overline{a}_{ik}$$

2. — Consideriamo l'omografia $\overline{\omega}$ (non degenere) di S_n in sè, di equazioni

$$\varrho x_i' = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{ik} x_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad |\overline{A}'| = |\overline{a}_{ik}| \neq 0 \tag{1}$$

e supponiamo che la sua equazione caratteristica $\overline{D}_{n+1}(\varrho) = 0$ abbia una sola radice $\overline{\varrho}$, e che

$$[(e_1, e_2, \ldots, e_h)] \qquad (e_i \geq e_{i+1}) \tag{2}$$

sia la sua caratteristica (³).

I numeri:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= e_1 + e_2 + \ldots + e_h \\ \mu_2 &= e_2 + \ldots + e_h \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu_h &= e_h \end{aligned} \tag{3}$$

(²) Il parametro t può variare con continuità oppure prendere solo una successione (tendente e zero) di valori. In quest'ultimo caso avremo una successione di omografie che tende ad $\overline{\omega}$.

(³) Qui ed in seguito intenderemo parlare di caratteristica di C. Segre di una omografia. I numeri e_i sono gli esponenti dei divisori elementari (di Weiestrass) di $\overline{D}_{n+1}(\varrho)$ considerati in ordine non crescente.

saranno [4] rispettivamente: μ_1 la molteplicità della radice $\bar{\varrho}$ per il $\bar{D}_{n+1}(\varrho)$, μ_2 la molteplicità della radice $\bar{\varrho}$ per il massimo comune divisore dei polinomi $\{\bar{D}_n^{(s)}(\varrho)\}$, μ_3 la molteplicità della radice $\bar{\varrho}$ per il massimo comune divisore dei polinomi $\{\bar{D}_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}$, ecc.

Potremo quindi scrivere:

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}_{n+1}(\varrho) = (\varrho - \bar{\varrho})^{\mu_1}\,\bar{H}_{n+1} && (\mu_1 = n+1)\\
(4)\qquad &\{\bar{D}_n^{(s)}(\varrho)\} = (\varrho - \bar{\varrho})^{\mu_2}\,\{\bar{H}_n^{(s)}(\varrho)\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\{\bar{D}_{n-h+2}^{(s)}(\varrho)\} = (\varrho - \bar{\varrho})^{\mu_h}\,\{\bar{H}_{n-h+2}^{(s)}(\varrho)\}
\end{aligned}
$$

dove

$$\{\bar{D}_{n-i+2}^{(s)}(\varrho)\} = (\varrho - \bar{\varrho})^{\mu_i}\,\{\bar{H}_{n-i+2}^{(s)}(\varrho)\}$$

indica l'insieme delle uguaglianze:

$$\bar{D}_{n-i+2}^{(s)}(\varrho) = (\varrho - \bar{\varrho})^{\mu_i}\,\bar{H}_{n-i+2}^{(s)}(\varrho)$$

e $\bar{H}_{n+1}$ è una costante, $\{\bar{H}_n^{(s)}(\varrho)\}$ sono polinomi in ϱ primi fra loro, come pure sono primi fra loro i polinomi in ϱ di ciascuno degli $n-1$ gruppi:

$$\{\bar{H}_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots, \{\bar{H}_{n-h+2}^{(s)}(\varrho)\}, \{\bar{D}_{n-h+1}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots, \{\bar{D}_1^{(s)}(\varrho)\}.$$

Supponiamo ora che la suddetta omografia $\bar{\omega}$ di equazioni (1) si possa considerare come limite, per $t \to 0$, di una omografia $\omega(t)$ [5], dipendente da un parametro t, di equazioni

$$\varrho\, x_i' = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}(t)\, x_k \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad |A| = |a_{ik}(t)| \neq 0 \tag{5}$$

e di caratteristica, per $t \neq 0$, sempre

$$[(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{h^{(1)}}^{(1)})\,(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{h^{(2)}}^{(2)}) \ldots (e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \ldots, e_{h^{(\nu)}}^{(\nu)})] \tag{6}$$

---

[4] Cfr. BERTINI, *Loc. cit.* in [1], pag. 82.

[5] Intenderemo sempre che la $\omega(t)$ sia definita per valori di $t \neq 0$ e in un opportuno intorno di $t = 0$.

con
$$h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \ldots \geq h^{(\nu)} \quad , \quad e_i^{(j)} \geq e_{i+1}^{(j)} .$$

Essendo $\lim\limits_{t\to 0} \omega(t) = \overline{\omega}$, per quanto abbiamo detto nel n. 1, possiamo supporre che sia

$$\lim_{t\to 0} a_{ik}(t) = \overline{a}_{ik} \tag{7}$$

Da queste segue intanto che le ν radici
$$\varrho_1(t) \, , \, \varrho_2(t) \, , \ldots , \varrho_\nu(t)$$
dell'equazione caratteristica $D_{n+1}(\varrho) = 0$ della $\omega(t)$ tendono tutte a $\overline{\varrho}$, per $t \to 0$.

Inoltre, essendo i numeri:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(i)} &= e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{h^{(i)}}^{(i)} \\ \mu_2^{(i)} &= e_2^{(i)} + \ldots + e_{h^{(i)}}^{(i)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{h^{(i)}}^{(i)} &= e_{h^{(i)}}^{(i)} \end{aligned} \tag{8}$$

rispettivamente i valori delle molteplicità della radice $\varrho_i(t)$ per il determinante $D_{n+1}(\varrho)$ relativo alla $\omega(t)$, per il massimo comune divisore dei minori $D_n^{(s)}(\varrho)$ di ordine n estratti dal $D_{n+1}(\varrho)$, ecc., potremo scrivere:

$$\begin{aligned} D_{n+1}(\varrho) &= (\varrho - \varrho_1(t))^{\mu_1^{(1)}} (\varrho - \varrho_2(t))^{\mu_1^{(2)}} \ldots (\varrho - \varrho_\nu(t))^{\mu_1^{(\nu)}} H_{n+1} \qquad \left(\sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} = n+1\right) \\ \{ D_n^{(s)}(\varrho) \} &= (\varrho - \varrho_1(t))^{\mu_2^{(1)}} (\varrho - \varrho_2(t))^{\mu_2^{(2)}} \ldots (\varrho - \varrho_\nu(t))^{\mu_2^{(\nu)}} \{ H_n^{(s)}(\varrho) \} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{ D_{n-h^{(1)}+2}^{(s)}(\varrho) \} &= (\varrho - \varrho_1(t))^{\mu_{h^{(1)}}^{(1)}} (\varrho - \varrho_2(t))^{\mu_{h^{(1)}}^{(2)}} \ldots (\varrho - \varrho_\nu(t))^{\mu_{h^{(1)}}^{(\nu)}} \{ H_{n-h^{(1)}+2}^{(s)}(\varrho) \} \text{ (6)} \end{aligned} \tag{9}$$

dove H_{n+1} è una costante, $\{ H_n^{(s)}(\varrho) \}$ sono polinomi in ϱ primi fra di loro,

---

(6) Qui ed in seguito intenderemo $\mu_j^{(i)} = 0$ per $j > h^{(i)}$.

come pure sono primi fra di loro i polinomi in ϱ di ciascuno degli $n-1$ gruppi:

$$\{H_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots, \{H_{n-h^{(1)}+2}^{(s)}(\varrho)\}, \{D_{n-h^{(1)}+1}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots, \{D_1^{(s)}(\varrho)\}.$$

Per le (7) si ha sempre:

$$\lim_{t \to 0} D_i^{(s)}(\varrho) = \overline{D}_i^{(s)}(\varrho)$$

cioè ogni minore estratto dal $D_{n+1}(\varrho)$ tende, per $t \to 0$, all'analogo minore estratto dal $\overline{D}_{n+1}(\varrho)$. Ne segue che, passando al limite, per $t \to 0$, le (9) diventano:

$$\overline{D}_{n+1}(\varrho) = (\varrho - \overline{\varrho})^{\sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)}} H_{n+1}^*$$

$$(10) \qquad \{\overline{D}_n^{(s)}(\varrho)\} = (\varrho - \overline{\varrho})^{\sum_{i=1}^{\nu} \mu_2^{(i)}} \{H_n^{*(s)}(\varrho)\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{\overline{D}_{n-h^{(1)}+2}(\varrho)\} = (\varrho - \overline{\varrho})^{\sum_{i=1}^{\nu} \mu_{h_1^{(1)}}^{(i)}} \{H_{n-h^{(1)}+2}^{*(s)}(\varrho)\}$$

dove i polinomi in ϱ di ciascuno degli $h^{(1)}-1$ gruppi $\{H_n^{*(s)}(\varrho)\}, \{H_{n-1}^{*(s)}(\varrho)\}, \ldots$ $\ldots, \{H_{n-h^{(1)}+2}^{*(s)}(\varrho)\}$ possono non essere primi fra di loro.

Da ciò segue intanto che è

$$h^{(1)} \leq h$$

perchè i polinomi di ciascuno degli $n-h+1$ gruppi $\{\overline{D}_{n-h+1}^{(s)}(\varrho)\}, \{\overline{D}_{n-h}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots$ $\ldots, \{\overline{D}_1^{(s)}(\varrho)\}$ sono primi fra di loro. Inoltre, dalle (4) e dalle (10), ricordando che i polinomi di ciascuno dei gruppi $\{\overline{H}_n^{(s)}(\varrho)\}, \{\overline{H}_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}, \ldots, \{\overline{H}_{n-h^{(1)}+2}^{(s)}(\varrho)\}$, sono primi fra di loro, segue che è

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mu_2^{(i)} \leq \mu_2, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \mu_3^{(i)} \leq \mu_3, \ldots, \sum_{i=1}^{\nu} \mu_{h^{(1)}}^{(i)} \leq \mu_{h^{(1)}}.$$

Da queste, tenendo presente le (3) e le (8) e ricordando che è $\mu_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} = n + 1$, segue:

$$e_1 = \mu_1 - \mu_2 \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_2^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}$$

$$e_1 + e_2 = \mu_1 - \mu_3 \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_3^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_3^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)})$$

. . . .

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_{h^{(1)}-1} = \mu_1 - \mu_{h^{(1)}} \leq \sum_{i=1}^{\nu} \mu_1^{(i)} - \sum_{i=1}^{\nu} \mu_{h^{(1)}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mu_1^{(i)} - \mu_{h^{(1)}}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{h^{(1)}-1}^{(i)})\ [7].$$

Concludendo si ha che:

Se una omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \ldots, e_h)] \qquad e_i \geq e_{i+1} \tag{11}$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$[(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{h^{(1)}}^{(1)})\ (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{h^{(2)}}^{(2)}) \ldots (e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \ldots, e_{h^{(\nu)}}^{(\nu)})] \tag{12}$$

con $h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \ldots \geq h^{(\nu)}$ ed $e_i^{(j)} \geq e_{i+1}^{(j)}$, allora è necessariamente:

$$h \geq h^{(1)}$$

$$e_1 \leq \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}$$

$$e_1 + e_2 \leq \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)}) \tag{13}$$

. . . .

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_{h^{(1)}-1} \leq \sum_{i=1}^{\nu} (e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{h^{(1)}-1}^{(i)}).$$

3. — Vogliamo ora invertire il risultato precedente, cioè vogliamo dimostrare che se valgono le relazioni (13) allora ogni omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di una omografia di S_n di caratteristica (12).

---

[7] Qui ed in seguito intenderemo $e_j^{(i)} = 0$ per $j > h^{(j)}$.

Proviamo anzitutto che:

a) *Un'omografia* $\overline{\omega}$ *di* S_n *di caratteristica*

$$[(e_1\,,\,e_2)] \tag{14}$$

con $e_1 \geq e_2 \geq 1$ *si può ottenere come limite di omografie di* S_n *di caratteristica*

$$[(e_1 + 1\,,\,e_2 - 1)]. \tag{15}$$

Infatti, con una opportuna scelta del sistema di riferimento in S_n il modulo della omografia $\overline{\omega}$ si può scrivere nella forma (canonica di JORDAN):

$$\overline{K} = [J_{e_1}\,,\,J_{e_2}]$$

dove $[J_{e_1}\,,\,J_{e_2}]$ indica la matrice somma diretta delle matrici J_{e_1} ed J_{e_2}, e J_e è una matrice quadrata di ordine e e del tipo

$$J_e = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{matrix}\right| .$$

Consideriamo la omografia $\omega(t)$ che ha per modulo

$$K(t) = \left|\begin{array}{c|c} J_{e_1} & 0 \\ \hline A & J_{e_2} \end{array}\right|$$

dove A è una matrice ad e_1 righe ed e_2 colonne, avente tutti gli elementi nulli tranne quello di posto (1,1) che è uguale a t.

Tale omografia $\omega(t)$ risulta di caratteristica (15) per $t \neq 0$ [8], e si ha $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = \overline{\omega}$.

---

[8] Infatti posto:

$$H = \left|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t \end{matrix} & \begin{matrix} I_{e_1} \\ \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} I_{e_2-1} \\ \hline O \end{matrix} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & -tI_{e_2-1} \end{array}\right| \quad , \quad K' = [J_{e_1+1}\,,\,J_{e_2-1}]$$

dove I_r indica la matrice identica di ordine r, si ha: $K(t)\,H = HK'$.

Dalla proprietà *a*) segue subito che:

a′) *Ogni omografia* $\overline{\omega}$ *di* S_n *di caratteristica*

$$[(e_1 , e_2 , \ldots , e_h)]$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n *di caratteristica:*

$$[(e_1 , e_2 , \ldots , e_{r-1} , e_r + 1 , e_{r+1} , \ldots , e_{t-1} , e_t - 1, e_{t+1} , \ldots , e_h)].$$

b) Dimostriamo ora che:

Ogni omografia $\overline{\omega}$ *di* S_n *di caratteristica*

$$(\gamma_0) \qquad [(e_1 , e_2 , \ldots , e_h)] \qquad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n *di caratteristica*

$$(\gamma') \qquad [(e'_1 , e'_2 , \ldots , e'_h)] \qquad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$(16) \qquad e_1 \leq e'_1 , \sum_{i=1}^{2} e_i \leq \sum_{i=1}^{2} e'_i , \ldots , \sum_{i=1}^{h-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h-1} e'_i .$$

Se le due caratteristiche (γ_0) e (γ') coincidono, la proprietà è immediata. Se sono distinte, allora, essendo $\sum_{i=1}^{h} e_i = \sum_{i=1}^{h} e'_i = n + 1$, almeno uno dei numeri e_i è maggiore del corrispondente e'_i, e almeno uno degli stessi numeri e_i è minore del corrispondente e'_i.

Sia e_t l'ultimo dei numeri $e_1 , e_2 , \ldots , e_h$, che è maggiore del corrispondente e'. Si ha:

$$e_t - 1 \geq e'_t$$

e, se è $t < h$, dalla definizione di e_t, dalle (16), e dalla $\sum_{i=1}^{h} e_i = \sum_{i=1}^{h} e'_i = n + 1$, segue

$$e_{t+1} = e'_{t+1} , e_{t+2} = e'_{t+2} , \ldots , e_h = e'_h .$$

Inoltre, essendo $e_t - 1 \geq e'_t \geq e'_{t+1} = e_{t+1}$, si ha anche

$$e_t - 1 \geq e_{t+1} .$$

Sia ora e_s l'ultimo dei numeri $e_1 , e_2 , \ldots , e_h$ che è minore del corrispondente e'. Si ha

$$e_s < e'_s$$

con $s \leq t-1$, e, se è $s < t-1$, si ha anche:

$$e_{s+1} \geq e'_{s+1}\ ,\ e_{s+2} \geq e'_{s+2}\ ,\ \ldots\ ,\ e_{t-1} \geq e'_{t-1}\ . \tag{17}$$

Sia infine e_r il primo dei numeri $e_1, e_2, \ldots, e_h$, che è uguale ad e_s. Dalle $e_i \geq e_{i+1}$ segue

$$e_r = e_{r+1} = \ldots = e_s$$

e, se è $r > 1$, si ha

$$e_{r-1} \geq e_r + 1\ .$$

Inoltre, essendo $e'_r \geq e'_{r+1} \geq \ldots \geq e'_s > e_s$, sarà anche

$$e_r + 1 \leq e'_r\ ,\ e_{r+1} \leq e'_{r+1}\ ,\ \ldots\ ,\ e_s < e'_s\ . \tag{18}$$

Dalle $e_i \geq e_{i+1}$, $e_t - 1 \geq e_{t+1}$, $e_{r-1} \geq e_r + 1$ segue che la successione

$$e_1\ ,\ \ldots\ ,\ e_{r-1}\ ,\ e_r + 1\ ,\ e_{r+1}\ ,\ \ldots\ ,\ e_{t-1}\ ,\ e_t - 1\ ,\ e_{t+1}\ ,\ \ldots\ ,\ e_h$$

è non crescente ed ha per somma $n+1$ perchè $\sum_{i=1}^{h} e_i = n+1$. Da ciò è da a') segue che una omografia $\overline{\omega}$ di caratteristica (γ_0) si può ottenere come limite di una omografia $\omega^{(1)}(t)$ di caratteristica

$$[(e_1\ ,\ \ldots\ ,\ e_{r-1}\ ,\ e_r + 1\ ,\ e_{r+1}\ ,\ \ldots\ ,\ e_{t-1}\ ,\ e_t - 1,\ e_{t+1},\ \ldots\ ,\ e_h)]. \tag{γ_1}$$

Proviamo ora che fra gli interi che compaiono in questa caratteristica (γ_1) e quelli che compaiono nella (γ') valgono le relazioni analoghe alle (16), e cioè la somma dei primi k numeri della caratteristica (γ_1) è minore od uguale alla somma dei primi k numeri della caratteristica (γ'), e ciò per $k = 1, 2, \ldots, h-1$. Ciò è vero per $k = 1, 2, \ldots, s$ per le (16) e per le (18). Se è $s = h-1$ la nostra proprietà è quindi vera. Se è $s < h-1$, allora la proprietà è vera anche per i rimanenti valori di k, e cioè per $k = s+1, \ldots, h-1$; ciò perchè dalle (17) segue che la somma degli interi di (γ_1) di posto $k+1, \ldots, h$ è maggiore od uguale a quella degli interi corrispondenti $e'_{k+1}, \ldots, e'_h$ della (γ'), mentre la somma di tutti gli interi della (γ_1) è uguale alla somma di tutti gli interi della (γ').

Dopo ciò, se la caratteristica (γ_1) non coincide con la (γ'), ripetiamo il procedimento a partire da (γ_1) invece che dalla (γ_0), e così continuiamo. Troveremo in tal modo un numero finito di caratteristiche $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m = \gamma'$ tali che ogni omografia di S_n di caratteristica γ_j è limite di omografie di

S_n di caratteristica γ_{j+1}, e quindi ogni omografia γ_0 è limite di omografie di caratteristica γ'.

b') Con lo stesso ragionamento fatto in b) si prova che

Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \ldots, e_h)] \qquad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica

$$[(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{h^{(1)}})] \qquad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$h \geq h^{(1)}, \; e_1 \leq e'_1, \; \sum_{i=1}^{2} e_i \leq \sum_{i=1}^{2} e'_i, \ldots, \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e'_i .$$

Basta porre $e'_{h^{(1)}+1} = 0$, $e'_{h^{(1)}+2} = 0, \ldots, e'_h = 0$, e ripetere il ragionamento fatto in b).

c) Proviamo ora che:

Ogni omografia $\bar{\omega}$ di S_n di caratteristica

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{\nu} e_2^{(i)}, \ldots, \sum_{i=1}^{\nu} e_{h^{(1)}}^{(i)}\right)\right] \qquad (e_r^{(i)} \geq e_{r+1}^{(i)}) \tag{19}$$

si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica:

$$[(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{h^{(1)}}^{(1)})\,(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{h^{(2)}}^{(2)}) \ldots (e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \ldots, e_{h^{(\nu)}}^{(\nu)})] \tag{20}$$

con $h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \ldots \geq h^{(\nu)}$, ed $e_r^{(i)} = 0$ per $r > h^{(i)}$.

Poniamo

$$e_1 = \sum_{i=1}^{\nu} e_1^{(i)}, \; e_2 = \sum_{i=1}^{\nu} e_2^{(i)}, \ldots, e_{h^{(1)}} = \sum_{i=1}^{\nu} e_{h^{(1)}}^{(i)}$$

e ricordiamo che con una opportuna scelta del sistema di riferimento in S_n, il modulo $\bar{k}$ della $\bar{\omega}$ si può scrivere come somma diretta delle matrici J_{e_1}, $J_{e_2}, \ldots, J_{e_{h^{(1)}}}$. Indichiamo con $H_r(t)$ la matrice somma diretta delle matrici

$$(i-1)\, t\, I_{e_r^{(i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

e con $H(t)$ la matrice somma diretta delle matrici $H_1(t), H_2(t), \ldots, H_{h^{(1)}}(t)$. Consideriamo l'omografia $\omega(t)$ di S_n che ha per modulo la matrice $\bar{K} + H(t)$.

Si ha subito $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = \bar{\omega}$. Inoltre per $t \neq 0$, e $1 + (i-1)t \neq 0$ la $\omega(t)$ ha la caratteristica (20) perchè $J_{e_r} + H_r(t)$ è simile alla matrice somma diretta delle matrici

$$J_{\underset{r}{e(1)}}, (1+t) J_{\underset{r}{e(2)}}, (1+2t) J_{\underset{r}{e(3)}}, \ldots, (1+(\nu-1)t) J_{\underset{r}{e(\nu)}}$$

in quanto le dette due matrici hanno gli stessi divisori elementari.

Da b') e c) segue la proprietà enunciata al principio di questo n. 3, e cioè se valgono le relazioni (13) allora ogni omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di una omografia $\omega(t)$ di S_n di caratteristica (12).

Infatti, se valgono le (13) allora per b') ogni omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica (11) si può ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica (19), e pèr c) ogni omografia di caratteristica (19) si può ottenere come limite di omografie di caratteristica (12).

4. — Riunendo i risultati finali dei nn. 2, 3 si ha:

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica* (11) *si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica* (12) *è che valgano le relazioni* (13).

Le condizioni (13) si traducono subito in relazioni fra le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (distinti o no), cioè fra gli interi che compaiono nella caretteristica di PREDELLA corrispondente alla (11) e in quella corrispondente alla (12).

Basta ricordare (9) che se

$$(k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_t - 1) \qquad k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_t \geq 1$$

e il gruppo di PREDELLA corrispondente al gruppo di SEGRE

$$(e_1, e_2, \ldots, e_h) \qquad e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_h$$

allora è $h = k_1$ ed e_r è uguale al numero degli interi k che sono $\geq r$ ($r = 1, 2, \ldots, h$); in particolare è $e_1 = t$.

Da ciò segue che il teorema a) si può enunciare nella seguente forma:

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia $\overline{\omega}$ di S_n di caratteristica di* PREDELLA

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \ldots, h_t - 1)] \qquad (h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_t) \tag{21}$$

(9) BERTINI, *loc. cit.* in (1) pag. 112.

si possa ottenere come limite di omografie di S_n di caratteristica di PREDELLA

$$[(h_1^{(1)}-1,h_2^{(1)}-1,\ldots,h_{t^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1,h_2^{(2)}-1,\ldots,h_{t^{(2)}}^{(2)}-1)\ldots(h_1^{(\nu)}-1,h_2^{(\nu)}-1,\ldots,h_{t^{(\nu)}}^{(\nu)}-1)] \tag{22}$$

con $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$ *e* $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$, *è che detto* $\overline{d}_r$ *il numero degli interi* $h_1, h_2, \ldots, h_t$ *che sono* $\geq r$ *e* d_r *il numero degli interi* $h_i^{(j)}$ *che sono* $\geq r$, *si abbia*

$$\tag{23} \begin{gathered} h_1 \geq h_1^{(1)} \\ \overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \ldots + \overline{d}_r \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_r \quad (r = 1, 2, \ldots, h_1^{(1)} - 1) \end{gathered}$$

5. — Osserviamo che *le condizioni* (23) *non dipendono dal modo come sono raggruppati i numeri* $h_i^{(j)}$ *nella* (22).

Pertanto, come immediata conseguenza del teorema *b*) del n. 4, si ha il teorema di PREDELLA:

Un'omografia $\overline{\omega}$ *di* S_n *con un solo gruppo caratteristico è limite di omografie generali di* S_n *aventi gli stessi interi caratteristici* (di PREDELLA) *della* $\overline{\omega}$.

E si ha anche che:

Se una omografia $\overline{\omega}$ *di caratteristica di* PREDELLA (21) *è limite di omografie di caratteristica di* PREDELLA (22), *allora essa è anche limite di omografie la cui caratteristica di* PREDELLA *differisce dalla* (22) *solo per il modo come sono raggruppati gli* $h_i^{(j)}$.

Per esempio in S_3 un'omologia speciale [(2, 0)] è limite di biassiali generali [(1) (1)] ed è anche limite di biassiali speciali [(1, 1)]; una biassiale speciale [(1, 1)] è limite di omografie generali di tipo [(0) (0) (0) (0)] ed è anche limite di omografie particolari di tipo [(0, 0, 0) (0)].

6. — Estenderemo ora il teorema *a*) del n. 4 al caso in cui l'omografia $\overline{\omega}$ abbia più gruppi caratteristici.

Siano (1) le equazioni di $\overline{\omega}$, siano

$$\overline{\varrho}_1, \overline{\varrho}_2, \ldots, \overline{\varrho}_p$$

le radici dell'equazione caratteristica $\overline{D}_{n+1}(\varrho) = 0$ di $\overline{\omega}$, e sia

$$(\overline{e}_1^{(r)}, \overline{e}_2^{(r)}, \ldots, \overline{e}_{\overline{h}^{(r)}}^{(r)}) \qquad (\text{con } \overline{e}_i^{(r)} \geq \overline{e}_{i+1}^{(r)}) \tag{24}$$

il gruppo caratteristico corrispondente alla radice $\overline{\varrho}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$.

Supponiamo che la $\overline{\omega}$ sia limite, per $t \to 0$, di una onografia $\omega(t)$ la cui equazione caratteristica $D_{n+1}(\varrho) = 0$ abbia q radici (per $t \neq 0$).

Poichè $\lim\limits_{t\to 0} D_{n+1}(\varrho) = \overline{D}_{n+1}(\varrho)$, avremo che, per $t \to 0$, delle q radici dell'equazione $D_{n+1}(\varrho) = 0$ un certo numero q_1 tendono a $\overline{\varrho}_1$, un certo numero q_2 tendono a $\overline{\varrho}_2, \ldots,$ un certo numero q_p tendono a $\overline{\varrho}_p$; e se

$$\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \ldots, \varrho_{rq_r}$$

sono le radici di $D_{n+1}(\varrho) = 0$ che tendono a $\overline{\varrho}_r$, e

$$\mu_{r1}, \mu_{r2}, \ldots, \mu_{rq_r}$$

sono le molteplicità, sarà

$$\mu_{r1} + \mu_{r_2} + \ldots + \mu_{rq_r} = \overline{\mu}_r$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_p = q$$

essendo $\overline{\mu}_r$ la molteplicità della radice $\overline{\varrho}_r$ nell'equazione $\overline{D}_{n+1}(\varrho) = 0$, cioè $\overline{\mu}_r = \sum\limits_{i=1}^{\overline{h}^{(r)}} \overline{e}_i^{(r)}$.

Siano

$$(25) \quad (e_1^{(r1)}, e_2^{(r1)}, \ldots, e_{h^{(r1)}}^{(r1)})\,(e_1^{(r2)}, e_2^{(r2)}, \ldots, e_{h^{(r2)}}^{(r2)}) \ldots (e_1^{(rq_r)}\, e_2^{(rq_r)}, \ldots, e_{h^{(rq_r)}}^{(rq_r)})$$

con $e_i^{(rj)} \geq e_{i+1}^{(rj)}$, $h^{(rj)} \geq h^{(rj+1)}$, i q_r gruppi caratteristici di $\omega(t)$ che corrispondono ordinatamente alle radici $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \ldots, \varrho_{rq_r}$.

Ragionando su $\overline{\varrho}_r$ e su $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \ldots, \varrho_{rq_r}$ in modo analogo a come si è fatto nel n. 2, si prova che fra gli interi del gruppo (24) e quelli dei gruppi (25) valgono le relazioni analoghe alle (13), e cioè

$$\overline{h}^{(r)} \geq h^{(r1)}$$

$$\overline{e}_1^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} e_1^{(rj)}$$

$$\overline{e}_1^{(r)} + \overline{e}_2^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{e}_1^{(r)} + \overline{e}_2^{(r)} + \ldots + \overline{e}_{h^{(r1)}-1}^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)} + \ldots + e_{h^{(r1)}-1}^{(rj)})$$

con $e_i^{(rj)} = 0$ per $i > h^{(rj)}$.

Concludendo si ha che:

Se una omografia $\overline{\omega}$ di S_n con certi p gruppi caratteristici è limite di una omografia $\omega(t)$ di S_n con certi q gruppi caratteristici, allora i q gruppi di $\omega(t)$ si possono ripartire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi della $\overline{\omega}$, e in modo che:

1) La somma degli e di ogni gruppo caratteristico della $\overline{\omega}$ sia uguale alla somma degli e di tutti i gruppi della classe corrispondente.

2) Fra gli e di ogni gruppo caratteristico di $\overline{\omega}$ e gli e dei gruppi caratteristici di $\omega(t)$ che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alla (13).

Questo risultato si inverte facilmente; cioè affinchè una omografia $\overline{\omega}$ di S_n con una certa caratteristica $\overline{\gamma}$ formata da p gruppi si possa ottenere come limite di omografie di S_n avente una certa caratteristica γ formata da q gruppi, basta che i q gruppi di γ si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\overline{\gamma}$ e in modo che siano verificate le condizioni 1) e 2).

Infatti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, il modulo di $\overline{\omega}$ si può scrivere come somma diretta di p matrici quadrate $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_p$ tali che $\overline{A}_r$ ha per caratteristica l'r-mo gruppo di $\overline{\gamma}$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$. Dopo ciò, essendo verificate le 1) e 2), per quanto abbiamo visto nel n. 3 la matrice $\overline{A}_r$ si può considerare come limite, per $t \to 0$, di una matrice $A_r(t)$ avente per caratteristica i gruppi dell'r-ma classe di γ. L'omografia $\omega(t)$ che ha per modulo la somma diretta delle matrici $A_1(t), A_2(t), \ldots, A_p(t)$, ha per caratteristica γ e si ha $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = \overline{\omega}$.

Concludendo si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una data omografia $\overline{\omega}$ di S_n, con una certa caratteristica $\overline{\gamma}$ formata da p gruppi, si possa considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica γ formata da q gruppi, è che i q gruppi di γ si possano distribuire in p classi in corrispondenza biunivoca con i p gruppi di $\overline{\gamma}$ e in modo che:

1) *La somma degli e di ogni gruppo carattaristico di $\overline{\gamma}$ sia uguale alla somma degli e di tutti i gruppi della classe corrispondente.*

2) *Fra gli e di ogni gruppo caratteristico di $\overline{\gamma}$ e gli e dei gruppi caratteristici di γ che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alle* (13).

Per enunciare questo teorema mediante i numeri h di PREDELLA, basta cambiare e con h e in 2) sostituire alle condizioni (13), le condizioni (23).

OSSERVAZIONE. Da questo teorema segue che se una data omografia $\overline{\omega}$ di S_n avente una certa caratteristica $\overline{\gamma}$ si può considerare come limite di omografie di S_n aventi una certa caratteristica γ, allora *ogni* omografia di caratteristica $\overline{\gamma}$ si può considerare come limite di omografie di caratteristica γ.